ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII. № 4. 1973 Математик

V. AVANISSIAN

# QUELQUES APPLICATIONS DE LA METHODE DES "BOULES d'EXCLUSION" DANS $C^p$

## § 1. Introduction

1.1. Dans le plan complexe le comportement asymptotique du module d'une fonction entière d'ordre nul, à l'extérieur d'une certaine suite de disques sontenant les zéros, a fait dès 1925 l'objet de nombreuses études et a donné naissance à la méthode dite des "cercles d'exclusion" (H. Cartan, Denjoy-Littelwood, Nevanlinna-Polya, Valiron, Wiemann, etc.).

Parmi les fonctions entières d'ordre nul les fonctions à croissance logarithmique (i. e. $(\mathrm{Log} r)^{-m} M(r; f)$ borné, $m \geqslant 1$, $M(r; f) = \sup_{|z|=r} \mathrm{Log}\,|f(z)|$) possèdent des propriétés remarquables. Par exemple,

si $m=2$, $M(r; f)$ est équivalent à $\int_0^r \frac{\mu_f(t)}{t}\,dt$ $(r \to \infty)$ avec $\mu_f = \sum_k n_k \delta(a_k)$ où $\delta(a_k)$ est la mesure de Dirac au point $a_k$ zéro de $f$, $n_k$ la multiplicité de ce zéro et $\mu_f(t)$ le nombre des zéros de $f$ dans le disque ouvert de centre O et de rayon $t>0$ ($O \notin \mathrm{Supp}\,\mu_f$); en outre on a $\mathrm{Log}\,|f(z)| \sim M(r; f)$ $(|z| = r \to \infty)$ à condition d'exclure du plan une suite de disques contenant les zéros de $f$. De façon prècise si $u(z)$ est sous-harmonique dans tout le plan et vérifie $(\mathrm{Log} r)^{-2} \sup_{|z|=r} u(z) < \infty$, la même conclusion subsiste à l'extérieur d'une suite de disques dont la somme des angles vus de l'origine est finie ([3]).

On rencontre les fonctions entières à croissance logarithmique dans la recherche des solutions entières d'une équation differentielle algébrique de troisième ordre: la fonction

$$F: z \to \prod_{n \geq 0} \left(1 + \frac{a^{2n+1}}{1+a^{4n+2}} z\right) \quad (|a| < 1)$$

en est un exemple, $F$ vérifie une telle èquation et $M(r; F) \sim A\,(\mathrm{Log} r)^2$; la fonction composée $F \circ F$ vérifie

$$M(r; F \circ F) \sim B\,(\mathrm{Log}\, r)^4$$

($A$, $B$ étant des constantes). De même, si l'équation fonctionnelle de Poincaré

$$f(zs) = P(z) f(z) + Q(z) \quad (s \text{ donné, } |s| > 1)$$

($P$, $Q$ polynômes) admet une solution entière $f$, celle-ci vèrifie

$$M\,(r;\,f) \sim A\,(\mathrm{Log}\,r)^2 \quad (A = \mathrm{cte}).$$

1.2. — Les résultats analogues dans le cas de plusieurs variables sont plus récents [2]; leur étude est liée très étroitement aux propriétés des fonctions plurisousharmoniques et leur représentation potentielle. Contrairement au cas $p=1$ on ne peut espérer dans $C^p$ $(p \geqslant 2)$ obtenir une relation telle que $\mathrm{Log}\,|f\,(z_1, \cdots, z_p)| \sim A\,M\,(r;\,f)$ $(\|z\| = r \to \infty)$ hors d'une suite de boules constituant un recouvrement de l'ensemble analytique $W_f = \{z \in C^p \mid f\,(z) = 0\}$ avec la somme des angles solides vus de l'origine finie. Les zéros de $f$ sont non isolés et il existe dans une telle suite de boules au moins un couple consécutif de boules d'adhérences disjointes (cf. 4.2). Néanmoins (et c'est l'objet du présent travail) en supprimant de $C^p$ un certain voisinage de $W_f$ supposé algébrique, on obtient des résultats analogues au cas $p=1$. L'étude faite ici permettra de simplifier quelques démonstrations de l'article [2] et de le compléter par des éléments nouveaux. Signalons, par exemple, que si la variété algébrique $W_p = \{z \in C^p \mid P\,(z) = 0\}$ est portée par un certain cône de révolution $c$ de sommet O avec $\overline{C} \cap \mathrm{R}^p = \{0\}$, on a si $R \to \infty$

$$\sup_{\substack{\|z\| < R \\ z \in C^p}} \mathrm{Log}\,|P\,(z_1, \cdots, z_p)| \sim \inf_{\substack{\|x\| = R \\ x \in R^p}} \mathrm{Log}\,|P\,(x_1, \cdots, x_p)|$$

L'hypothèse faite sur $W_p$ entraîne que $P$ et un polynôme hypoelliptique au sens de la théorie des équations aux dérivées partielles [4].

