ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 4, 1973 Математика

С. К. АФЯН

ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Введение

Рассмотрим в круге $|z|\leqslant 1$ $(z = x + iy)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \overline{B(z)}\,\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z \partial \overline{z}} = 0, \tag{1.1}$$

где $u(z) = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$—искомая функция, $B(z)$ — заданная, аналитическая в круге $|z|<1$ и непрерывная в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ функция, удовлетворяющая условию

$$|B(z)|<1 \text{ при } |z|<1, \ |B(z)|=1 \text{ при } |z|=1. \tag{1.2}$$

Легко видеть, что (1.1) эквивалентно системе уравнений, эллиптической в $|z|<1$ и вырождающейся на всей границе $|z|=1$. Невырожденные эллиптические системы и связанные с ними краевые задачи хорошо изучены (см., например, [3]).

Для систем, вырождающихся только на некотором участке, изучены такие краевые задачи, в которых граничные условия для одних компонент вектора-решения задаются на всей границе, а для остальных компонент—только на невырожденном участке границы (см., например, [1] и [2]).

В настоящей работе рассматривается краевая задача Римана-Гильберта в случае вырождения на всей границе. Для точной формулировки этой задачи приведем определения.

Функция $u(z)$, принадлежащая $C^{(1)}(|z|\leqslant 1) \cap C^{(2)}(|z|<1)$, удовлетворяющая уравнению (1.1) в круге $|z|<1$, называется регулярным решением этого уравнения.

Формулировка задачи. Требуется найти регулярное решение $u(z)$ уравнения (1.1) по краевому условию

$$\operatorname{Re}\{[a(t) - ib(t)]\,u(t)\} = c(t) \text{ при } |t|=1, \tag{1.3}$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — заданные на границе $|t| = 1$ вещественные функции, принадлежащие классу $C^{(1,h)}$ и такие, что $a^2+b^2\neq 0$ при любом t, $|t|=1$.

В параграфе 2 получено общее решение уравнения (1.1). В параграфе 3 изложен метод нахождения общего решения задачи Римана-Гильберта для уравнения (1.1) и найден индекс этой задачи.

§ 2. Построение общего решения

Как известно (см. [7], стр. 312) верна

Лемма 2.1. Если функция $B(z)$ отлична от постоянной, аналитична в круге $|z|<1$, непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и удовлетворяет условию (1.2), то она представима в виде

$$B(z)=e^{i\theta}\prod_{k=1}^{m}\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}, \qquad (2.$$

где θ—некоторое действительное число и $|a_k|<1$, $k=1,\cdots,m$.

В дальнейшем, без ограничения общности, можно взять $\theta=0$.

Лемма 2.2. *Пусть* $\{a_k: |a_k|<1, k=1, 2,\cdots, m\}$ — *произвольн комплексные числа. Тогда*:

1. *Выражение*

$$Q_m(z)=(1-|z|^2)^{-1}\left(\prod_{k=1}^{m}|1-\bar{a}_k z|^2-\prod_{k=1}^{m}|z-a_k|^2\right) \qquad (2.$$

является полиномом относительно z *и* $\bar{z}$, *где* m—*произвольное ц лое число.*

2. *Существует константа* $q_m>0$ *такая, что*

$$Q_m(z)\geqslant q_m>0 \quad \textit{при} \quad |z|<1. \qquad (2.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$Q_1(z)=1-|a_1|^2. \qquad (2.$$

Следовательно утверждение леммы справедливо при $m=1$.

Пусть лемма верна при $m=s$. Докажем, что тогда она вер также при $m=s+1$. Согласно предположению индукции существуе постоянная q_s такая, что

$$Q_s(z)\geqslant q_s>0 \quad \text{при} \quad |z|\leqslant 1. \qquad (2.$$

С другой стороны, легко убедиться в справедливости следую щего соотношения

$$Q_{s+1}(z)=|1-\bar{a}_{s+1}z|^2\,Q_s(z)+(1-|a_{s+1}|^2)\prod_{k=1}^{s}|z-a_k|^2. \qquad (2.$$

Отсюда и следует, что $Q_{s+1}(z)$ есть полином относительно z $\bar{z}$. Из (2.5) вытекает, в силу условий $|a_k|<1$, $k=1, 2,\cdots, s+1$, чт функция $Q_{s+1}(z)$ в замкнутом круге непрерывна, положительна и в обращается в нуль. Отсюда и следует (2.3) при $m=s+1$.

Лемма 2.3. *Пусть* $m \geqslant 1$ *и* $0 \leqslant k \leqslant m$. *Тогда для любых комплексных чисел* $a_1, \cdots, a_m$ *выражение*

$$P_{k,m}(z) = (1-|z|^2)^{-1}\left[z^k \prod_{p=1}^{m}(1-a_p\bar z) - \bar z^{m-k}\prod_{p=1}^{m}(z-a_p)\right] \qquad (2.7)$$

есть полином относительно z и $\bar z$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.2.

