

С. Н. МАНУКЯН

О КОНСТРУКТИВНЫХ ВСЮДУ ПЛОТНЫХ ПРОСТЫХ ДУГАХ

В этой статье строится пример конструктивной плоской простой дуги, заданной на $0\Delta 1$ и проходящей через все рациональные точки плоскости.

Понятия конструктивного анализа, определенные в работах [1], [2], [3], будут употребляться в том же смысле, как и в указанных статьях. В частности, будут употребляться алгоритмы $\mathcal{E}_l$, $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}^\circ$, $\mathcal{E}^\circ$, определенные такими же схемами, как и в § 1 из [3].

Понятие конструктивной простой дуги, а также другие понятия, связанные с конструктивными кривыми, и не определенные особо, понимаются так же, как в [3] и [4].

Отметим, что понятие прямоугольника определяется различным образом в [3] и [4]; в настоящей статье оно будет пониматься в смысле соответствующего определения из [3] (см. [3], стр. 80).

Основной целью дальнейших рассмотрений является доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Осуществима конструктивная простая дуга F , заданная на $0\Delta 1$ и такая, что для всякой рациональной точки asb можно построить FR -число $t \in 0\Delta 1$, удовлетворяющее условию $F(t) = asb$.*

Все рассматриваемые ниже конструктивные объекты являются словами в алфавите $\{0, |, \setminus, -, \diamond, \Delta, \nabla, *, \mathfrak{z}, \tau\}$ обозначаемом, как и в [3], через $\mathcal{U}$.

Посредством $\langle P \rangle$, где P — запись некоторого алгоритма в стандартном расширении алфавита $\mathcal{U}$, будем, как обычно, обозначать тот алгоритм в стандартном расширении алфавита $\mathcal{U}$, записью которого является слово P .

Вначале мы введем некоторые вспомогательные понятия и докажем несколько лемм. Отметим, что леммы 1—4 являются модификациями некоторых утверждений из [3] и [4].

Пусть K — кривая, заданная на $a\Delta\beta$; тогда точку $K(a)$ будем называть *начальной вершиной* кривой K , а точку $K(\beta)$ — *заключительной вершиной* кривой K .

Результатом склеивания кривых F и G , заданных на сегментах соответственно $x\Delta y$ и $y\Delta z$ и таких, что $F(y) = G(y)$, мы будем называть кривую H , заданную на сегменте $x\Delta z$ и такую, что при любом $t \in x\Delta z$

$$H(t) = \begin{cases} F(t), & \text{если } t \in x\Delta y, \\ G(t), & \text{если } t \in y\Delta z. \end{cases}$$

Исходя из кривых F и G , удовлетворяющих указанным условиям, результат их склеивания строится очевидным образом на основании леммы о склеивании конструктивных функций (см., например, лемму 2.13 из [3]).

Будем говорить, что кривая L содержится в прямоугольнике Q , если всякая точка, лежащая на L , принадлежит Q .

Верхней стороной и нижней стороной прямоугольника $x_1y_1u_2v$ будем называть отрезки, соответственно, $x_1y_1u_2v$ и $x_1v_2u_1$.

Будем говорить, что цепочка отрезков

$$x_1y_1\Delta x_2y_2 * x_2y_2\Delta x_3y_3 * \dots * x_{n-1}y_{n-1}\Delta x_ny_n$$

соединяет точки u_1v_1 и u_2v_2 , если

$$x_1 = u_1 \& y_1 = v_1 \& x_n = u_2 \& y_n = v_2.$$

Границей прямоугольника $x_1y_1u_2v$ будем называть кривую

$$L_{\partial Q} (x_1y_1u_2v * y_1v_2u_1 * u_1v_2\Delta x_1v * x_1v_2\Delta x_1y_1).$$

Лемма 1. Пусть Q —прямоугольная сетка квадратов. Пусть T —связное множество квадратов сетки Q , $Q_i \in T$ и R есть множество квадратов сетки Q , не связанных с Q_i в sT . Тогда множество квадратов TUR правильно связано, и всякий граничный отрезок множества TUR является стороной некоторого квадрата, принадлежащего T .

Доказательство получается посредством таких же рассуждений, как в статье [3] (ср. [3], 3-й абзац на стр. 114 и 4-й абзац на стр. 115).

Лемма 2. Пусть K —равномерно непрерывная кривая, заданная на $\alpha\beta$. Тогда для всяких положительных рациональных чисел η и ε осуществимо положительное рациональное число δ такое, что для всякой точки $x\gamma$, η -удаленной от K и для всякой угловой функции φ кривой K относительно точки $x\gamma$ оказывается

$$\forall uv (u, v \in \alpha\beta \& |u - v| < \delta \supset |\varphi(u) - \varphi(v)| < \varepsilon).$$

Доказательство по существу проведено при установлении теоремы 4.1 из [3]. В самом деле: для построения требуемого δ достаточно найти натуральные числа m и k такие, что $2^{-m} < \eta$, $2^{-k} < \varepsilon$, затем построить FR -число z так, как это делается в 1-м и 2-м абзацах на стр. 68 из [3], после чего в случае $z > 2^{-(m+k)}$ строятся натуральные числа l и N , удовлетворяющие условиям, указанным на стр. 68 из [3], и в качестве δ берется число 2^{-n_1} , где n_1 удовлетворяет условию $2^{-n_1} < \frac{\beta - \alpha}{N}$ и условиям (М) на стр. 71 из [3]; в случае

$z < 2^{-(m+2)}$ в качестве δ берется число 2^{-n_1} , где n_1 удовлетворяет условиям, указанным на стр. 74 из [3].