## § 2. Notations—rappel

2.1. On se place une fois pour toute dans $C^p\,(p \geqslant 2)$ et on renvoie á [5], [6], [7] pour les rappels qui vont suivre. Un point courant de $C^p$ est noté

$$z = (z_1, \cdots, z_p) \quad \text{et} \quad \|z\| = \Big(\sum_{j=1}^{p} z_j \bar{z}_j\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$\omega_{2p}\,(1)$ (resp. $V_{2p}\,(1)$) désigne la mesure-aire (resp. mesure-volume) de la sphére (resp. boule) unité de $\mathrm{R}^{2p}$. Si $V$ est plurisousharmonique

$$\sigma_V = \frac{1}{2\pi}\,\Delta V = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 V}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_j} \quad \text{(au sens des distributions)},$$

$$\mu_V = \frac{\sigma_V}{\omega_{2p-2}(1)}, \quad \sigma_V\,(t) = \int_{\|a\| < t} d\sigma\,(a),$$

$$\lambda\,(V, z, r) = \frac{1}{\omega_{2p}\,(1)} \int_{\|a\| = 1} V\,(z + ra)\, d\omega_{2p}\,(a),$$

$$M\,(r) = \sup_{\|z\| < r} V\,(z),$$

$$M(r;f)=\sup_{|z|<r} \operatorname{Log}|f(z)| \quad \text{si } f \text{ est entière.}$$

$\lambda$ et $M$ sont fonctions croissantes convexes de Log $r$ et de limite $V(z)$ quand $r \to 0$. Les dérivées á gauche et á droite $\nu^-(z,r)$, $\nu^+(z,r)$ de $\lambda(V,z,r)$ par rapport à Log $r$ sont positives croissantes. $\mu_V$ est la mesure de Radon positive associée à $V$ en tant que fonction sousharmonique de 2n variables réelles. On note supp $\mu_V$ le support de $\mu_V$. La masse $\mu_V(z,t)$ portée par la boule ouverte (resp. fermée) $B(z,t)$ de centre $z$ et de rayon $t$ est égale à

$$\frac{1}{2p-2}\, t^{2p-2}\, \nu_V^-(z,t) \left(\text{resp. } \frac{1}{2p-2}\, t^{2p-2}\, \nu_V^+(z,t)\right).$$

Dans le cas $V=\operatorname{Log}|f|$, $f$ holomorphe, on a $\nu_V^+(z,t)=\nu_V^-(z,t)= =\nu_f(z,t)$ et $\nu_f(z)=\lim_{t\to 0} \nu_f(z,t)$ est égal au degré du premier polynôme homogène non identiquement nul obtenu en développant $f$ au voisinage de $z$ en série de polynômes homogénes de degrés croissants. Pour un polynôme $P$ de degré $m$ on a toujours $\nu_P(z,t) \leqslant m$ pour tout $z$ et $t$; donc

$$\mu_P(z,t)=\frac{1}{2p-2}\, t^{2p-2}\, \nu_P(z,t) \leqslant \frac{m}{2p-2}\, t^{2p-2}. \tag{1}$$

Contrairement au cas $p=1$, si $V$ est plurisousharmonique $\frac{\mu_V(z,t)}{t^{2p-2}}$ reste bornée quand $t\to 0$ et la limite est nulle si $V(x) > -\infty$ (i. e. $\mu_V$ ne peut comporter des masses isolées). Si $V=\operatorname{Log}|f|$ et $f(z_0)=0$ on a $\nu_f(z_0,t) \geqslant 1$ et

$$\sigma^f(z_0,t)=\omega_{2p-2}(1)\, \mu_f(z_0,t)=\frac{\omega_{2p-2}(1)}{2p-2}\, t^{2p-2}\, \nu_f(z_0,t) > V_{2p-2}(1)\, t^{2p-2} \tag{2}$$

(résultat dû à Rütishauser — P. Lelong). Avec la terminologie usuelle dans la théorie de fonctions entières de plusieurs variables complexes, si $V=\operatorname{Log}|f|$, $f$ entière et $\nu_f$: $t\to \nu_f(t)=(2p-2)t^{-2p+2}\mu_f(t)$ $(\mu_f(t)=\mu_f(0,t)$, $\nu_f(t)$ joue le rôle d'indicatrice de croissance. La mesure positive $\nu_f$ a pour expression: $\nu_f=\pi^{-(p-1)}\,\theta\Lambda\alpha^{p-1}$, oú $\theta$ est le courant (au sens de De Rham) positif $\frac{i}{\pi}\partial_z\partial_{\bar z} V$ et $\alpha=\frac{i}{2}\partial_z\partial_{\bar z} \operatorname{Log}\left[\sum_j z_j\bar z_j\right]$ est la forme extérieure positive liée à la métrique de l'espace projectif $P^{p-1}$ des droites complexes issues de l'origine. $\mu_f$ est proportionnelle à l'aire $\sigma_f$ de l'ensemble analytique $w_f=\{z\in C^p \mid f(z)=0\}$ dans $C^p$ et $\nu_f$ est l'airede l'image $W_f$ dans $P^{p-1}$. Si $p=1$, $\sigma_f(t)$ est égal au nombre $n(t)$ des zéros de $f$ de module $<t$, comptés avec leur multiplicité. Dans ce cas, $\mu_f(t)= =\nu_f(t)=\sigma(t)=$

$$=\frac{\partial}{\partial \operatorname{Log} t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right] \text{et} \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|(f(re^{i\theta})\,d\theta-$$

$-\operatorname{Log}|f(O)|,\ f(O) \neq 0.$

2.2. T h e o r e m e (P. Lelong [6]).— *Si V est plurisousharmonique dans tout* $C^p$ *et vérifie*

$$1) \quad M(r) = o(r) \ (r \to \infty)$$

$$2) \quad \int^{\infty} \frac{d\nu_V(t)}{t} < \infty \ (\nu_V(t) = \nu_V(O;\ t))$$

*on a si* $O \notin$ supp $\mu_V$:

$$V(z) = V(O) + \int_{C^p} d\mu_V(a) \left| \frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{\|z-a\|^{2p-2}} \right|$$

(En particulier cette représentation est valable pour toute fonction de la forme $V = \operatorname{Log}|f|$, $f$ entière d'ordre $< 1$, $f(O) \neq 0$. Si $O \notin$ supp $\mu_V$, la condition 2 équivaut aux deux conditions

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\nu_V(t)}{t} = 0, \int^{\infty} \frac{\nu_V(t)}{t^2}\, dt < \infty).$$

2.3. T h e o r e m e (Avanissian [2].— *Soit* $V(z_1, \cdots, z_p)$ *une fonction plurisousharmonique dans tout* $C^p$ *(non constante) telle que*

$$\limsup_{r \to \infty} M(r) (\operatorname{Log} r)^{-m} < +\infty \quad (m > 1).$$

*On a si* $O \notin$ supp $\mu_V$:

$$(2) \quad M(r) = \int_0^r \frac{\nu_V(t)}{t}\, dt + (2p-1)\,\theta_1(r)\, r \int_r^{\infty} \frac{\nu_V(t)}{t^2}\, dt - \theta_2(r)$$

*avec* $0 < \theta_1(r) < 1$, $\theta_2(r) > 0$, $\limsup_{r \to \infty} \theta_2(r)(\operatorname{Log} r)^{1-m} < \infty$.