В дальнейшем, для простоты, ограничимся случаем, когда m — нечетное число. В случае, когда m—четное число, все дальнейшие утверждения можно получить аналогичными рассуждениями.

Лемма 2.4. *Пусть* $P_{l,m}(z)(l = 0, 1, \cdots, m)$ *и* $Q_m(z)$ — *полиномы, определенные по формулам* (2.7) *и* (2.2), *в которых в качестве чисел* a_k $(k = 1, 2, \cdots, m)$ *взяты все нули коэффициента* $\overline{B(z)}$ *уравнения* (1.1), *а*

$$R_k(z) = \begin{cases} [Q_m(z)]^{-1}[P_{k,m}(z) + P_{m-k,m}(z)] \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant \dfrac{m-1}{2} \\ i\,[Q_m(z)]^{-1}\,[P_{k-\frac{m+1}{2},m}(z) - P_{\frac{3m+1}{2}-k,m}(z) \\ \qquad \text{при } \dfrac{m+1}{2} \leqslant k \leqslant m. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Тогда для произвольного регулярного решения $u(z)$ *уравнения* (1.1) *можно указать действительные числа* d_k $(k=0, 1, \cdots, m)$ *такие, что* $u(z)$ *является решением уравнения*

$$\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} = \sum_{k=0}^{m} d_k R_k(z). \qquad (2.9)$$

Обратно, если для произвольно выбранных действительных чисел d_k $(k = 0, 1, \cdots, m)$, $u(z) \in C^{(2)}(|z| < 1) \cap C^{(1)}(|z| \leqslant 1)$ *есть некоторое решение уравнения* (2.9), *то оно является также регулярным решением уравнения* (1.1).

Доказательство. Пусть $u(z)$ —произвольное регулярное решение уравнения (1.1) в круге $|z|<1$. Тогда имеет место

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \overline{B(z)}\,\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}\right) = 0, \qquad (2.10)$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \overline{B(z)}\,\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} = \overline{\varphi(z)}, \qquad (2.11)$$

где $\varphi(z) \in C(|z| \leqslant 1)$—некоторая аналитическая в круге $|z|<1$ функция.

Перейдя в (2.11) к комплексно сопряженным, получим

$$\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} + B(z)\,\frac{\partial u}{\partial z} = \varphi(z), \qquad (2.12)$$

а из (2.11) и (2.12)

$$[1-|B(z)|^2]\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}}=\varphi(z)-B(z)\,\overline{\varphi(z)}\,. \tag{2.13}$$

Подставляя в (2.13) выражение для $B(z)$ из (2.1), получим

$$\left(1-\prod_{p=1}^{m}\frac{|z-a_p|^2}{|1-\bar{a}_p z|^2}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}}=\varphi(z)-\overline{\varphi(z)}\prod_{p=1}^{m}\frac{z-a_p}{1-\bar{a}_p z}\,. \tag{2.14}$$

В силу ограниченности $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}}$, левая часть (2.14) стремится к нулю при $|z|\to 1$. Кроме того, так как $\varphi(z)\in C(|z|\leqslant 1)$, то

$$\varphi(z)=\overline{\varphi(z)}\prod_{p=1}^{m}\frac{z-a_p}{1-\bar{a}_p z}\quad \text{при } |z|=1. \tag{2.15}$$

Из (2.15) получим

$$\varphi(z)\prod_{p=1}^{m}(1-\bar{a}_p z)=\overline{\varphi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\prod_{p=1}^{m}(z-a_p)\quad \text{при}\quad |z|=1. \tag{2.16}$$

Рассмотрим функцию

$$F(z)=\begin{cases}\varphi(z)\prod\limits_{p=1}^{m}(1-\bar{a}_p z) & \text{при } |z|\leqslant 1\\ \overline{\varphi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\prod\limits_{p=1}^{m}(z-a_p) & \text{при } |z|>1.\end{cases} \tag{2.17}$$

Функция $F(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости и $|F(z)|=O(|z|^m)$ при $|z|\to\infty$. Поэтому $F(z)$ имеет вид

$$F(z)=c_0+c_1 z+\cdots+c_m z^m.$$

Следовательно

$$\varphi(z)\prod_{p=1}^{m}(1-\bar{a}_p z)=c_0+c_1 z+\cdots+c_m z^m \quad \text{при } |z|\leqslant 1 \tag{2.18}$$

и

$$\overline{\varphi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\prod_{p=1}^{m}(z-a_p)=c_0+c_1 z+\cdots+c_m z^m \quad \text{при } |z|>1. \tag{2.19}$$