Лемма 3. Пусть K — равномерно непрерывная замкнутая континентная кривая, заданная на $\Delta\beta$, и пусть η есть некоторое положительное рациональное число. Тогда можно построить прямоугольную сетку квадратов Q , удовлетворяющую следующему условию: для всяких двух точек $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$, η -удаленных от кривой K и одноименных относительно нее, осуществима цепь квадратов $R_1 * R_2 * \dots * R$, сетки Q такая, что линейный образ цепочки отрезков

$$x_1 y_1 \nabla \xi_1 * \xi_1 \nabla \xi_2 * \xi_2 \nabla \xi_3 * \dots * \xi_{s-1} \nabla \xi_s * \xi_s \nabla x_2 y_2$$

(где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ суть центры квадратов $R_1, R_2, \dots, R_s$) $2h$ -удален от кривой K , где h — шаг сетки Q .

Доказательство получается посредством незначительной модификации доказательства теоремы 1 из [3], а именно:

(1) Так же, как в пункте 1 из доказательства теоремы 1 из [3], убеждаемся в том, что достаточно рассмотреть случай невырожденного сегмента $\Delta\beta$. Действительно, обозначив через α' и α'' точные нижние границы и через β' и β'' точные верхние границы функций, соответственно, K^c и K^η на $\Delta\beta$, согласно теореме 1.3 из [2] имеем:

$$\max(\beta' - \alpha', \beta'' - \alpha'') < \frac{\eta}{8} \vee \max(\beta' - \alpha', \beta'' - \alpha'') > \frac{\eta}{16}.$$

Если $\max(\beta' - \alpha', \beta'' - \alpha'') < \frac{\eta}{8}$, то в роли сетки Q , как легко видеть, можно взять сетку с начальной вершиной uv , где

$$u = -\frac{\eta}{4} + D^-(\alpha' * \mu k \left[2^{-k} < \frac{\eta}{8} \right]),$$

$$v = -\frac{\eta}{4} + D^-(\alpha'' * \mu k \left[2^{-k} < \frac{\eta}{8} \right]),$$

с шагом $\frac{\eta}{12}$, с размерами 9 и 9 (в самом деле, легко проверить, что всякая точка, лежащая на кривой K , принадлежит в этом случае квадрату $\left(u + \frac{\eta}{4}\right) \nabla \left(v + \frac{\eta}{4}\right) \tau \left(u + \frac{\eta}{2}\right) \nabla \left(v + \frac{\eta}{2}\right)$, и никакая точка, η -удаленная от K , не может принадлежать квадрату $u \Delta v \tau \left(u + \frac{3}{4} \eta\right) \Delta \left(v + \frac{3}{4} \eta\right)$; отсюда легко усматривается, что требуемая в формулировке леммы цепь квадратов может быть всегда составлена из гра-

ничных квадратов сетки Q). Если же $\max(\beta' - \alpha', \beta'' - \alpha'') > \frac{\eta}{16}$, то $\beta - \alpha > 0$.

(2). В случае $\beta - \alpha > 0$, пользуясь леммой 2 и доказательством леммы 2.12 из [3], строим положительное рациональное число ε_0 такое, что $\varepsilon_0 < \frac{\beta - \alpha}{2}$ и для всякой точки $x\tau y$, τ -удаленной от кривой K , для любой угловой функции φ кривой K относительно точки $x\tau y$ и для любой всюду определенной функции $\bar{\varphi}$, полученной исходя из функции φ на основании леммы 2.12 из [3], оказывается

$$\forall uv \left(|u - v| < \varepsilon_0 \Rightarrow |\bar{\varphi}(u) - \bar{\varphi}(v)| < \frac{\pi}{2} \right).$$

(3). Дословно так же как на стр. 109 из [3] строятся положительное рациональное число δ_0 и натуральные числа N_0 и H_0 , такие что $\delta_0 < \frac{\eta}{2}$,

$$\forall uv (u, v \in \alpha\Delta\beta\&\rho(K(u), K(v)) < \delta_0 \Rightarrow \rho_{\alpha\Delta\beta}(u, v) < \varepsilon_0),$$

$$\forall t (t \in \alpha\Delta\beta \Rightarrow |K^{\varepsilon}(t)| \leq N_0),$$

$$\forall t (t \in \alpha\Delta\beta \Rightarrow |K^{\eta}(t)| \leq N_0),$$

$$\frac{1}{H_0} < \frac{\delta_0}{9}.$$

Далее строится сетка Q' с начальной вершиной $\left(-N_0 - \frac{3}{H_0}\right)$ и $\sigma\left(-N_0 - \frac{3}{H_0}\right)$, шагом $\frac{1}{H_0}$ и размерами $2 \cdot H_0 \cdot N_0 + 6$, $2 \cdot H_0 \cdot N_0 + 6$, и сетка Q с той же начальной вершиной, что и Q' , с шагом $\frac{1}{5H_0}$ и размерами $10 \cdot H_0 \cdot N_0 + 30$, $10 \cdot H_0 \cdot N_0 + 30$ (сетка Q является, так сказать, „пятикратным измельчением“ сетки Q'). Мы покажем, что сетка Q удовлетворяет условию, указанному в формулировке леммы.

В самом деле, пусть $x_1\tau y_1$ и $x_2\tau y_2$ — произвольные фиксированные точки, τ -удаленные от кривой K . Тогда, как легко видеть, можно построить квадраты U_1 и U_2 сетки Q' с центрами соответственно, $\bar{x}_1\sigma\bar{y}_1$ и $\bar{x}_2\sigma\bar{y}_2$, такие, что линейные образы отрезков $x_1\tau y_1 \nabla \bar{x}_1\sigma\bar{y}_1$ и $\bar{x}_2\sigma\bar{y}_2 \nabla x_2\sigma y_2$ $\frac{2}{H_0}$ -удалены* от кривой K .