*La représentation* (2) *est aussi valable pour les fonctions plurisous harmoniques d'ordre nul* $\left(\text{i. e. } \limsup_{r \to \infty} \frac{\operatorname{Log} M(r)}{\operatorname{Log} r} = 0\right)$ *avec*

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\theta_2(r)}{\displaystyle\int_0^r \frac{\nu_V(t)}{t}\, \mathrm{dt}} = 0 \cdot$$

Remarquer que dans les théorèmes 2.2 et 2.3 la condition $O \notin$ supp $\mu_V$ peut être remplacée par $V(O) > -\infty$ [1].

## § 3. P—jauge d'une boule

3. 1. D e f i n i t i o n. — *Soient* $P(z_1, \cdots, z_p)$ *un polgnôme (non constant),*

$$W_P = \{z \in C^p \mid P(z) = 0\}$$

*et* $B(O, R)$ *la boule ouverte de centre* $O$ *et rayon* $R > 0$ *avec* $W_P \cap \cap B(O, R) \neq \varnothing$. *Si* $W_{R,P} = B(O, R) \cap W_P$, *la* $P$*—jauge de* $B(O, R)$ *est le nombre* $\delta_{R,P}$ *défini par*

$$\delta_{R,P} = \inf \{\rho \mid \overline{B(O, R)} \subset \bigcup_{z \in W_{R,P}} B(z, \rho)\}$$

Exemple. Considérons dans $C^2$ le polynôme $P = z_1 z_2$ et la boule $B(O, R)$ $(R > 0)$ on vérifie que $\frac{\delta_{R,P}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (Fig. 1). Il est évident, que dans le cas du polynôme $Q = z_1 z_2 \times \times \left(z_1 - \frac{R}{2}\right)$ (par exemple) on obtient

$$\delta_{R,Q} \leqslant \delta_{R,P}.$$

Il est clair aussi, que $\varepsilon > 0$ étant donné on peut trouver un polynôme $S$ tel que

$$\delta_{R,S} < \varepsilon.$$

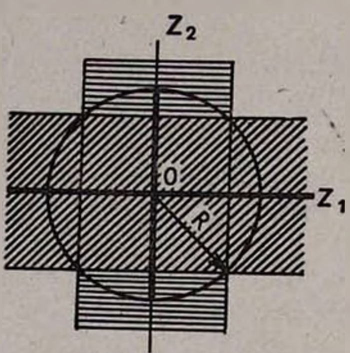


Fig. 1.

L'énoncé suivant montre, que le polynôme irréductible $P$ de degré $q > 0$ étant donnè, pour tout $R$ tel, que $W_P \cap B(O, R) \neq \varnothing$, la $P$—jauge de $B(O, R)$ vérifie

$$\frac{\delta_{R,P}}{R} \geqslant \chi(p, q) > 0,$$

où $\chi$ ne dépend que de la dimension de l'espace et le degré du polynôme.

3.2. Proposition. *Soit* $P$ *un polynôme irréductible de degré* $q > 0$. *On a*

$$\frac{\delta_{R,P}}{R} \geqslant \chi(p, q) > \frac{1}{\sqrt{c_{2p}\, q}} \left(\frac{\sqrt{c_{2p}\, q}}{1 + \sqrt{c_{2p}\, q}}\right)^{p-1}$$

*où* $\chi$ *est la racine positive de l'équation*

$$x(1 + x)^{p-1} - \frac{1}{\sqrt{c_{2p}\, q}} = 0,$$

*et* $C_{2p} > 0$ *une constante numérique ne dépendant pas de* $q$.

La proposition rèsulte des énoncés suivants.

Lemme 1. *Soit* $E$ *un ensemble mesurable* (Lebesgue) *de* $R^p$ *recouvert par une famille de boules ouvertes* $(B_j)_{j \in J}$ *telle que*

$$\operatorname{Sup}_{j \in J} |B_j| < \infty \quad (\textit{avec } |B_j| = \mathrm{Vol}\, B_j).$$

*On peut extraire de cette famille une suite* (finie ou infinie) *de boules* $B_{k_j}$ *deux à deux disjointes et telle que*

$$|E| \leqslant c \sum_k |B_{k_j}| \quad (|E| = \mathrm{Mes}\ E;\ c_p = 5^p \text{ convient}).$$

Pour la démonstration de ce lemme moins subtil que le théorème de recouvrement de Vitali, on renvoie á E. Stein [8].

