ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 4, 1973 Математика

Ю. С. ФРИДЛЯНД

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ РЯД ФУРЬЕ ИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ОТ ЗАДАННОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L^p_{(0,\,1)}$ $(1 \leqslant p < 2)$ по полной, ортонормированной, ограниченной в совокупности системе функций $\{\varphi_n\}$. Обязан ли этот ряд сходиться почти всюду к f? Вообще говоря, нет, так как справедлива следующая теорема А. М. Олевского [1]:

Теорема. Существуют полная, ортонормированная, ограниченная в совокупности система функций $\{\varphi_n\}$ и функция $f \in L^p_{(0,\,1)}$ при всех $p \in [1,\,2)$ такие, что ряд Фурье функции f по системе $\{\varphi_n\}$ π-универсален, т. е. для любой измеримой функции g существует такая перестановка натурального ряда $\{n_k\}$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ сходится п. в. к g.

В настоящей работе этот результат усиливается в двух направлениях. Во-первых, показывается, что в качестве функции f может быть взята любая наперед заданная интегрируемая функция (не принадлежащая $L^2_{(0,\,1)}$). С другой стороны, вышеупомянутая система $\{\varphi_n\}$ состоит из разрывных функций. Ниже показывается, что подобная система может быть построена из алгебраических полиномов. Заметим, что этот результат не может быть получен путем аппроксимации исходной системы полиномами и последующей ортогонализацией, так как из работы А. М. Олевского [2] вытекает, что полученная система полиномов лишь квадратично близка к исходной системе, а такая близость не обеспечивает равносходимости соответствующих рядов.

Итак, справедлива

Теорема. *Для любой функции $f \in L_{(0,\,1)}$, $f \overline{\in} L^2_{(0,\,1)}$ существует замкнутая в $C_{(0,\,1)}$, ортонормированная, ограниченная в совокупности система алгебраических полиномов $\{p_n\}$ такая, что ряд Фурье функции f по системе $\{p_n\}$ π-универсален.*

Обозначим

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^1 |f|^p\, dx \right\}^{1/p},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

где

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,\,1]} |f(x)|,$$

$\chi(E)$ — характеристическая функция множества E, и докаже предварительно ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть заданы ортонормированная система пол номов* $\{p_k\}$, $k=1, 2, \cdots, n$ *на отрезке* $[0, 1]$, *функция* $f \in L_{(0, 1)}$. *Тог существует полином* g, *обладающий свойствами*:

а) $\|g\|_2 = 1$,

б) $(g, p_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$,

в) $\int_0^1 fg dx = 0$,

г) $\|g\|_\infty < C$, *где* C — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Построим полином g_1, который удовле воряет условиям а), б) и г). Существование такого полинома обесп чивается леммой 3 работы А. М. Олевского [2]. Применяя эту лемм еще раз к системе полиномов $p_1, \cdots, p_n, g_1$, получим полином g удовлетворяющий тем же условиям и условию $(g_1, g_2) = 0$.

Положим далее

$$\alpha_1 = \int_0^1 fg_1 \, dx, \quad \alpha_2 = \int_0^1 fg_2 \, dx.$$

Тогда полином

$$g = \frac{\alpha_2 g_1 - \alpha_1 g_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

удовлетворяет всем условиям леммы. В самом деле, условия а), б) г) выполнены для g, так как они выполнены для g_1 и g_2.

Проверим выполнение в). Имеем

$$\int_0^1 gf dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \left[\alpha_2 \int_0^1 g_1 f dx - \alpha_1 \int_0^1 g_2 f dx \right] = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда дл любого отрезка* $\Delta \subset [0, 1]$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует полином* g *обладающий свойствами:*

а) *выполнены требования* а)—в) *леммы* 1;

б) *существует множество* $E \subset \Delta$ *такое, что*

$$\left.\begin{array}{l} \mu E \leqslant |\Delta|^2 + \varepsilon \\ |g(x) - (1 - |\Delta|)^{-1/2}| < \varepsilon; \ x \in \Delta \setminus E \\ |g(x)| < \varepsilon, \ x \overline{\in} \Delta \end{array}\right\} ; \qquad (1)$$

Доказательство. По заданному $\varepsilon > 0$ выберем числа γ, η и θ, которые будут зафиксированы впоследствии. Разделим отрезок Δ на 2^N равных отрезков Δ_k ($k=1, 2, \cdots, 2^N$) и определим функцию

$$r_1 = \begin{cases} \gamma, \; x \in \Delta_k; \; k=1, 3, \cdots, 2^N - 1 \\ -\gamma, \; x \in \Delta_k; \; k=2, 4, \cdots, 2^N \\ 0, \; x \overline{\in} \Delta, \end{cases}$$

причем N выбрано столь большим, что выполнены соотношения

$$|(p_i, r_1)| < \eta, \; i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

Очевидны равенства

$$\|r_1\|_2 = \gamma \sqrt{\Delta}, \; \|r_1\|_\infty = \gamma. \tag{3}$$

Приблизим r_1 полиномом r_2 так, чтобы

$$\|r_1 - r_2\|_2 < \eta, \; \|r_2\|_\infty \leqslant \|r_1\|_\infty + \eta \tag{4}$$