Из (2.19) получим

$$\varphi(z)\prod_{p=1}^{m}(1-\bar{a}_p z)=\bar{c}_0 z^m+\bar{c}_1 z^{m-1}+\cdots+\bar{c}_m \quad \text{при } |z|<1. \tag{2.20}$$

Из (2.18) и (2.20) следует, что

$$c_{m-k}=\bar{c}_k,\quad k=0,\ 1,\cdots,\ m. \tag{2.21}$$

Пусть

$$d_k = \begin{cases} \operatorname{Re} c_k \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant \dfrac{m-1}{2}, \\ \operatorname{Im} c_{k-\frac{m+1}{2}} \text{ при } \dfrac{m+1}{2} \leqslant k \leqslant m. \end{cases} \tag{2.22}$$

Тогда в силу (2.21)

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} [d_k (z^k + z^{m-k}) + i d_{k+\frac{m+1}{2}} (z^k - z^{m-k})]. \tag{2.23}$$

Учитывая (2.23), определим из (2.18) функцию $\varphi(z)$ и подставим в (2.15). Из (2.8) следует, что $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2.9). Легко проверить справедливость также и утверждений второй части леммы. Таким образом, лемма доказана.

Теперь перейдем к построению общего решения уравнения (1.1). Из лемм 2.2 и 2.3 вытекает, что функции $R_k(z)$, $k=0, 1, \cdots, m$, а, следовательно, и правая часть (2.9), принадлежат классу $C^{(1)}(|z| \leqslant 1)$ при произвольных комплексных a_p, $p=1, 2, \cdots, m$, для которых $|a_p| < 1$. Тогда, как известно (см. [4], стр. 42), общее решение уравнения (2.9) задается формулой

$$u(z) = \overline{\Phi(z)} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m} d_k \iint_{|t|<1} \overline{\frac{R_k(t)}{t-z}} \, d\xi d\eta, \tag{2.24}$$

где $t = \xi + i\eta$, $\Phi(z) \in C^{(1)}(|z| \leqslant 1)$—произвольная аналитическая в круге $|z| < 1$ функция и d_k—произвольные действительные числа. Тогда, в силу леммы 2.4, получаем, что общее решение уравнения (1.1) дается формулой (2.24).

§ 3. Задача Римана-Гильберта для уравнения (1.1)

Введем сначала некоторые обозначения. Положим

$$\sigma = \frac{1}{\pi} [\arg (a(t) - ib(t))]_{|t|=1}, \tag{3.1}$$

где символ $[\ ]_{|t|=1}$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при полном обходе окружности $|t|=1$ в положительном направлении;

$$g_k(\theta) = -\operatorname{Re}\left[(a(t) - ib(t)) \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{R_k(\zeta)}{\zeta - t} \, d\xi d\eta \right], \ t = e^{i\theta}, \ k=0, 1, \cdots, m, \tag{3.2}$$

где $R_k(z)(k=0, 1, \cdots, m)$—функции, определенные по формулам (2.8).

Согласно (2.24) и (3.2) краевое условие (1.3) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\{[a(t)+ib(t)]\,\Phi(t)\}=c(t)-\sum_{k=0}^{m} d_k\, g_k(t) \text{ при } |t|=1. \qquad (3.3)$$

Тогда нахождение решения $u(z)$ задачи Римана-Гильберта для уравнения (1.1) сводится к нахождению действительных чисел d_k $(k=0, 1,\cdots, m)$ и функции $\Phi(z)$, аналитической в круге $|z|<1$ и принадлежащей классу $C^{(1)}(|z|\leq 1)$, для которых справедливо условие (3.3). Последнюю задачу будем коротко называть задачей (3.3). Для заданных $d_0, d_1,\cdots, d_m$ задача (3.3) есть известная задача Римана-Гильберта о нахождении аналитической функции, которая полностью изучена (см. [5], стр. 149).

Как известно, при $\sigma\geqslant 0$ неоднородная задача Римана-Гильберта всегда имеет решение.

Рассмотрим сначала однородную задачу (1.1), (1.3), т. е. когда $c(t)=0$. При $\sigma\geqslant 0$, подставляя в (2.24) вместо $\Phi(z)$ общее решение задачи Римана-Гильберта с краевым условием (3.3), выраженное через $d_0, d_1,\cdots, d_m$, получим общее решение однородной задачи (1.1), (1.3), зависящее линейно от $\sigma+m+2$ действительных постоянных (см. [5], стр. 148—151). В случае $\sigma<-2$ (σ — четное число), как известно (см. [5], стр. 149), неоднородная задача Римана-Гильберта с краевым условием (3.3) ($c(t)=0$) имеет решение в том случае, когда правая часть (3.3) ($c(t)=0$) удовлетворяет некоторым условиям ортогональности. В данном случае для выполнения этих условий необходимо, чтобы $d_0, d_1,\cdots, d_m$ удовлетворяли некоторой алгебраической линейной однородной системе уравнений.