L'énoncé suivant moins raffinè qu'un résultat de P. Lelong [5] est néanmoins suffisant pour la suite:

Lemme 2. *Soient $F$ une fonction holomorphe* (non constante) *dans un domaine $D$ de $C^p$ ayant des zéros, et $D_1 \subset D$ un ouvert tel que*

$$0 < \mu_F(D_1) < \infty \quad \text{(cf. 2.1)}.$$

*Soient $W_1$ une partie non vide de $W_F = \{z \in C^p \mid F(z) = 0\}$ et $\rho > 0$ tel que*

$$\Omega_\rho = \bigcup_{z \in W_1 \subset W_F} B(z, \rho) \subset D_1,$$

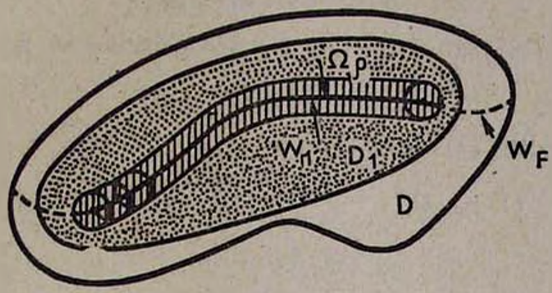


Fig. 2.

*alors on a*

$$|\Omega_\rho| \leqslant c_{2p} \frac{\pi\rho^2}{p} \sigma(D_1)$$

*avec* $\sigma(D_1) = \omega_{2p-2}(1)\, \mu_F(D_1)$ *et* $|\Omega_\rho| =$ *mesure de Lebesgue de* $\Omega_\rho$. Fig. 2).

Démonstration. Soit $(K_m)_{m \geq 1}$ une suite exhaustive de compacts de réunion $\Omega_\rho \cdot K_m$ est couvert par une suite finie de boules figurant dans la définition de $\Omega_\rho$. D'après le lemme 1 il existe une suite finie de boules extraites

$$B_1(\xi^1, \rho), \cdots, B_{n_m}(\xi^n, \rho) \quad (\xi^j \in W_1 \ j = 1, \cdots, n)$$

deux à deux disjointes et telles que

$$|K_m| \leqslant c_{2p} \sum_{k=1}^{n(m)} |B_k|.$$

Les $B_k$ étant centrées sur $W_1$, d'aprés l'inégalité (2) de § 2 on a:

$$\sigma(\xi^k, \rho) \geqslant V_{2p-2}(1)\, \rho^{2p-2} \quad (k=1, \cdots, n(m)),$$

$$\rho^2 \sigma(\xi^k, \rho) \geqslant V_{2p-2}(1)\, \rho^{2p} = \frac{V_{2p-2}(1)}{V_{2p}(1)} |B_k|,$$

or $V_{2p}(1) = \frac{\pi^p}{p!}$, $\frac{V_{2p-2}(1)}{V_{2p}(1)} = \frac{p}{\pi}$. Donc pour tout $m \geqslant 1$,

$$|B_k| \leqslant \frac{\pi}{p} \rho^2 \sigma(\xi^k, \rho),$$

$$|K_m| \leqslant c_{2p} \cdot \frac{\pi}{p} \rho^2 \sum_{k=1}^{n(m)} \sigma(\xi^k, \rho) \leqslant c_{2p} \frac{\pi}{p} \rho^2 \sigma(D_1).$$

Le second membre étant indépendant de $m$ d'où le résultat:

$$|\Omega_\rho| \leqslant c_{2p} \frac{\pi}{p} \rho^2 \sigma(D_1).$$

Démonstration de la proposition 3.2.— Considérons la boule $B(O, R)$ avec

$$B(O, R) \cap W_P \neq \varnothing.$$

Soit $\delta_{R,P}$ la $P$—jauge de $B(O, R)$. Dans le lemme 2 choisissons

$$D_1 = B(O, R + \delta_{R,Q}).$$

D'aprés l'inégalitè (1) de § 2 on a:

$$\sigma(D_1) = \omega_{2p-2}(1)\, \mu_p(D_1) = \frac{\omega_{2p-2}(1)}{2p-2} (R + \delta_{R,P})^{2p-2}\, \nu_p(O, R + \delta_{R,P}) \leqslant$$

$$\leqslant V_{2p-2}(1)\, (R + \delta_{R,P})^{2p-2}\, q,$$

et

$$V_{2p}(1)\, R^{2p} \leqslant c_{2p} \frac{\pi}{p} V_{2p-2}(1)\, \delta^2_{R,P}\, R + \delta_{R,P})^{2p-2}\, q, \tag{3}$$

or $\frac{\pi}{p} \cdot V_{2p-2}(1) = V_{2p}(1)$. Donc en posant $x = \frac{\delta_{R,P}}{R}$, (3) s'ècrit

$$x(1+x)^{p-1} - \frac{1}{\sqrt{c_{2p}\, q}} \geqslant 0. \tag{4}$$

L'application $l: x \to x(1+x)^{p-1}$ de $R_+ \to R_+$ étant convexe croissante on en déduit la proposition 3.2. (Fig. 3).

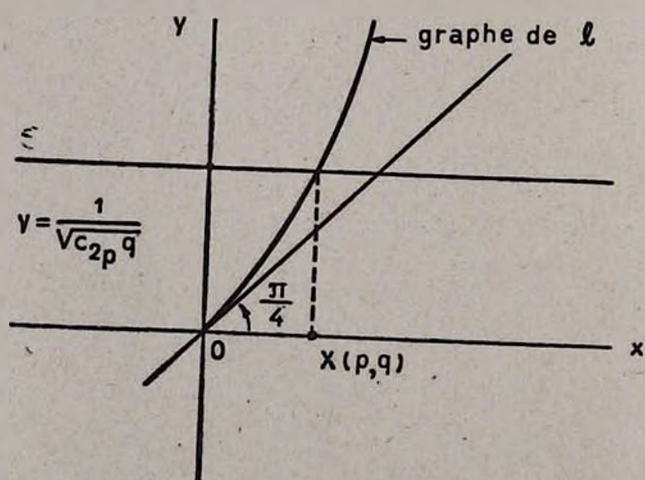


Fig. 3.