и положим

$$r = r_2 - \sum_{i=1}^{n} (r_2, p_i)\, p_i, \; a = \int_0^1 rf\, dx.$$

Каждый из отрезков Δ_k ($k = 1, 2, \cdots, N$) разделим на 2^R равных отрезков Δ_{km} ($m=1, 2, \cdots, 2^R$) и определим функцию

$$q_1 = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-|\Delta|}}{|\Delta|}, \; x \in \left(a_{km}, a_{km} + \dfrac{|\Delta|^2}{2^{N+R}}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-|\Delta|}}, \; x \in \left(a_{km} + \dfrac{|\Delta|^2}{2^{N+R}}\, b_{km}\right) \\ 0, \qquad x \overline{\in} \Delta, \end{cases}$$

где $\Delta_{km} = (a_{km}, b_{km})$. Число R выбрано так, что

$$\left|\int_0^1 fq_1\, dx\right| < \theta, \; |(g_1, p_i)| < \theta \; (i=1, 2, \cdots, n), \; |(q_1, r)| < \theta. \tag{5}$$

Очевидно, что $\|q_1\|_2 = 1$. Приблизим q_1 полиномом q_2 так, чтобы

$$\|q_1 - q_2\|_2 < \theta,$$
$$\sup_{x \in (\Delta \setminus F) \cup ([0, 1] \setminus \Delta)} |q_1(x) - q_2(x)| < \theta, \tag{6}$$

где

$$F \subset \Delta, \; \mu F \leqslant |\Delta|^2 + \varepsilon,$$
$$\|q_2\|_\infty \leqslant \|q_1\|_\infty + \theta,$$
$$\int_F |f|\, dx < \theta$$

и положим

$$q=\frac{q_2-\sum\limits_{i=1}^{n}(q_2, p_i)\,p_i-\dfrac{(q_2, r)}{(r, r)}\,r}{\left\|q_2-\sum\limits_{i=1}^{n}(q_2, p_i)\,p_i-\dfrac{(q_2, r)}{(r, r)}\,r\right\|_2},$$

$$\beta=\int_0^1 qf\,dx,\quad g=\frac{q-\dfrac{\beta}{\alpha}\,r}{\left\|q-\dfrac{\beta}{\alpha}\,r\right\|_2}.$$

Полином g — искомый. Чтобы доказать это, получим ряд оценок. Из соотношений (2) и (4) имеем

$$|(r_2, p_i)|\leqslant|(r_1-r_2, p_i)|+|(r_1, p_i)|<\eta\ (i=1, 2,\cdots, n). \tag{7}$$

Из (7), (3) и (4) вытекает

$$\|r\|_\infty\leqslant\|r_2\|_\infty+\sum_{i=1}^{n}|(r_2, p_i)|\,\|p_i\|_\infty\leqslant\gamma+\eta\,(1+n\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|p_i\|_\infty),$$

$$\|r\|_2\geqslant\|r_2\|_2-\sum_{i=1}^{n}|(r_2, p_i)|>\gamma\sqrt{\Delta}-\eta\,(2n+1), \tag{8}$$

$$\|r\|_2\leqslant\|r_2\|_2+\sum_{i=1}^{n}|(r_2, p_i)|\leqslant\gamma\sqrt{\Delta}+\eta\,(2n+1).$$

Соотношения (5), (6) и (3) дают

$$|(q_2, r)|\leqslant|(q_1-q_2, r)|+|(q_1, r)|\leqslant\theta\,(1+\gamma\sqrt{\Delta}), \tag{9}$$

$$|(q_2, p_i)|\leqslant|(q_1-q_2, p_i)|+|(q_1, p_i)|\leqslant2\theta\ (i=1, 2,\cdots, n). \tag{10}$$

Наконец, из (9), (10), (8) и (6) получаем

$$\left\|q_2-\sum_{i=1}^{n}(q_2, p_i)\,p_i-\frac{(q_2, r)}{(r, r)}\,r\right\|_2>1-\theta-2n\theta-$$

$$-\frac{\theta\,(1+\gamma\sqrt{\Delta})}{\gamma\sqrt{\Delta}-\eta(2n+1)}>1/2, \tag{11}$$

если выбрать η и θ достаточно малыми. Используя далее (5), (6), имеем

$$\left|\int_0^1 q_2f\,dx\right|\leqslant\left|\int_0^1(q_1-q_2)\,f\,dx\right|+\left|\int_0^1 q_1f\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\theta+\left|\int_{CF}(q_1-q_1)\,f\,dx\right|+\left|\int_F(q_1-q_2)\,f\,dx\right|\leqslant\theta+\theta\|f\|_2+$$

$$+ (\|q_1\|_\infty + \|q_2\|_\infty)\int\limits_F |f|\,dx \leqslant \theta\,[1+\|f\|_1 + \|q_1\|_\infty + \|q_2\|_\infty].$$