* Метод построения можно пояснить следующим образом. Согласно теореме 1.3 из [2], имеем: $\max(|x_1|, |y_1|) < N_0 + \frac{5}{H_0} \vee \max(|x_1|, |y_1|) > N_0 + \frac{4}{H_0}$. Если $\max(|x_1|, |y_1|) < N_0 + \frac{5}{H_0}$, то можно построить квадрат сетки Q' с центром в некоторой

Далее, проводя для точек x_1, y_1 и x_2, y_2 и для сетки Q' все те рассмотрения, которые указаны* на стр. 109—126 статьи [3] для точек, обозначенных там через x_1, y_1 и x_2, y_2 , и для сетки, обозначенной там через Q , мы получим цепь квадратов $R'_1 * R'_2 * \dots * R'_s$ сетки Q' , такую, что центр квадрата R'_1 есть $\bar{x}_1, \bar{y}_1$, центр квадрата R'_s есть $\bar{x}_s, \bar{y}_s$, и никакая точка, лежащая на кривой K , не может принадлежать замыканию какого-либо из квадратов $R'_1, R'_2, \dots, R'_s$. Обозначим центры квадратов $R'_1, R'_2, \dots, R'_s$ соответственно через $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_s, v_s$.

Построим, наконец, цепь квадратов $R_1, R_2, \dots, R_{5s-4}$ сетки Q , такую, что каждый квадрат вида R_{5i-5+j} при $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq 5$ имеет своим центром точку $\left(u_i + \frac{u_{i+1}-u_i}{5} \cdot (j-1)\right) \sigma \left(v_i + \frac{v_{i+1}-v_i}{5} \times \right. \\ \left. \times (j-1)\right)$ и квадрат R_{5s-4} имеет своим центром точку u_s, v_s . Легко видеть, что цепь квадратов $R_1 * R_2 * \dots * R_{5s-4}$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Лемма доказана.

Замечание. Сетки Q' и Q были построены в доказательстве леммы 3, исходя из натуральных чисел H_0 и N_0 ; при этом если бы вместо первоначально выбранных H_0 и N_0 мы бы взяли в их роли какие-либо большие числа, то все утверждения, устанавливаемые по ходу доказательства для сеток Q' и Q , остались бы в силе. В частности, сетка Q снова удовлетворяла бы всем условиям, указанным в формулировке леммы. Поэтому, если задано несколько кривых $K_1, K_2, \dots, K_n$ и соответствующие $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ так, что для каждой пары (K_i, η_i) выполнены условия леммы, то можно построить сетку Q , удовлетворяющую требуемым условиям одновременно для всех пар (K_i, η_i) .

Лемма 4. Пусть K — равномерно непрерывная континентная простая дуга, заданная на $\alpha\Delta^3$, и пусть η есть некоторое поло-

точке $\bar{x}_1 \sigma \bar{y}_1$ такой, что $\rho(x_1, y_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1) < \frac{3}{H_0}$; этот квадрат и будет требуемым квадратом U_1 . Если же $\max(|x_1|, |y_1|) > N_0 + \frac{4}{H_0}$, то $x_1 > N_0 + \frac{3}{H_0}$ $Vx_1 < -\left(N_0 + \frac{3}{H_0}\right)$ $Vy_1 > N_0 + \frac{3}{H_0}$ $Vy_1 < -\left(N_0 + \frac{3}{H_0}\right)$; в качестве квадрата U_1 в случаях $x_1 > N_0 + \frac{3}{H_0}$, $x_1 < -\left(N_0 + \frac{3}{H_0}\right)$, $y_1 > N_0 + \frac{3}{H_0}$, $y_1 < -\left(N_0 + \frac{3}{H_0}\right)$ может быть взят квадрат, соответственно, $Q'_{2 \cdot H_0 \cdot N_0 + 5, 0}$, $Q'_{0, 2 \cdot H_0 \cdot N_0 + 5}$, $Q'_{0, 0}$. Построение квадрата U_2 производится дословно таким же образом.

* За исключением построения квадратов J_1 и J_2 на стр. 110; в модифицированном варианте доказательства в роли J_1 непосредственно берется U_1 , а в роли J_2 берется U_2 .

жительное рациональное число. Тогда можно построить прямоугольную сетку квадратов Q , удовлетворяющую следующей условию: для всяких двух точек $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$, h -удаленных от осуществима цепь квадратов $R_1 * R_2 * \dots * R_s$ сетки Q , такая что линейный образ цепочки отрезков

$$x_1 y_1 \nabla \xi_1 * \xi_1 \nabla \xi_2 * \xi_2 \nabla \xi_3 * \dots * \xi_{s-1} \nabla \xi_s * \xi_s \nabla x_2 y_2$$

(где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ — центры квадратов $R_1, R_2, \dots, R_s$) $2h$ -удален от кривой K , где h — шаг сетки Q .

Доказательство получается посредством такой же модификации доказательства теоремы 2.1 из [4], которая была проведена при установлении предыдущей леммы, исходя из теоремы 1 из [3].

Замечание. Сетка Q , в соответствии с методом доказательства теоремы 2.1 из [4], строится по тому же плану, как и сетка Q предыдущей леммы. Поэтому в отношении леммы 4, как нетрудно убедиться, справедливо такое же утверждение, какое было отмечено выше для леммы 3: если $K_1, K_2, \dots, K_n$ — простые дуги, и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ таковы, что для каждой пары (K_i, η_i) выполняются условия леммы 4, то можно построить сетку Q , удовлетворяющую условиям леммы 4 одновременно для всех пар (K_i, η_i) .