3.3. Corollaire. *Soit P un polynôme non constant. Pour toute fonction continue* $r \to \varphi(r)$ *de* $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *avec* $\varphi(r)$ *décroissante vers zéro et* $r\varphi(r)$ *croissante quand* $r \to \infty$, *le complémentaire de l'ensemble*

$$\Omega_\varphi = \{z \in C^p \mid d(z, W_p) \leqslant \varphi(\|z\|)\,\|z\|\}$$

*où* $d(z, W_P)$ *désigne la distance de z à* $W_P = \{z \in C^p \mid P(z) = 0\}$ *est un ouvert non borné de* $C^p$ *avec*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{|\Omega_\varphi \cap B(O, R)|}{\varphi(R)\,|B(O, R)|} = 0. \tag{4}$$

(Fig. 4)

Démonstration: $d(z, W_P)$ étant continue $\Omega_\varphi$ est fermé, donc $\Omega_\varphi^c$ est ouvert, il suffit pour conclure d'établir l'éqalité (4).

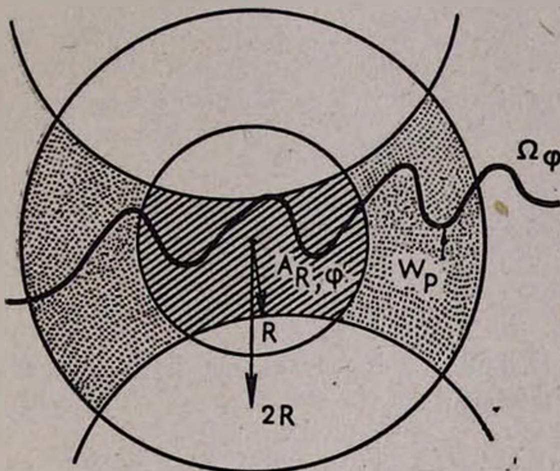


Fig. 4.

Soit $A_{R,\varphi} = \Omega_\varphi \cap \overline{B(O, R)}$. Si $z \in A_{R,\varphi}$ on a $d(z, W_P) \leqslant \varphi(\|z\|)\,\|z\| \leqslant \varphi(R)\,R$, puisque $\varphi(r)\,r$ est croissante. La réunion $\Omega_\rho$ des boules de rayon $\rho = \varphi(R)\,R$ et centrées sur $W_P \cap B(O, 2R)$ contient $A_{R,\varphi}$ pour $R$ assez grand. D'aprés le lemme 2 on a:

$$|A_{R,\varphi}| \leqslant |\Omega_\rho| \leqslant k\,\rho^2 (3R)^{2p-2} = k'\,\varphi^2(R)\,R^{2p},$$

$k$ et $k'$ étant des constantes indépendantes de $R$. D'où le résultat.

## § 4. Minoration d'une fonction entiere d'ordre <1 hors d'un voisinage de ses zeros

4.1. Appelons $\sigma$-boules fermées (resp. ouvertes) une suite $(B_n)_{n>1} = (B(\xi_n, r_n))_{n>1}$ de boules fermées (resp. ouvertes) portées par $C^p - \{O\}$ avec $\sum\limits_{n>1} \Omega_n < \infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|\xi_n\| = \infty$ où $\Omega_n$ est l'angle solide vu de O de $B_n$ et $\xi_n$ le centre de $B_n$.

Il est aisé de constater que dans une $\sigma$-boule fermée, il existe au moins un couple $(B_n, B_{n+1})$ disjointes (il existe donc une infinité de tels couples).

En effet, supposons le contraire; dans ce cas toute sphére $S(O, R)$ $r \geqslant \|\xi_1\| - r_1 > 0$ a une intersection non vide avec $A = \bigcup_{n>1} B_n$. Donc l'ensemble

$$\{r > 0 \mid S(O, R) \cap A \neq \varnothing\}$$

est un intervalle non borné $I$ de $R$ et sa mesure logarithmique $m_I = \int_I^\infty \frac{dt}{t} = \infty$. Or, si $d_n = \|\xi_n\|$, on a

$$I \subset \bigcup_{n>1} [d_n - r_n, d_n + r_n] = U$$

donc

$$m_I \leqslant w_U \leqslant \sum_{n>1} \int_{d_n - r_n}^{d_n + r_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n>1} \text{Log}\,\frac{d_n + r_n}{d_n - r_n}. \tag{5}$$

D'autre part

$$\Omega_n = k_p \int_0^{\text{Arc}\sin\frac{r_n}{d_n}} \sin^{2p-2}\theta d\theta$$

où $k_p$ est une constante ne dépendant que de la dimension de l'espace.

On vérifie aisément que

$$\left(\sum_{n>1} \Omega_n < +\infty\right) \iff \left(\sum_{n>1} \frac{r_n}{d_n} < \infty\right)$$

et que la série du second membre de (5) converge $\Big($en effet, $\text{Log} \times \times \frac{d_n + r_n}{d_n - r_n} < 3\frac{r_n}{d_n}$ si $\frac{r_n}{d_n} < \frac{1}{2}\Big)$; d'où une contradiction. Il en résulte:

4.2. Proposition. *Si $F(z_1, \cdots, z_n)$ est une fonction entiére, l'ensemble $W_F$, de ses zéros* (supposé non vide) *ne peut être couvert par une $\sigma$-boules fermées* (resp. ouvertes).,