Из последнего неравенства, учитывая также оценки (9) — (11), получаем

$$|\beta| < \frac{1}{\left\| q_2 - \sum\limits_{i=1}^{n}(q_2, p_i)\,p_i - \frac{(q_2, r)}{(r, r)}\,r \right\|_2} \left[\left| \int\limits_0^1 q_2 f dx \right| + \sum_{i=1}^{n} |(q_2, p_i)| \times \right.$$

$$\left. \times \left| \int\limits_0^1 f p_i\,dx \right| + \frac{|(q_2, r)|}{|(r, r)|}\,|\alpha| \right] \leqslant$$

$$\leqslant 2\theta \left[1 + \|f\|_1 + \|q_1\|_\infty + \|q_2\|_\infty + \sum_{i=1}^{n} \left| \int\limits_0^1 f p_i\,dx \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\gamma\sqrt{\Delta}}{[\gamma\sqrt{\Delta} - \eta(2n+1)]^2}\,|\alpha| \right] \equiv \theta A. \tag{12}$$

Из (8) и (12) вытекает $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1,$

$$\left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\|_2 \leqslant 1 + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \|r\|_2 \leqslant 1 + 2\gamma\sqrt{\Delta},$$

$$\left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\|_2 \geqslant 1 - \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \|r\|_2 \geqslant 1 - 2\gamma\sqrt{\Delta} > \frac{1}{2} \tag{13}$$

при достаточно малых η, θ и γ. Таким образом

$$\left| \left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\| - 1 \right| \leqslant 2\gamma\sqrt{\Delta}\,. \tag{14}$$

Из (13) и (14) получаем

$$\|g - q\|_\infty \leqslant \frac{1}{\left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\|_2} \left[\|q\|_\infty \left(1 - \left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\|_2 \right) + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \|r\|_\infty \right] \leqslant 2\,[\,\|q\|_\infty\, 2\gamma\sqrt{\Delta} + \theta A \gamma] < \varepsilon \tag{15}$$

при достаточно малом γ. Тем самым числа η, θ и γ фиксированы.

Проверим теперь выполнение требований леммы. Условия а)—в) леммы 1 выполнены для q и r, а следовательно и для g, что вытекает непосредственно из построения. Условия (1) выполнены для q_1 при $E=\varnothing$. В силу (6) эти условия будут выполнены и для q_2 при $E=F$. Но тогда из (15) вытекает их выполнение и для полинома g. Лемма полностью доказана.

Следующая лемма принадлежит А. М. Олевскому [3].

Лемма 3. *Для любого натурального k существует ортогональная матрица $A_k=\|a_{ij}^{(k)}\|$ порядка 2^k, удовлетворяющая условиям:*

а) $a_{1j}^{(k)}=2^{-k/2},\ 1\leqslant j\leqslant 2^k$,

б) $a_{2j}^{(k)}=2^{-k/2},\ 1\leqslant j\leqslant 2^{k-1},\ a_{2j}^{(k)}=-2^{-k/2},\ 2^{k-1}<j\leqslant 2^k$,

в) $|a_{ij}^{(k)}|<C,\ 1\leqslant j\leqslant 2^k$,

г) $\sum\limits_{i=1}^{2^k}|a_{ij}^{(k)}|<C,\ 1\leqslant j\leqslant 2^k$,

д) $\sum\limits_{i=1}^{2^k}\left|\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}^{(k)}\right|\leqslant C2^{k/2},\ 1\leqslant m\leqslant 2^k$.

Лемма 4. *Пусть $B\subset L^2_{(0,1)}$ — n-мерное подпространство из полиномов, функция $f\in L_{(0,1)}$, $f\overline{\in} L^2_{(0,1)}$, $H(f,B)=\{\varphi\colon \varphi\in L^\infty_{(0,1)}\}$ — множество функций таких, что*

$$\int_0^1 f\varphi dx=0,\ (\varphi,g)=0\ (\forall g\in B). \tag{16}$$

Тогда

а) $\overline{H}(f,B)=B^1$ (*черта обозначает замыкание в* L^2)

б) *в $H(f,B)$ существует замкнутая, ограниченная в совокупности (некоторой абсолютной константой) система полиномов.*

Доказательство. Прежде всего можно считать, что $\int\limits_0^1 fgdx=0$ $(\forall g\in B)$ (в противном случае рассмотрим функцию $f_1=f-\sum\limits_{i=1}^{n}(f,g_i)\,g_i$, где $\{g_i\}$—ортонормированный базис в B, $(f,g_i)=\int\limits_0^1 fg_i\,dx$.