Лемма 5. Пусть имеем несамопересекающиеся попарно пересекающиеся ломаные $P_1, P_2, \dots, P_n$ с рациональными вершинами. Тогда можно построить несамопересекающиеся замкнутые ломаные $L_1, L_2, \dots, L_n$ с рациональными вершинами, не пересекающиеся друг с другом, такие, что всякая точка, лежащая на ломаной P_i (где $1 \leq i \leq n$), является внутренней относительно соответствующей ломаной L_i и внешней относительно всякой ломаной L_j при $i \neq j$, $1 \leq j \leq n$ и, кроме того, всякая точка, лежащая на ломаной L_i (где $1 \leq i \leq n$), является внешней относительно всякой ломаной L_j при $i \neq j$, $1 \leq j \leq n$.

Доказательство. Построим положительное число ρ такое, что всякие точки, лежащие на линейных образах различных ломаных P_i и P_j ($1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$) удалены друг от друга больше, чем ρ . Пользуясь леммой 4 и замечанием к ней, построим прямоугольную сетку Q с шагом, меньшим $\rho/3$, такую, чтобы для всякого i от 1 до n и для всяких точек $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$, $\rho/3$ -удаленных от линейного образа P_i , имела бы цепь квадратов, удовлетворяющая условиям леммы 4 и никакая точка, лежащая на одной из кривых $P_1, P_2, \dots, P_n$, не принадлежала бы никакому краевому квадрату сетки Q . Шаг сетки обозначим через h . Для каждой ломаной P_i ($1 \leq i \leq n$) построим множество квадратов сетки Q , замыканиям которых принадлежит хотя бы одна точка ломаной P_i . Обозначим эти множества через $A_1, A_2, \dots, A_n$. Нетрудно убедиться в том, что все множества A_i попарно не пересекаются и являются связными внутренними множествами квадратов сетки Q причем никакие квадраты, принадлежащие различным множествам A_i и A_j , не являются соседними или полусоседними. Для каж

дого i , где $1 \leq i \leq n$, построим множество $\mathcal{K}_i$ квадратов сетки Q , не принадлежащих A_i и не связных с квадратом Q_{00} в sA_i . Ясно, что $\mathcal{K}_i$ для каждого i ($1 \leq i \leq n$) является внутренним множеством квадратов сетки Q . Построим теперь множества Π_i квадратов сетки Q , являющиеся объединениями множеств A_i и $\mathcal{K}_i$ ($1 \leq i \leq n$) соответственно. Очевидно, что каждое Π_i также является внутренним множеством квадратов сетки Q .

Согласно лемме 1, Π_i является правильно связным множеством квадратов сетки Q . В соответствии с леммой 5.6 из [3] для каждого i от 1 до n построим замкнутую несамопересекающуюся цепочку отрезков R_i , составленную из граничных отрезков множества Π_i , такую, что всякая точка, принадлежащая некоторому открытому квадрату из этого множества, является внутренней относительно кривой $\Lambda_{O_{01}} R_i$, а всякая точка, принадлежащая некоторому открытому квадрату вне этого множества, является внешней относительно $\Lambda_{O_{01}} R_i$. Обозначим через L_i кривую $\Lambda_{O_{01}} R_i$. Докажем, что таким образом построенные ломаные $L_1, L_2, \dots, L_n$ удовлетворяют всем требуемым условиям. Действительно, сначала докажем, что каждая точка кривой P_i ($1 \leq i \leq n$) является внутренней относительно кривой L_i ($1 \leq i \leq n$). Пусть Z — некоторая точка, лежащая на ломаной P_i . Тогда, очевидно, точка Z не может лежать на L_i ; следовательно, она является внутренней или внешней относительно L_i (напомним, что L_i — континентная кривая). Но точка Z не может быть внешней относительно L_i , потому что в случае, когда она принадлежит некоторому открытому квадрату сетки Q , этот квадрат будет принадлежать Π_i , а потому всякая точка, принадлежащая ему — внутренняя относительно L_i ; в случае же, когда точка Z лежит на границе двух квадратов сетки Q , оба этих квадрата принадлежат Π_i , а потому в любой близости от точки Z мы можем построить внутренние точки относительно L_i , и снова Z не может быть внешней точкой относительно L_i . Таким образом, мы доказали, что Z — внутренняя точка относительно L_i .

Теперь докажем, что всякая точка, лежащая на P_i — внешняя относительно всякой ломаной L_j при $i \neq j$ и $1 \leq j \leq n$. Пусть точка Z лежит на P_i и пусть $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$; покажем, что Z — внешняя точка относительно L_j . Действительно, пользуясь теоремой 4.5 из [3], построим точку Z_1 , являющуюся внешней относительно L_j и $\rho/3$ -удаленную от ломаной P_j (в роли Z_1 мы можем взять, например, какую-либо точку, находящуюся вне сетки Q). Так как сетка Q удовлетворяет условиям леммы 4 по отношению к ломаной P_i и числу $\rho/3$, то мы можем построить цепь квадратов $D_1 * D_2 * \dots * D_s$ такую, что линейный образ L цепочки отрезков $Z \nabla \xi_1 * \xi_1 \nabla \xi_2 * \xi_2 \nabla \xi_3 * \dots * \xi_{s-1} \nabla \xi_s * \xi_s \nabla Z_1$ (где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ суть центры квадратов $D_1, D_2, \dots, D_s$), $2h$ -удален от кривой P_j .

Но, согласно лемме 1, все отрезки, из которых составлена цепочка R_j , являются граничными отрезками квадратов из A_j , а пото-

му всякая точка, принадлежащая одному из таких отрезков (следовательно, и всякая точка, лежащая на ломаной L_j) удалена от ломаной P_j на расстояние, не большее, чем $h\sqrt{2}$. Ломаная же L удалена от P_j на расстояние, большее $2h$, следовательно, L не может пересекаться с L_j . Отсюда вытекает, согласно теореме 4.4 из [3], что точки Z и Z_1 одноименны относительно L_j . Таким образом, точка Z является внешней относительно L_j .