4.3. Une inegalite. *Soient $F$ une fonction entiére (non constante) d'ordre $<1$, $F(O)=1$, $W_F$ l'ensemble des zéros de $F$, $B(O, R)$ la boule ouverte de centre $O$ et de rayon $R>0$ et $W_{R,F} = B(v, R) \cap W_F \neq \varnothing$. Soit $1 < \tau < 2$ un nombre tel que la rèunion $E$ des boules fermées de rayon $\rho = (\tau - 1)R$ et centrées sur $W_{\tau R, F}$ ne couvre pas $B(O, R)$. Alors pour $\|z\| \leqslant R$ et hors de $E$ on a:*

$$\text{Log}\,|F(z_1, \cdots, z_n)| > \int_0^{\tau R} \frac{\nu_F(t)}{t} dt - \frac{c(\tau)}{(\tau - 1)^{2p}} \tau R \int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2} dt +$$

$$+ \left[ \frac{1}{2p-2} + \frac{(\tau R)^{2p-2} \|z\|}{(\tau R - \|z\|)^{2p-1}} \right] \nu_F(\tau R)$$

avec $c(\tau) = \frac{1}{2p-2} (\tau - 1)^2 \tau^{2p-2} + (2p-1)\tau^{2p}$; $\lim\limits_{\tau \to 1} c(\tau) = 2p-1$, et

$$\frac{|E \cap B(O, R)|}{|B(O, R)|} \leqslant c_{2p} \tau^{2p-2} (\tau - 1)^2 |\nu_F(\tau R).$$

Démonstration: La représentation 2.2 de § 2 donne:

$$\mathrm{Log}\, |F(z)| = \int_{C^p} d\mu_F \left[ \frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{\|z-a\|^{2p-2}} \right] =$$

$$= \int_{\|a\| < \tau R} d\mu_F [\cdots] + \int_{\|a\| > \tau R} d\mu_F [\cdots] = I_1 + I_2.$$

1. Minoration de $I_1$.

Pour $\|z\| \leqslant R$ et hors de $E$ on a $\|a-z\| > \rho = (\tau - 1) R$ et

$$I_1 \geqslant \int_{\|a\| < \tau R} d\mu_F(a) \left[ \frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{\rho^{2p-2}} \right] =$$

$$= \int_{\|a\| < \tau R} \frac{d\mu_F(a)}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{\mu_F(\tau R)}{\rho^{2p-2}};$$

une intégration par parties donne:

$$\int_{\|a\| < \tau R} \frac{d\mu_F(a)}{\|a\|^{2p-2}} = \left[ \frac{\mu_F(t)}{t^{2p-2}} \right]_0^{\tau R} + (2p-2) \int_0^{\tau R} \frac{\mu_F(t)}{t^{2p-1}}\, dt.$$

$\mu_F(t)$ étant nulle au voisinage de $t=0$ et $\mu_F(t) = \frac{1}{2p-2} t^{2p-2} \nu_F(t)$, on obtient

$$\int_{\|a\| < \tau R} \frac{d\mu_F(a)}{\|a\|^{2p-2}} = \frac{1}{2p-1} \nu_F(\tau R) + \int_0^{\tau R} \frac{\nu_F(t)}{t}\, dt,$$

$$I_1 > \frac{1}{2p-2} \nu_F(\tau R) + \int_0^{\tau R} \frac{\nu_F(t)}{t}\, dt - \frac{1}{2p-2} \left( \frac{\tau}{\tau - 1} \right)^{2p-2} \nu_F(\tau R) \tag{6}$$

or

$$R \int_R^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2}\, dt \geqslant R\, \nu_F(R) \int_R^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \tau_F(R), \tag{7}$$

donc d'après (6) et (7):

$$I_1 \geqslant \int_0^{\tau R} \frac{\nu_F(t)}{t} dt - \frac{1}{2p-2}\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2p-2} \tau R \int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2}\, dt + \frac{1}{2p-2}\, \nu_F(\tau R). \quad (8)$$

(Remarquer que l'hypothèse $F(O)=1$ entraîne, que la première intégrale figurant dans le second membre de (8) est égale à $\lambda$ (Log $|F|$, O, $\tau R$) et que la dernière intégrale est convergente puisque $F$ étant d'ordre $\rho<1$ on a si $\rho+\varepsilon<1$, $\sup\limits_{\|z\|<r} \operatorname{Log} |F(z)| \leqslant A r^{\rho+\varepsilon}$ (pour $r > r_0(\varepsilon)$, $A$=cte

et

$\nu_F(r) \leqslant \lambda(\operatorname{Log}|F|, O, er) - \lambda(\operatorname{Log}|F|, O, r) \leqslant \lambda(\operatorname{Log}|F|, O, er) \leqslant A' r^{\rho+\varepsilon}$)

2. Minoration de $I_2$.

Pour $\|a\| \geqslant \tau R$, $r=\|z\| \leqslant R$, $z \in E$, on a $\|a-z\| \geqslant \|a\| - \|z\|$ et

$$\frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{\|a-z\|^{2p-2}} \geqslant \frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{(\|a\|-r)^{2p-2}}$$

Posons $f(r) = (\|a\| - r)^{2-2p}$. Comme

$$f(r) - f(o) = r \frac{\partial f}{\partial r}(\theta r) = -r(2-2p)(\|a\| - \theta \cdot r)^{1-2p} \quad o<\theta<1$$

$$f(r) - f(o) \leqslant \frac{(2p-2)\, r}{(\|a\|-r)^{2p-1}}$$

d'où

$$\frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{\|a-z\|^{2p-2}} = f(0) - f(r) \geqslant -\frac{(2p-2)\, r}{(\|a\|-r)^{2p-1}}$$

$$I_2 > -(2p-2)\, r \int_{\|a\| > \tau R} \frac{d\mu_F(a)}{(\|a\|-r)^{2p-1}}$$

et grâce à une intégration par parties:

$$I_2 > -(2p-2)\, r \left[\left(\frac{\mu_F(t)}{(t-r)^{2p-1}}\right)_{\tau R}^{\infty} + (2p-1)\int_{\tau R}^{\infty} \frac{\mu_F(t)}{(t-r)^{2p}}\, dt\right] =$$