Рассмотрим множество $H_1\subset H$ полиномов, удовлетворяющих условиям (16) и предположим, что H_1 не плотно в B^1. Тогда существует функция $F\in B^1$ такая, что

$$\int_0^1 Fhdx=0,\ \forall h\in H_1.$$

Кроме того, существует полином $h_0\in B^1$ такой, что

$$\int_0^1 fh_0dx\neq 0, \tag{17}$$

так как в противном случае мы бы имели $\int\limits_0^1 fhdx=0$ для любого полинома, что невозможно. Поэтому для любого полинома $p\in B^1$ существует такое число t, что

$$\int\limits_0^1 f(p-th_0)\,dx=0. \tag{18}$$

Из (18), с учетом того, что $p-th_0\in B^1$ вытекает, что $p-th_0\in H_1$ откуда следует, в силу предположения

$$\int\limits_0^1 F(p-th_0)\,dx=0.$$

Отсюда и из (17) и (18) получаем

$$\int\limits_0^1 Fpdx=t\int\limits_0^1 Fh_0\,dx=\int\limits_0^1 fpdx\cdot\left(\int\limits_0^1 Fh_0\,dx\Big/\int\limits_0^1 fh_0dx\right)\equiv\lambda\int\limits_0^1 fpdx.$$

Учитывая, что $\int\limits_0^1 fgdx=0$ $\forall g\in B$, получаем $F\equiv\lambda f$, что невозможно, так как $f\in L^2$. Утверждение а) доказано.

Пусть теперь $\{l_n\}$—произвольная, замкнутая в H_1 (а следовательно и в H) система нормированных полиномов. Пусть еще $\{h_i\}$, $i=1,2,\cdots,k$ — ортонормированная система полиномов, $h_i\in H_1$, причем

$$\|h_i\|_\infty<1+C^2,\quad i=1,2,\cdots,k. \tag{19}$$

Существование таких полиномов обеспечено леммой 1.

Пусть еще $\hat{l}_{n_{k+1}}$ — перпендикуляр в $L^2_{(0,1)}$, опущенный из $l_{n_{k+1}}$ на линейную оболочку, натянутую на полиномы $h_1,\cdots,h_k$ ($l_{n_{k+1}}$—первый из не вошедших в эту линейную оболочку полиномов l_n). Найдется натуральное число s_{k+1} такое, что

$$\|\hat{l}_{n_{k+1}}\|_\infty\leqslant 2^{\frac{s_{k+1}}{2}}. \tag{20}$$

Применяя последовательно $2^{s_{k+1}}-1$ раз лемму 1, получим ортонормированную систему полиномов $\{\hat{h}_j\}$, $j=k+2,\cdots,2^{s_{k+1}}+k$, причем будет выполнено соотношение (16) и

$$\|\hat{h}_j\|_\infty<C,\quad j=k+2,\cdots,2^{s_{k+1}}+k. \tag{21}$$

Определим полиномы $\{h_j'\}$, $j=k+1,\cdots,2^{s_{k+1}}+k$ следующим образом:

$$h_j = a_{j,}^{(s_{k+1})} \hat{l}_{n_{k+1}} + \sum_{\nu=k+2}^{2^{s_{k+1}}+k} a_{j,\nu-k}^{(s_{k+1})} \hat{h}_\nu, \quad j = k+1, \cdots, 2^{s_{k+1}}+k,$$

где $A_{s_{k+1}} = \|a_{ij}^{(s_{k+1})}\|$ — матрица из леммы 3.

Из (20), (21) и свойств а) и г) матрицы вытекает

$$|h_j| \leqslant 2^{\frac{s_{k+1}}{2}} \cdot 2^{-\frac{s_{k+1}}{2}} + \sum_{\nu=k+2}^{2^{s_{k+1}}+k} |a_{j,\nu-k}^{(s_{k+1})}| \cdot |\hat{h}_\nu| \leqslant 1 + C^2,$$

т. е. (19) выполнено. Так как система $\hat{l}_{s_{k+1}}, \hat{h}_j$ $(j=k+2,\cdots,2^{s_{k+1}}+k)$ ортонормирована, а матрица $A_{s_{k+1}}$ ортогональна и нормирована, то система $h_j\,(j=k+1,\cdots,2^{s_{k+1}+k})$ также ортонормирована. Кроме того, очевидно, что полиномы $\{l_j\}\,(j=1, 2,\cdots, n_{k+1})$ линейно выражаются через полиномы $h_j\ (j=1, 2,\cdots, 2^{s_{k+1}}+k)$.

Таким образом, по индукции построена требуемая полная, ортонормированная и ограниченная в совокупности система полиномов $\{h_n\}$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того*

$$f \in L^2_{(0,1)} \int_0^1 f p_i\,dx = 0 \quad (i=1, 2,\cdots, n).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *функция* f *может быть представлена в виде*

$$f = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i h_i + f_1,$$

где $\gamma_i = \int_0^1 f h_i\,dx$, $h_i\,(i=1, 2, \cdots, \nu)$ — *ортонормированная система полиномов,* $\nu = \nu(\varepsilon)$ — *натуральное число, причем выполнены условия*