Остается показать что всякая точка, лежащая на какой-либо из ломаных L_i , является внешней относительно всякой ломаной L_j при $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$. В самом деле, поскольку ломаные L_i и L_j не пересекаются и, следовательно, удалены друг от друга, то всякая точка, лежащая на L_i , является внешней или внутренней относительно L_j ; если бы хоть одна точка, лежащая на L_i , была бы внутренней относительно L_j , то тогда, в силу теоремы 4.4 из [3], всякая точка, лежащая на L_i была бы внутренней относительно L_j , а тогда, в силу теоремы 2.3 из [4], всякая точка, лежащая на P_i , была бы внутренней относительно L_j , что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ суть несамопересекающиеся попарно не пересекающиеся ломаные с рациональными вершинами, содержащиеся в некотором прямоугольнике Π с рациональными вершинами и удаленные от его границы. Пусть $1 \leq r \leq n$, и точка Z есть заключительная вершина ломаной P_r . Тогда можно построить цепочку отрезков R с рациональными концами, линейный образ которой по сегменту OA_1 есть такая несамопересекающаяся ломаная с рациональными вершинами, которая не пересекается с ломаными $P_1, P_2, \dots, P_n$ ни в одной точке, отличной от Z , и соединяет точку Z с некоторой точкой, лежащей на верхней стороне прямоугольника Π .

Доказательство. Так как ломаные $P_1, P_2, \dots, P_n$ удовлетворяют условиям леммы 5, то, согласно этой лемме, построим замкнутые несамопересекающиеся ломаные $L_1, L_2, \dots, L_n$ с рациональными вершинами, которые не пересекаются друг с другом и таковы, что всякая точка, лежащая на ломаной P_k ($1 \leq k \leq n$), является внутренней относительно L_k и внешней относительно всякой L_j такой, что $k \neq j$ и $1 \leq j \leq n$.

Из способа построения ломаных $L_1, L_2, \dots, L_n$, указанного в лемме 5, легко видеть, что эти ломаные могут быть построены так, чтобы они строго содержались в Π (для этого достаточно соответствующим образом уменьшить шаг сетки, рассматриваемой в лемме 5).

Теперь докажем, что точку Z можно соединить с некоторой точкой Z_1 , лежащей на L_r , посредством некоторой цепочки отрезков S , линейный образ которой не пересекается с ломаными $P_1, P_2, \dots, P_n$ ни в одной точке, отличной от Z . Действительно, пусть δ есть положительное рациональное число, такое что для любых i и j , где $1 \leq i \leq n$,

$1 < j \leq n$ и для любых точек Z_1 и Z_2 , лежащих, соответственно, на P_1 и P_j , оказывается: $\rho(Z_1, Z_2) > \delta$; пусть w есть минимум расстояний точки Z от линейных образов тех сторон ломаной P_r , на которых не лежит сама точка Z ; γ есть рациональное число такое, что $\gamma < \min(\delta, w)$. Построим рациональную точку Z_0 , внутреннюю относительно L_r , удаленную от P_r и такую, что $\rho(Z, Z_0) < \gamma$. Тогда, как легко видеть, линейный образ отрезка $Z\Delta Z_0$ не имеет точек пересечения с ломаной P_r , отличных от Z . Возьмем некоторую точку Z' , лежащую на L_r .

Согласно теореме 2.1 из [4], точки Z_0 и Z' можно соединить ломаной K с рациональными вершинами и рациональным определяющим дроблением, удаленной от P_r и определенной на сегменте $0\Delta 1$ (при этом полагаем, что $K(0) = Z_0$, $K(1) = Z'$). Пользуясь тем, что K и L_r суть ломаные с рациональными вершинами, построим наименьшее $t \in 0\Delta 1$, такое, что $K(t)$ лежит на L_r ; легко видеть, что t есть положительное рациональное число.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ есть определяющее дробление для ломаной K . Построим i , такое что $1 \leq i < m$ и $\xi_i < t < \xi_{i+1}$. Теперь в качестве S возьмем цепочку отрезков

$$Z\Delta K(\xi_1) * K(\xi_1)\Delta K(\xi_2) * \dots * K(\xi_i)\Delta K(t).$$

В качестве точки Z_1 возьмем $K(t)$. Ясно, что цепочка отрезков S удовлетворяет указанным выше условиям.

Через M обозначим прямую $x = \mathfrak{E}_n^{\circ}(Z_1)$. Через Z_2 обозначим точку, лежащую одновременно на ломаной L_r и на прямой M и такую, что ордината ее является максимальной среди всех точек, лежащих одновременно на L_r и на M .

Пусть $t_1 * t_2 * \dots * t_m$ есть определяющее дробление ломаной L_r .

Пусть i и j таковы, что $1 \leq i, j < m$, точки Z_1 и Z_2 лежат на отрезках $L_r(t_i)\Delta L_r(t_{i+1})$ и $L_r(t_j)\Delta L_r(t_{j+1})$ соответственно.