Пусть $d_0^1, d_1^1,\cdots, d_m^1$ — некоторое решение системы этих алгебраических уравнений. Это решение подставим в (3.3), после чего, заменяя в (2.24) $\Phi(z)$ решением задачи Римана-Гильберта с краевым условием (3.3), $d_0, d_1,\cdots, d_m$ на $d_0^1, d_1^1, \cdots, d_m^1$, будем иметь некоторое решение исходной однородной задачи (1.1), (1.3) при $\sigma\leqslant -2$. Очевидно, что каждое решение задачи (1.1), (1.3) будет получено описанным способом.

Перейдем к вычислению индекса $\varkappa$ задачи (1.1), (1.3). Легко убедиться, что $\varkappa$ равно индексу задачи (3.3), для вычисления которого рассмотрим банаховые пространства E_1 и E_2, определенные следующим образом:

E_1—пространство элементов $(\Phi(z), d_0, d_1,\cdots, d_m)$ с обычными операциями и нормой $\max\limits_{|z|<1}|\Phi'(z)|+\max\limits_{|z|<1}|\Phi(z)|+\max\limits_{0<k<m}|d_k|$, где $\Phi(z)$— аналитическая в круге $|z|<1$ функция, имеющая непрерывную производную в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$;

E_2—пространство элементов $(\alpha(t), d_0, d_1,\cdots, d_m)$, также с обычными операциями и нормой $\max\limits_{|t|=1}|\alpha(t)|+\max\limits_{0<k<m}|d_k|$, где $\alpha(t)\in C^{(1)}(|t|=1)$.

Пусть теперь операторы K_1; $E_1 \to E_2$ и K_2: $E_2 \to C^{(1)}(|t|=1)$ определены следующим образом:

$$K_1(\Phi(z), d_0, d_1, \cdots, d_m) = (\mathrm{Re}\,((a+ib)\,\Phi)|_{|t|=1}, d_0, d_1, \cdots, d_m),$$

$$K_2(\alpha(t), d_0, d_1, \cdots, d_m) = \alpha(t) + d_0 g_0(t) + d_1 g_1(t) + \cdots + d_m g_m(t).$$

Тогда условие (3.3) можно записать в виде

$$K_2 \circ K_1(\Phi(z), d_0, d_1, \cdots, d_m) = c(t).$$

По теореме об индексе произведения двух операторов (см., например, [6], стр. 45) имеем

$$\mathrm{ind}\,(K_2 \circ K_1) = \mathrm{ind}\,K_1 + \mathrm{ind}\,K_2.$$

Легко видеть, что $\mathrm{ind}\,K_1$ равняется индексу задачи Римана-Гильберта, т. е. $\mathrm{ind}\,K_1 = \sigma + 1$, а $\mathrm{ind}\,K_2 = m+1$. Откуда получим

$$\varkappa = \sigma + m + 2. \tag{3.4}$$

Замечание. Все приведенные утверждения остаются в силе и в том случае, когда требование принадлежности $u(z)$ к классу $C^{(1)}(|z| \leqslant 1)$ заменим условиями:

1. $u(z) \in C^{(0,h)}(|z| \leqslant 1)$;
2. $\left|\dfrac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{const}}{(1-|z|)^{\alpha}}$, $|z|<1$ $(0 < \alpha < 1)$;
3. Функция $\left[\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} + B(z)\dfrac{\partial u}{\partial z}\right]$ имеет конечный предел при $|z| \to 1$.

Автор выражает признательность проф. Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 18.VII.1972

Ս. Գ. ԱՖՅԱՆ. Ռիման-Հիլբերտի խնդիրը տիրույթի եզրում վերածվող դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտական սիստեմների մի դասի համար *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ստացված է տիրույթի եզրում վերածվող դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտական սիստեմների մի դասի ընդհանուր լուծումը։ Դիտարկված է Ռիման-Հիլբերտի խնդիրը այդպիսի սիստեմների համար և հաշված է այդ խնդրի ինդեքսը։

S. K. AFIAN. *The Rieman-Hilbert problem for a class of elliptical systems of differential equations with degeneration on the boundary* (summary)

The general solution for a class of elliptical systems of diferential equations with degeneration on the boundary is obtained. The Rieman-Hilbert problem is considered and the index is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Диденко.* Первая краевая задача для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений с вырождением на границе, Сибирский мат. журн., VI, № 4, 1965, 814—831.
2. *С. А. Терсенов.* К теории уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области, Сибирский мат. журн., VI, № 5, 1965, 1120—1143.
3. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.
4. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
5. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
6. *С. Г. Крейн.* Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.
7. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.