а) $\int_0^1 f_1 h_i\,dx = 0,\ i=1, 2,\cdots, \nu,$

б) $(h_i, p_j) = 0;\ i=1, 2,\cdots, \nu;\ j=1, 2,\cdots, n,$

в) $\|f_1\|_{L} < \varepsilon,$

г) $\|h_i\|_\infty < 1 + C^2,\ i=1, 2,\cdots, \nu.$

Доказательство. Выберем число $\eta > 0$, которое зафиксируем ниже, и разобьем отрезок [0,1] на два множества $E \cup CE$ так, чтобы

$$\left|\int\limits_E fp_i dx\right| = \left|\int\limits_{CE} fp_i dx\right| < \eta, \ i=1, 2, \cdots, n, \tag{22}$$

$$\sup_{x \in CE} |f(x)| < R,$$

$$\int\limits_E |f|\, dx < \eta.$$

Определим функции φ_2 и ψ_2 равенствами

$$\varphi_2 = f\chi(CE), \ \psi_2 = f\chi(E)$$

и положим

$$\psi_1 = \psi_2 - \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)\, p_i, \ \varphi_1 = \varphi_2 + \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)\, p_i$$

(так как $\psi_2 \overline{\in} L^2$, то (ψ_2, p_i) есть лишь обозначение для интеграла $\int\limits_0^1 \psi_2 p_i \cdot dx$).

Очевидны равенства

$$(\psi_1, p_i) = (\varphi_1, p_i) = 0, \ i=1, 2, \cdots, n.$$

Кроме того очевидно, что φ_1 ограничена. Из (22) вытекает

$$\|\psi_2 - \psi_1\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |(\psi_2, p_i)|\, \|p_i\|_2 \leqslant n\eta$$

и

$$|(\varphi_1, \psi_1)| = \left|(\varphi_2, \psi_2) - \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)(\varphi_2, p_i) + \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)^2 - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)^2 \right| \leqslant n\eta^2,$$

так как $(\varphi_2, \psi_2) = 0$. Наконец, положим

$$\psi = \psi_1 - \frac{(\varphi_1, \psi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}\varphi_1, \ \varphi = \varphi_1 + \frac{(\varphi_1, \psi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}\varphi_1.$$

Очевидно, что функция φ ограничена. Оценка для $|(\psi_1, \varphi_1)|$ дает

$$\|\psi - \psi_1\|_1 \leqslant n\eta^2 \|\varphi_1\|_2.$$

Таким образом, мы имеем $f = \varphi + \psi$, причем

$$(\varphi, \psi) = 0, \tag{23}$$

$$\|\psi\|_1 \leqslant \|\psi - \psi_1\|_1 + \|\psi_1 - \psi_2\|_1 \leqslant n\eta^2 \|e_1\|_2 + n\eta + \eta < \frac{\varepsilon}{2} \tag{24}$$

при достаточно малом η.

Пусть $H(\psi, p_l, \cdots, p_n)$—многообразие, определенное в лемме 4. Выберем в нем систему полиномов $\{h_n\}$, удовлетворяющую условию (19). Так как, в силу (23), $\varphi \in H(\psi, p_1, \cdots, p_n)$, то $\varphi = \sum_{l=1}^{\infty} (\varphi, h_l)\, h_l$ (в L^2).

Положим $f_1 = \psi + \sum_{l=\nu+1}^{\infty} (\varphi, h_l)\, h_l$, где ν выбрано так, что

$$\left\| \sum_{l=\nu+1}^{\infty} (\varphi, h_l)\, h_l \right\|_2 < \varepsilon/2.$$

Тогда, принимая во внимание (24), имеем $\|f_1\|_1 < \varepsilon$, т. е. в) выполнено. Учитывая (16) и (23) имеем далее

$$(f_1, h_i) = \left(\varphi + \psi - \sum_{l=1}^{\nu} (\varphi, h_l)\, h_l,\, h_i\right) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu,$$

т. е. б) верно. Справедливость а) и г) очевидна. Лемма доказана.

Заметим теперь, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ π-универсален и для системы функций $\{q_n\}$ выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h_n - q_n| < \infty, \tag{25}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ также π-универсален.

Лемма 6. *Для любой функции $f \in L_{(0,1)}$, $f \overline{\in} L^2_{(0,1)}$ существует ортонормированная, замкнутая в $C_{[0,1]}$, ограниченная в совокупности и состоящая из полиномов система $\{t_n\}$, содержащая три непересекающиеся подсистемы $\{t_s^i\}$ $(i = 0, 1, 2,\ s = 1, 2, \cdots)$ со свойствами:*

а) $|t_s^{(0)}| < C$;

б) *существует последовательность чисел* $\{\gamma_s\}$

$$\gamma_s \to 0, \quad \sum_{s=1}^{\infty} |\gamma_s| = \infty \tag{26}$$

такая, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s\, t_s^{(1)} \tag{27}$$

есть ряд Фурье функции f;

в) *ряд* $\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{1} (-1)^r \gamma_s\, t_s^{(2)}$ *π-универсален.*

Доказательство. Зафиксируем последовательность действительных чисел $\{\varepsilon_i^k\}$ $(i=1, 2, \cdots, 2^k;\ k=0, 1, 2, \cdots)$,

$$\varepsilon_i^k > 0, \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon_i^k < \infty, \tag{28}$$

и пусть $\{l_n\}$ — произвольная, замкнутая в $C_{(0,1)}$ система полиномов. Построение искомой системы полиномов осуществляется по индукции.