$$= -r\left[\left(\frac{t^{2p-2}\, \nu_F(t)}{(t-r)^{2p-1}}\right)_{\tau R}^{\infty} + (2p-1)\int_{\tau R}^{\infty} \frac{t^{2p-2}\, \nu_F(t)}{(t-r)^{2p}}\, dt\right] =$$

$$= -r\left[-\nu_F(\tau R)(\tau R)^{-1}\left(1-\frac{r}{\tau R}\right)^{1-2p} + (2p-1)\int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2}\left(1-\frac{r}{t}\right)^{-2p} dt\right]$$

$$I_2 > r\, \nu_F(\tau R)(\tau R)^{-1}\left(1-\frac{r}{\tau R}\right)^{1-2p} - (2p-1)\, r\left(1-\frac{r}{\tau R}\right)^{-2p}\int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2}\, dt \quad (9)$$

et en rappelant que $r < R$,

$$I_2 \geqslant -(2p-1)\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2p}\tau R\int_{\tau R}^{\infty}\frac{\nu_F(t)}{t^2}\,dt + r\nu_F(\tau R)(\tau R)^{-1}\left(1-\frac{r}{\tau R}\right)^{1-2p}.$$

Finalement pour $\|z\| = r \leqslant R$, $z \overline{\in} E$, on obtient

$$\text{Log}\,|F(z)| \geqslant I_1 + I_2 \geqslant \int_0^{\tau R}\frac{\nu_F(t)}{t}\,dt - \left[\frac{1}{2p-2}\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2p-2} + \right.$$

$$\left. + (2p-1)\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2p}\right]\tau R\int_{\tau R}^{\infty}\frac{\nu_F(t)}{t^2}\,dt + \left[\frac{1}{2p-2} + \frac{(\tau R)^{2p-2}\|z\|}{(\tau R - \|z\|)^{2p-1}}\right]\nu_F(\tau R).$$

Enfin, d'après le lemme 2 où $D_1$ est la boule de centre O et de rayon $R + (\tau - 1)\ R = \tau R$,

$$\frac{|E \cap B(O, R)|}{|B(O, R)|} \leqslant c_{2p}(\tau - 1)^2\ \tau^{2p-2}\ \nu_F(\tau R).$$

4.4. Theoreme. *Soient $F$ une fonction entiére* (non constante) *d'ordre nul; $F(0) = 1$, $W_F$ l'ensemble des zéros de $F$, $B(O, R)$ la boule ouverte de centre O et de rayon $R > 0$ et $W_{R,F} = W_F \cap B(O, R) \neq \varnothing$. Soit $1 < \tau < 2$ un nombre tel que la réunion $E$ des boules fermées de rayon $\rho = (\tau - 1)\ R$ et centrées sur $W_{\tau R, F}$ ne couvre pas $B(O, R)$. Alors pour $\|z\| \leqslant R$ et hors de $E$ on a:*

$$\text{Log}\,|F(z_1, \cdots, z_p)| \geqslant M(R; F) - \frac{A}{(\tau-1)^{2p}}\,\tau R\int_{\tau R}^{\infty}\frac{\nu_F(t)}{t^2}\,dt,$$

*$A > 0$ est une constante ne dépendant que de la dimension de l'espace et $M(R; F) = \sup\limits_{\|z\| \leqslant R}$* Log $|F(z)|$.

En effet, $F$ étant d'ordre nul, le théorème 2.3 de § 2 s'applique et on $a$:

$$M(R; F) \leqslant M(\tau R, F) \leqslant \int_0^{\tau R}\frac{\nu_F(t)}{t}\,dt + (2p-1)\,\tau R\int_{\tau R}^{\infty}\frac{\nu_F(t)}{t^2}\,dt.$$

D'après l'inégalité 4.3, pour $\|z\| \leqslant R$ et hors de $E$:

$$\text{Log}\,|F(z)| \geqslant M(R; F) - \left[(2p-1) + \frac{c(\tau)}{(\tau-1)^{2p}}\right]\tau R\int_{\tau R}^{\infty}\frac{\nu_F(t)}{t^2}\,dt,$$

d'où l'énoncé 4.4 avec $A = (2p-1) + c(2)$.

4.5. Corollaire. *Pour un polynôme $P$ de degré $q > 0$ on a avec les hypothèses du théorème* 4.4:

$$\text{Log}\,|P(z_1, \cdots, z_p)| \geqslant M(R; P) - \frac{Aq}{(\tau-1)^{2p}},\ \|z\| \leqslant R,\ z \overline{\in} E.$$

*Avec*

$$\frac{|E \cap B(O, R)|}{|B(O, R)|} \leqslant c_{2p} (\tau - 1)^2 \tau^{2p-2} q.$$

En effet dans ce cas $\nu_p(t) \leqslant q$ pour tout $t$ (cf. § 2).

4.6. Theoreme. *Soient $P$ un polynôme* (non constante) $P(O) \neq 0$ *et* $\varphi$: $r \to \varphi(r)$ *de* $R_+ \to R_+$ *une fonction continue vérifiant les conditions suivantes:*

1 — $\varphi(r)$ *tend en décroissant vers zéro.*

2 — $r\varphi(r)$ *est croissante.*

3 — $\lim\limits_{r \to \infty} \varphi^{2p}(r) \operatorname{Log} r = \infty$.