Построим цепочку отрезков E следующим образом:

$$E = \begin{cases} Z_1\Delta L_r(t_{i+1}) * L_r(t_{i+1})\Delta L_r(t_{i+2}) * \dots * L_r(t_j)\Delta Z_2, & \text{при } i < j \\ Z_1\Delta L_r(t_i) * L_r(t_i)\Delta L_r(t_{i-1}) * \dots * L_r(t_{j+1})\Delta Z_2, & \text{при } i > j \\ Z_1\Delta Z_2, & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Пусть $L_{i_1}, L_{i_2}, \dots, L_{i_s}$ (где $s \leq n$) суть те ломаные среди ломаных $L_1, L_2, \dots, L_n$, которые пересекаются с прямой M и все ординаты их точек пересечений больше чем $\mathfrak{E}_n^{\circ}(Z_2)$. Обозначим эти ломаные через $D_1, D_2, \dots, D_s$. Для каждого i от 1 до s обозначим через U_i и V_i точки пересечения прямой M с ломаной D_i , имеющие соответственно, наибольшую и наименьшую ординату. Построим систему натуральных чисел $(i_1, i_2, \dots, i_q)$ таким образом, что $\mathfrak{E}_n^{\circ}(U_{i_1}) \leq \mathfrak{E}_n^{\circ}(V_{i_1}) < \mathfrak{E}_n^{\circ}(U_{i_2}) \leq \mathfrak{E}_n^{\circ}(V_{i_2}) < \dots < \mathfrak{E}_n^{\circ}(U_{i_q}) \leq \mathfrak{E}_n^{\circ}(V_{i_q})$, никакое число вида $\mathfrak{E}_n^{\circ}(U_i)$ или $\mathfrak{E}_n^{\circ}(V_i)$ при $1 \leq i \leq s$ не меньше $\mathfrak{E}_n^{\circ}(U_{i_1})$ и не больше $\mathfrak{E}_n^{\circ}(V_{i_q})$ и не принадлежат ни одному из интервалов

$$\exists_n^+(V_{i_1}) \nabla \exists_n^+(U_{i_1}), \exists_n^+(V_{i_2}) \nabla \exists_n^+(U_{i_2}), \dots, \exists_n^+(V_{i_{q-1}}) \nabla \exists_n^+(U_{i_q}).$$

(Возможность построения такой системы индексов очевидна).

Теперь для каждого j от 1 до q построим рациональное определяющее дробление $t_1^{(j)} * t_2^{(j)} * \dots * t_{h_j}^{(j)}$ ломаной D_{i_j} , построим отрезки $D_{i_j} (t_h^{(j)}) \Delta D_{i_j} (t_{h+1}^{(j)})$ и $D_{i_j} (t_g^{(j)}) \Delta D_{i_j} (t_{g+1}^{(j)})$, на которых лежат точки соответственно U_{i_j} и V_{i_j} и построим цепочку отрезков E_j следующим образом:

$$E_j = \begin{cases} U_{i_j} \Delta D_{i_j} (t_{h+1}^{(j)}) * D_{i_j} (t_{h+1}^{(j)}) \Delta D_{i_j} (t_{h+2}^{(j)}) * \dots * D_{i_j} (t_g^{(j)}) \Delta V_{i_j}, & \text{при } h < g; \\ U_{i_j} \Delta D_{i_j} (t_h^{(j)}) * D_{i_j} (t_h^{(j)}) \Delta D_{i_j} (t_{h-1}^{(j)}) * \dots * D_{i_j} (t_{g+1}^{(j)}) \Delta V_{i_j}, & \text{при } h > g; \\ U_{i_j} \Delta V_{i_j}, & \text{при } h = g. \end{cases}$$

Построим, наконец, цепочку отрезков

$$S * E * Z_2 \Delta U_{i_1} * E_1 * V_{i_1} \Delta U_{i_2} * E_2 * V_{i_2} \Delta U_{i_3} * \dots * E_q * V_{i_q} \Delta P,$$

где P есть точка пересечения верхней стороны прямоугольника Π с прямой M . Затем построим цепочку отрезков R , которая получается из только что построенной цепочки отрезков при помощи удаления из нее всех вырожденных отрезков. Нетрудно убедиться в том, что цепочка R удовлетворяет всем требуемым условиям. В самом деле, из построения очевидно, что линейный образ цепочки S не пересекается ни с одной из ломаных $P_1, P_2, \dots, P_n$ ни в одной точке, отличной от Z ; линейные образы цепочек $E_1, E_2, \dots, E_q$ обладают тем свойством, что каждая точка, лежащая на одном из них, лежит на некоторой ломаной L_i , а потому не может находиться ни на одной из ломаных $P_1, P_2, \dots, P_n$. Наконец, каждая точка, лежащая на одном из отрезков $Z_2 \nabla U_{i_1}, V_{i_1} \nabla U_{i_2}, \dots, V_{i_q} \nabla P$, как легко видеть, является внешней относительно всех ломаных $L_1, L_2, \dots, L_n$ и потому также не может находиться ни на одной из ломаных $P_1, P_2, \dots, P_n$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Согласно [1] построим сингулярное сегментное дизъюнктивное невырожденное точное покрытие A сегмента $0\Delta 1$. Алгоритм A , таким образом, перерабатывает каждое натуральное i в невырожденный рациональный сегмент, содержащийся в $0\Delta 1$, и удовлетворяет следующим условиям: (1) сегменты $A(i)$ и $A(j)$ при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; (2) осуществимы алгоритмы R и L (называемые характеристическими алгоритмами покрытия A), перерабатывающие всякое FR -число $x \in 0\Delta 1$ в натуральные числа, такие, что сегменты $A(R(x))$ и $A(L(x))$ пересекаются, и x принадлежит их объединению.

Рассмотрим конструктивную взаимно-однозначную нумерацию всех рациональных точек плоскости. Пусть алгоритм D определяет эту нумерацию, т. е. по каждому натуральному n выдает соответствующую рациональную точку $D(n)$.