Пусть уже построены для всех номеров $1 \leqslant j \leqslant r-1$ натуральные числа n_s, k_s, ν_s, полиномы $\{g_j^s\}(j=1,2,\cdots,2^s)$, $\{h_i^s\}$ $(i=1, 2, \cdots, 2^{k_s}+\nu_s)$, q_s; функции f_s и множества E_j^s $(j=1, 2, \cdots, 2^s)$, причем справедливы соотношения:

1)
$$f_{s-1} = \sum_{j=1}^{2^{k_s}+\nu_s} c_j^s h_j^s + f_s, \tag{29}$$

2)
$$\int_0^1 f_{r-1} \cdot \{g_j^s;\ h_i^s;\ q_s\}\, dx = 0;\ j=1, 2, \cdots, 2^s,\quad i=1, 2, \cdots, 2^{k_s}+\nu_s, \tag{30}$$

3) система $\{g_j^s\}$, $\{h_j^s\}$, q_s — ортонормирована, (31)

4)
$$|g_i^s - (1-2^{-2s})^{-1/2}| < \varepsilon_i^s,\ x \in \Delta_i^s \setminus E_i^s, \tag{32}$$
$$\Delta_i^s = [i-1/2^s;\ i/2^s],\quad E_i^s \subset \Delta_i^s,$$

5)
$$\mu E_i^s < 2^{-2s} + \varepsilon_i^s,\ i=1, 2, \cdots, 2^s, \tag{33}$$

6)
$$|g_i^s| < \varepsilon_i^s,\ x \overline{\in} \Delta_i^s;\ i=1, 2, \cdots, 2^s, \tag{34}$$

7)
$$\|q_s\|_\infty < C, \tag{35}$$

8)
$$\|h_j^s\|_\infty < 1 + C^2,\ j=1, 2, \cdots, 2^{\nu_s}+k_s, \tag{36}$$

9)
$$\|f_s\|_2 < \frac{1}{s}, \tag{37}$$

10) линейная оболочка H_{r-1} полиномов $\{g_1^s\} \cup \{h_j^s\} \cup q_s$ содержит полиномы l_i $(i=1, 2, \cdots, n_{r-1};\ n_{r-1} \geqslant r-1)$.

Разделим отрезок [0,1] на 2^r отрезков Δ_i^r $(i=1, 2, \cdots, 2^r)$. К каждому отрезку Δ_i^r, H_{r-1} и функции f_{r-1} последовательно 2^r раз применим лемму 2. Получим ортонормированную систему многочленов $\{g_i^r\}$, множеств E_i^r $(i=1, 2, \cdots, 2^r)$, для которых выполнены соотношения (30)—(34) при $s=r$. Применяя к функции f_{r-1} и ко всем построенным полиномам лемму 1, получим полином q_r, удовлетворяющий соотношениям (30), (31) и (35).

Пусть l_{n_r} $(n_r > r)$ полином из $\{l_n\}$, еще не вошедший в линейную оболочку, натянутую на уже построенные полиномы. Тогда его можно представить в виде

$$l_{n_r}=\sum_{s=1}^{r}\sum_{i=1}^{2^s}a_i^s g_i^s+\sum_{s=1}^{r}b_s q_s+\sum_{s=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{2^{k_s+\nu_s}}d_j^s h_j^s+\frac{\hat{l}_{n_r}}{\|\hat{l}_{n_r}\|_2},$$

причем $\hat{l}_{n_r}$ уже ортогонален к этой линейной оболочке. Пусть k_r —натуральное число такое, что

$$|\hat{h}_1^r|=\left|\frac{\hat{l}_{n_r}}{\|\hat{l}_{n_r}\|_2}\right|\leqslant 2^{\frac{k_r}{2}}. \tag{38}$$

В силу леммы 1 найдутся ортонормированные полиномы $\{\hat{h}_j^r\}$, $j=2,\cdots$ $\cdots, 2^{k_r}$, для которых будут выполнены соотношения (30), (31), (35) при $s=r$. Определим полиномы $\{h_j^r\}$ $(1\leqslant j\leqslant 2^{k_r})$ с помощью матрицы A_{k_r} из леммы 3 следующим образом:

$$h_j^r=\sum_{i=1}^{2^{k_r}}a_{ij}^{(k_r)}\hat{h}_j^r,\ j=1,2,\cdots,2^{k_r}.$$

Так как система $\{\hat{h}_i^r\}$ и матрица A_{k_r} ортонормированы, то система полиномов $\{h_j^r\}$ также удовлетворяет соотношениям (30), (31), (35). Из (38), свойств а) и г) матрицы A_{k_r} и условия г) леммы 1 имеем

$$|h_j^r|<\frac{1}{\sqrt{2^{k_r}}}\sqrt{2^{k_r}}+C\sum_{j=2}^{2^{k_r}}|a_{ij}^{(k_r)}|\leqslant 1+C^2. \tag{39}$$