*Alors, on a uniformèment par rapport au vecteur* $\vec{a}$ $(\|\vec{a}\| = 1)$

$$\operatorname{Log} |P(R\vec{a})| \sim M(R;\ P) \quad (R \to \infty, \quad z = R\vec{a} \in C^p - \Omega_\varphi)$$

*où*

$$\Omega_\varphi = \{z \in C^p \mid d(z, W_P) \leqslant \varphi(\|z\|) \|z\|\}.$$

*et*

$$\lim_{R \to \infty} \frac{|\Omega_\varphi \cap B(O, R)|}{\varphi(R) |B(O, R)|} = 0.$$

Démonstration: D'aprés le corollaire 3.3, $C^p - \Omega_\varphi$ est un ouvert non borné. Si $z = R\vec{a} \in C^p - \Omega_\varphi$, $z$ est à l'extérieur de toute boule fermée centrée sur $W_P$ et de rayon $\varphi(R) R$. Le corollaire 4.5 appliqué avec $\tau = 1 + \varphi(R)$ au point $z$ donne

$$M(R;\ P) \geqslant \operatorname{Log} |P(z)| > M(R;\ P) - \frac{Aq}{\varphi^{2p}(R)} \quad (\|z\| = R,\ z \notin \Omega_\varphi)$$

d'où

$$1 \leqslant \frac{\operatorname{Log} |P(z)|}{M(R;\ P)} < 1 - \frac{Aq}{\varphi^{2p}(R)\, M(R;\ P)} \quad (R \geqslant R_0,\ M(R_0 \cdot P) > 0).$$

L'hypothèse 3 entraîne que $\varphi^{2p} M(R, P) \to \infty$ avec $R$. D'où le résultat.

4.7. Corollaire. *Avec les hypothèses et les notations du théorème 4.6 soit $\Lambda_R$ une partie compacte de la sphère $\{z \in C^p \mid \|z\| = R\}$ située dans $C^p - \Omega_\varphi$ on a:*

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\min\limits_{z \in \Lambda_R} \operatorname{Log} |P(z)|}{M(R;\ P)} = 1.$$

4.8. Application aux polynômes hypoelliptiques.

Appelons $\rho$-polynôme hypoelliptique un polynôme $P$ tel que la distance $d(x;\ W_P)$ d'un point $x \in R^p$ à $W_P = \{z \in C^p \mid P(z) = 0\}$ vérifie à partir d'une certaine valeur de $\|x\|$ l'inègalité

$$d(x,\ W_P) > A \|x\|^\rho \quad (A = \text{cte} > 0,\ \|x\| > r_0,\ 0 \notin W_P).$$

5.2. **Proposition.** *Si $P$ est un $\rho$-polynôme hypoelliptique avec $\rho > 1$, on a*

$$\operatorname*{Min}_{\substack{\|x\| = R \\ x \in R^p}} \operatorname{Log} |P(x)| \sim \operatorname*{Max}_{\substack{\|z\| < R \\ z \in C^p}} \operatorname{Log} |P(z)| \quad (R \to \infty).$$

**Démonstration:** Si $\varphi$ vérifie les hypothèses du théorème 4.6, on a pour $\|x\|$ assez grand

$$d(x, W_P) \geqslant A \|x\|^{\rho} > \varphi(\|x\|) \|x\|$$

et avec les notations du théorème 4.6, à partir d'une certaine valeur de $\|x\|$, la sphère $B(O, R) \cap \mathbf{R}^p$ est contenue dans $C^p - \Omega_\varphi$; le corollaire 4.7 s'applique.

**Remarque.** En particulier la proposition 5.2 est valable si les zéros d'un polynôme $P$ ($P(O) \neq 0$) sont portés par le cône

$$c = \left\{ z \in C^p; \frac{|z_1 x_1 + \cdots + z_p x_p|}{\|z\| \, \|x\|} < \cos\theta, \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^p - \{O\} \right\} \times$$

$$\times \left( 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right). \text{ (Fig. 5).}$$

En effet, on a

$$\delta(x; W_P) \geqslant \|x\| \sin\theta.$$

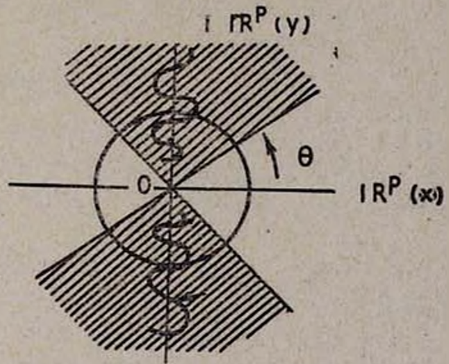


Fig. 5.

Reçu le 31.III.1972

Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. «Գնդերի արտաքսման մեթոդի» որոշ կիրառությունները $C^p$-ում
*(ամփոփում)*

*Աշխատանքում ուսումնասիրվում է մի քանի փոփոխականի բազմանդամների ասիմպտոտիկ վարքը՝ նրանց զրոների որոշակի տեսքի շրջապատերից դուրս։*

*Մեթոդը հիմնված է շատ փոփոխականի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների և որպես պոտենցիալ նրանց ներկայացումների հատկությունների կիրառման վրա։*

В. АВАНЕСЯН. *Некоторые применения „метода исключения шаров"* *в* $C^p$ (резюме)

**В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение полиномов от нескольких переменных вне определенного вида окрестностей их нулей. Метод использует свойства субгармонических функций многих переменных и их представлений в виде потенциалов.**

## BIBLIOGRAPHIE


1. *V. Avanissian.* Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques, Ann. sc. E.N.S., t. 67, 1961.
2. *V. Avanissian.* Fonctions entières de p variables... J. d'Analyse math., vol. IX, 1961/62, Jérusalem.
3. *W. K. Hayman.* Slowly growing integral and subharmonic functions, Comm. Math. Helvetica. vol. 34, 1960.
4. *L. Hormander.* Linear partial differential operators, Springer-Verlag, 1964, pp. 100.
5. *P. Lelong.* Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation, Ann. Sc. E.N.S. t. 62, 1950.
6. *P. Lelong.* Fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques. J. Analyse Math., vol. XII, 1964, Jérusalem.
7. *P. Lelong.* Séminaire d'Eté. Montréal, 1967.
8. *J. E. Stein.* Séminaire d'Orsay, 1966—67.