Основная цель дальнейших рассмотрений заключается в построении алгорифма T , обладающего следующими свойствами: (1) алгорифм T перерабатывает всякое натуральное число n в запись несамопересекающейся ломаной с рациональными вершинами, определенной на $A(n)$ и имеющей рациональное определяющее дробление;

(2) если $\exists_l(A(n)) < x < \exists_n(A(n))$,

$$\exists_l(A(m)) < y < \exists_n(A(m)), n \neq m,$$

то $\langle T(n) \rangle(x) \neq \langle T(m) \rangle(y)$;

3) если $\exists_l(A(n)) = \exists_n(A(m))$, то

$$\langle T(n) \rangle(\exists_l(A(n))) = \langle T(m) \rangle(\exists_n(A(m)));$$

4) если n есть произвольное положительное натуральное число и k есть минимальное натуральное число, такое, что точка $D(k)$ не лежит ни на одной из ломаных с записями $T(0), T(1), \dots, T(n)$, то точка $D(k)$ лежит на ломаной с записью $T(n+1)$.

Вначале мы докажем, что из осуществимости алгорифма T , удовлетворяющего указанным условиям, вытекает утверждение теоремы, а затем построим соответствующий алгорифм T .

Пусть имеется алгорифм T , обладающий указанными выше свойствами. Построим алгорифм H , такой, что при любых n и m оказывается: (1) если $n=m$, или же $n \neq m$, и сегменты $A(n)$ и $A(m)$ не имеют общих концов, то $H(n \square m) = T(n)$; (2) если $n \neq m$ и сегменты $A(n)$ и $A(m)$ имеют общий конец, то $H(n \square m)$ есть запись ломаной, определенной на объединении $A(n)$ и $A(m)$ и являющейся результатом склеивания ломаных $T(n)$ и $T(m)$ (возможность построения алгорифма H , удовлетворяющего указанным условиям, следует из свойства (3) алгорифма T). Построим, наконец, алгорифм F , такой, что для всякого $x \in 0\Delta 1$

$$F(x) = \langle H(R(x) \square L(x)) \rangle(x).$$

Тогда F является требуемой простой дугой.

В самом деле, из построения алгорифма F легко следует, что всегда при $x \in A(n)$ будет

$$F(x) = \langle T(n) \rangle(x).$$

Отсюда легко получаем, что каковы бы ни были $x \in 0\Delta 1$ и $y \in 0\Delta 1$, если $x = y$, то $F(x) = F(y)$. Следовательно, F есть кривая, заданная на $0\Delta 1$.

Из свойств (1) и (2) алгорифма T вытекает, что F — простая дуга. Наконец, из свойства (4) алгорифма T вытекает, что при всяком натуральном k точка $D(k)$ лежит на одной из ломаных с записями $T(0), T(1), \dots, T(k+1)$; следовательно, она лежит на F , и, таким образом, для всякой рациональной точки $D(k)$ осуществимо* FR -число $t \in 0\Delta 1$, такое, что $F(t) = D(k)$.

* Из дальнейших построений легко усматривается, что в роли t может быть взято рациональное число.

Переходим к построению алгоритма T , удовлетворяющего указанным выше условиям. В качестве $T(0)$ берем запись алгоритма v , такого, что при любом $t \in A(0)$

$$v(t) = \left(\Xi_A^z(D(0)) + t - \frac{\Xi_n(A(0)) + \Xi_n(A(0))}{2} \right) \sigma \Xi_n^z(D(0)).$$

Предположим теперь, что уже построены ломаные $L_0, L_1, \dots, L_n$ с записями $T(0), T(1), \dots, T(n)$ и покажем каким образом, исходя из них, строится $T(n+1)$.

Прежде всего, найдем наименьшее натуральное число k , такое, что точка $D(k)$ не лежит на ломаных $L_0, L_1, \dots, L_n$.

Мы будем далее строить несамопересекающуюся ломаную L с рациональными вершинами, определенную на $A(n+1)$ и обладающую следующими свойствами:

(1) точка $D(k)$ лежит на L ; (2) если для некоторого r при $0 \leq r \leq n$ оказывается $\Xi_A(A(n+1)) = \Xi_n(A(r))$ или $\Xi_n(A(n+1)) = \Xi_A(A(r))$, то, соответственно, $L(\Xi_A(A(n+1))) = L_r(\Xi_n(A(r)))$, или $L(\Xi_n(A(n+1))) = L_r(\Xi_A(A(r)))$; (3) ломаная L не имеет точек пересечения с ломаными $L_0, L_1, \dots, L_n$, отличных от $L(\Xi_A(A(n+1)))$ и $L(\Xi_n(A(n+1)))$, причем точки $L(\Xi_A(A(n+1)))$ и $L(\Xi_n(A(n+1)))$ являются точками пересечения L с какими-либо из ломаных $L_0, L_1, \dots, L_n$ лишь в случаях, соответственно,

$$\exists r (0 \leq r \leq n \& \Xi_A(A(n+1)) = \Xi_n(A(r))) \quad \text{и}$$

$$\exists r (0 \leq r \leq n \& \Xi_n(A(n+1)) = \Xi_A(A(r))).$$

Построив ломаную L , обладающую указанными свойствами, мы затем определим $T(n+1)$ как запись ломаной L .

Очевидно, что при таком определении алгоритма T автоматически обеспечивается выполнение перечисленных выше условий, которым должен удовлетворять этот алгоритм. Итак, доказательство теоремы сводится к построению ломаной L с указанными свойствами.

Переходим к построению L . Построим отрезок

$$(\Xi_A^z(D(k)) - a) \sigma \Xi_n^z(D(k)) \Delta (\Xi_n^z(D(k)) + a) \sigma \Xi_A^z(D(k)),$$

где a есть рациональное число, меньшее половины минимума расстояний от точки $D(k)$ до ломаных $L_0, L_1, \dots, L_n$. Построенный отрезок обозначим через Ω .