Функция $\hat{f}_{r-1}=f_{r-1}-\sum_{j=1}^{2^{k_r}}c_j^r h_j^r$, где $c_j^r=\int_0^1 f_{r-1}h_j^r\,dx$, ортогональна ко всем построенным полиномам, поэтому применяя лемму 5 с $\varepsilon=\frac{1}{r}$ имеем

$$\hat{f}_{r-1}=\sum_{j=2^{k_r}+1}^{2^{k_r+\nu_r}}c_j^r h_j^r+f_r.$$

Следовательно

$$f_{r-1}=\sum_{j=1}^{2^{k_r+\nu_r}}c_j^r h_j^r+f_r,$$

т. е. условие (29) выполнено. Из (39) и условия г) леммы 5 вытекает справедливость соотношения (36), а из условия г) леммы 1 вытекает справедливость отношения (35). Остальные соотношения справедливы в силу соответствующих условий лемм 1, 2, 3 и 5. Кроме того, построенная система полиномов содержит, очевидно, l_{n_r}. Предположения индукции оправданы.

Объединим все построенные полиномы в одну систему, обозначим ее через $\{t_n\}$ и покажем, что эта система искомая.

Так как каждый полином l_n линейно выражается через систему $\{t_n\}$, то $\{t_n\}$ замкнута в $C_{[0,1]}$ вместе с $\{l_n\}$.

Положим $\{t_s^{(0)}\}=\{q_s\}$. Тогда в силу (35) система $\{t_s^0\}$ ограничена в совокупности, т. е. а) выполнено.

Далее положим $\{t_s'\}=(h_j^r)$

$$(s=2^{k_r}+\nu_r+j,\quad j=1,2,\cdots,2^{k_r}+\nu_r,\quad r=0,1,\cdots,\ k_0=\nu_0=0)$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}\gamma_s\, t_s'=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{k_r}+\nu_r}c_j^r h_j^r. \tag{40}$$

Подпоследовательность его частных сумм S_{m_n}, где $m_n=\sum_{r=0}^{n}(2^{k_r}+\nu_r)$, имеет вид

$$S_{m_n}=\sum_{r=0}^{n}\sum_{j=1}^{2^{k_r}+\nu_r}c_j^r h_j^r=f-f_n.$$

Но тогда из соотношения (37) вытекает

$$\|S_{m_n}-f\|_c=\|f_n\|_c<\frac{1}{n}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Это означает, что ряд (40) есть ряд Фурье функции f. Поэтому из (36) и теоремы Мерсера (см. [4], стр. 181) следует

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|=\infty,$$

т. е. условие б) выполнено. Проверим справедливость в). Как известно (см. [1], стр. 252) ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^s}\sum_{n=0}^{1}(-1)^n\,\hat{\gamma}_j^s\,\chi(\Delta_j^s) \tag{41}$$

π-универсален для любой последовательности $\{\hat{\gamma}_j^s\}$, удовлетворяющей условиям (26). Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^s}\sum_{n=0}^{1}(-1)^n\hat{\gamma}_j^s\tau_j^s, \tag{42}$$

где

$$\tau_j^s=\begin{cases}(1-2^{-2s})^{-1/2}, & x\in\Delta_j^s\setminus E_j^s\\ g_j^s, & x\in E_j^s\\ 0, & x\overline{\in}\Delta_j^s,\end{cases}$$

положим $\hat{\gamma}_j^s = {}_1\gamma_j^s (1-2^{-2s})^{-1/2} \equiv \beta_s \gamma_j^s$. Так как $\beta_s \to 1$, а $\{\gamma_j^s\}$ удовлетворяет условию (26), то это же верно и для $\{\hat{\gamma}_j^s\}$, поэтому ряд (41) π-универсален. Но члены ряда (42) отличаются от членов ряда (41) лишь на множествах E_j^s. А так как в силу (28) и (33), справедлива оценка

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} \mu E_j^s \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} (2^{-2s} + \varepsilon_j^s) < \infty$$

и, как следствие

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\gamma}_j^s \chi(\Delta_j^s) - \hat{\gamma}_j^s \tau_j^s| < \infty,$$

то это означает, что выполнено условие (25), поэтому ряд (42) π-универсален. С другой стороны, из определения τ_j^s и из соотношений (32) и (34) имеем

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} |\tau_j^s - g_j^s| \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} \varepsilon_j^s < \infty.$$

Но это означает выполнение условия (25). Поэтому ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} \sum_{m=0}^{1} (-1)^m \gamma_j^s g_j^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{1} (-1)^m \gamma_n t_n^{(2)}$$

π-универсален. Лемма полностью доказана.

Переходим теперь к доказательству теоремы. Так как каждый полином $\{t_s^j\}$ $(j=0, 1, 2;\ s=1, 2, \cdots)$ ограничен, то найдется последовательность номеров $2 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ такая, что

$$|t_s^j| < 2^{\lambda_s/2}, \quad s=0,\ 1,\ 2,\ x \in [0, 1]. \tag{43}$$

Перенумеруем множество $\{t_s^{(0)}\}$ следующим образом:

$$\{t_s^j\} \quad (j=3, 4, \cdots, 2^{\lambda_s},\ s=1, 2, \cdots).$$

Имеем

$$|t_s^{(j)}| < C \quad (3 \leqslant j \leqslant 2^{\lambda_s};\ s=1, 2, \cdots). \tag{44}$$

Зафиксируем s и положим

$$p_s^i = \sum_{j=1}^{2^{\lambda_s}} a_{ji}^{(\lambda_s)} t_s^j,$$

где $A_{\lambda_s} = \|a_{ji}^{(\lambda_s)}\|$ — матрица из леммы 3. Наконец, объединим все полиномы $\{p_s^i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^{\lambda_s},\ s=1, 2, \cdots)$ в одну систему, обозначим ее $\{p_n\}$ и покажем, что $\{p_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы.

Ортонормированность ее вытекает из соответствующих свойств системы $\{t_n\}$ и матриц A_{λ_n}. Замкнутость $\{p_n\}$ в $C_{[0,1]}$ вытекает из соответствующего свойства системы $\{t_n\}$. Далее, используя свойства а), б) и г) матриц A_{λ_n} и соотношения (43) и (44), имеем

$$|p_s^j| \leqslant \sum_{l=1}^{2^{\lambda_s}} |a_{jl}^{(\lambda_s)}|\, |t_s^l| \leqslant 1 + C^2,$$

т. е. система $\{p_n\}$ ограничена в совокупности. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n p_n = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{\lambda_s}} \frac{\gamma_s}{\sqrt{2^{\lambda_s}}} p_s^j, \tag{45}$$

где числа γ_s определены в лемме 5. Учитывая ортогональность матриц A_{λ_s}, условие а) леммы 3 и определение полиномов $\{p_s^j\}$, имеем

$$t_s' = \sum_{j=1}^{2^{\lambda_s}} a_{1j}^{(\lambda_s)} p_s^j = \sum_{j=1}^{2^{\lambda_s}} 2^{-\frac{\lambda_s}{2}} p_s^j,$$

т. е. внутренняя сумма ряда (45) есть $\gamma_s t_s'$. Таким образом, ряд (45) есть ряд (27) и, следовательно является рядом Фурье функции f по системе $\{p_n\}$. Доказательство π-универсальности ряда (45) осуществляется дословным повторением соответствующего места работы [1] (см. стр. 256—257). Теорема доказана.

Отметим одно следствие. Напомним, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ называется универсальным (в обычном смысле), если для любой измеримой функции g существует возрастающая последовательность номеров n_k такая, что $s_{n_k} \to g$ почти всюду. Из доказанной выше теоремы и леммы 3 работы А. А. Талаляна [5] вытекает

Следствие. Для любой функции $f \in L_{(0,1)}$, $f \overline{\in} L^2_{(0,1)}$ существует замкнутая в $C_{[0,1]}$, ограниченная в совокупности, ортонормированная система полиномов $\{\tau_n\}$ такая, что ряд Фурье функции f по системе $\{\tau_n\}$ является универсальным рядом.

В качестве системы $\{\tau_n\}$ можно взять соответствующим образом переставленную систему $\{p_n\}$.

Автор благодарен А. М. Олевскому, под руководством которого выполнена эта работа.

Государственный всесоюзный центральный
научно-исследовательский институт
комплексной автоматизации

Поступила 24.V.1972

ՅՈՒ. Ս. ՖՐԻԴԼՅԱՆԴ. Ֆուրյեի ունիվերսալ շարք՝ ըստ ինտեգրելի ֆունկցիայից ճառա-ճաշվական բազմանդամների *(ամփոփում)*

Յուրաքանչյուր $f \in L\,(f \overline{\in} L^2)$-ի համար կառուցվում է օրթոգոնալ, լրիվին ու C-ում փակ ալգոտ բազմանդամների $\{p_n\}$ համակարգ։ Այդ համակարգը այնպիսին է, որ f-ի Ֆուրյեի շարքը ըստ $\{p_n\}$ համակարգի ունիվերսալ է տեղափոխությունների նկատմամբ։

Yu. S. FREEDLAND. *Universal Furie series of algebraic polynoms for given integrable function* (summary)

For any function $f \in L$ $(\sqrt{f} \in L^2)$ a system of closed in C, orthonormal, constrained in total polynomials $\{p_n\}$ is built. This system is such that Fourier series f by the system $\{p_n\}$ is universal with respect to permitations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Олевский.* О некоторых особенностях рядов Фурье в пространствах L^p $(p<2)$, Мат. сборник, 77/119: 2, 251—258.
2. *А. М. Олевский.* Об устойчивости оператора ортогонализации Шмидта, Изв. АН СССР, серия мат., 34, № 4, 1970, 803—826.
3. *А. М. Олевский.* Об одной ортонормированной системе и ее применениях, Мат. сборник, 71/113: 3, 1966, 297—336.
4. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Физматгиз, 1958.

А. А. Талалян. Ряды, универсальные относительно перестановок, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, № 4,1960, 567—604.