Построим систему попарно не пересекающихся ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_l$, получающихся после проведения всех возможных склеиваний в системе, состоящей из $n+1$ ломаных $L_0, L_1, \dots, L_n, \Lambda O_{0,1}(\Omega)$. В силу индуктивного характера определения алгоритма T , мы имеем право предполагать, что ломаные $L_0, L_1, \dots, L_n$ удовлетворяют условиям, указанным для ломаных с записями $T(0), T(1), \dots, T(n)$ в списке условий, которым должен удовлетворять алгоритм T ; отсюда легко

следует, что ломаные $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ являются самопересекающимися и не пересекаются друг с другом.

Дальнейшие построения проводятся по отдельности для трех случаев.

Случай 1. Сегмент $A(n+1)$ не имеет общих концов с сегментами $A(r)$ ($r=0, 1, \dots, n$). Тогда L определяется как $LO_{A(n+1)}(Q)$.

Случай 2. Сегмент $A(n+1)$ имеет общий конец в точности с одним из сегментов $A(r)$ ($r=0, 1, \dots, n$). Пусть, для определенности $\exists_n(A(r)) = \exists_n(A(n+1))$, где $0 \leq r \leq n$.

Согласно построению ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_l$, осуществима некоторая ломаная Γ_l (где $0 \leq l \leq t$), которая совпадает с L_r или получается при помощи склеивания некоторых ломаных $L_r, L_{n_1}, L_{n_2}, \dots, L_{n_k}$ (где $0 \leq n_1, n_2, \dots, n_k \leq t$).

Очевидно, что система ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ удовлетворяет всем условиям леммы 6.

Построим некоторый прямоугольник Π_1 , такой, что все ломаные $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ содержатся в Π_1 и удалены от его границы. Обозначим через U_1 , точку $L_r(\exists_n(A(r))) = \Gamma_l(\exists_n(A(r)))$.

Применим лемму 6 к системе ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_l$, беря в качестве точки Z точку U_1 , и в качестве Π — прямоугольник Π_1 .

На основании этой леммы построим цепочку отрезков R_1 с рациональными концами, такую что линейный образ R_1 по сегменту $0\Delta 1$ не пересекается с ломаными $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ ни в одной точке, кроме U_1 , и R_1 соединяет точку U_1 с некоторой точкой P_1 , лежащей на верхней стороне Π_1 . Обозначим через G ломаную, получаемую в результате склеивания ломаных Γ_l и $LO_{A(n+1)}(R_1)$. Построим прямоугольник Π_2 , граница которого строго содержит границу прямоугольника Π_1 . Очевидно, что система ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{l-1}, \Gamma_{l+1}, \dots, \Gamma_t, G$ удовлетворяет всем условиям леммы 6. Обозначим начальную точку отрезка Q через U_2 . Беря точку U_2 в роли точки Z , и прямоугольник Π_2 в роли прямоугольника Π , согласно лемме 6 построим цепочку отрезков R_2 с рациональными концами, линейный образ которой по сегменту $0\Delta 1$ не пересекается с ломаными $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{l-1}, \Gamma_{l+1}, \dots, \Gamma_t, G$ (следовательно — с $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_t, LO_{0\Delta 1}(R_1)$) ни в одной точке, кроме точки U_2 и соединяет точку U_2 с некоторой точкой P_2 , лежащей на верхней стороне прямоугольника Π_2 .

Пусть цепочка отрезков R_2 имеет вид $Z_1 \Delta Z_2 * Z_2 \Delta Z_3 * \dots * Z_{k-1} \Delta Z_k$. Обозначим через $\bar{R}_2$ цепочку отрезков $Z_k \Delta Z_{k-1} * Z_{k-1} \Delta Z_{k-2} * \dots * Z_2 \Delta Z_1$; через I и J обозначим, соответственно, ломаные $LO_{0\Delta 1}(P_1 \Delta P_2)$ и $LO_{0\Delta 1}(\bar{R}_2)$. Пользуясь тем, что I и J пересекаются (например, в точке P_2) и являются ломаными с рациональными вершинами, построим точку пересечения I и J с наименьшей возможной ординатой; обозначим эту точку через P_3 . Из способа построения ломаной R_2 непосредственно усматривается, что точка P_3 отлична от точки P_1 . Возьмем определяющее дробление $t_1 * t_2 * \dots * t_m$ ломаной J и

найдем отрезок $J(t_l)\Delta J(t_{l+1})$, на котором лежит точка P_3 ; при этом мы можем считать, что P_3 отлична от $J(t_{l+1})$, поскольку точка P_3 отлична от $J(t_m)$, т. е. от U_2 . Обозначим через R цепочку отрезков

$$R_1 * P_1 \Delta P_3 * P_3 \Delta J(t_{l+1}) * J(t_{l+1}) \Delta J(t_{l+2}) * \dots * J(t_{m-1}) \Delta U_2.$$

Тогда цепочка R по построению обладает следующими свойствами; ломаная $LO_{0\Delta 1}(R)$ является несамопересекающейся, соединяет точку $L_r(\mathcal{A}(n+1))$ с начальной точкой отрезка $\mathcal{Q}$ и не имеет никаких точек пересечения с ломаными $L_0, L_1, \dots, L_n, LO_{0\Delta 1}(\mathcal{Q})$, отличных от начальной и конечной точки ломаной $LO_{0\Delta 1}(R)$. Теперь очевидно, что в качестве ломаной L , удовлетворяющей требуемым условиям, мы можем взять $LO_{\mathcal{A}(n+1)}(R * \mathcal{Q})$.

Случай 3. Сегмент $\mathcal{A}(n+1)$ имеет два общих конца с некоторыми сегментами $\mathcal{A}(r)$ и $\mathcal{A}(s)$ ($0 \leq r, s \leq n$). Пусть $\mathcal{E}_n(\mathcal{A}(r)) = \mathcal{E}_s(\mathcal{A}(n+1))$, $\mathcal{E}_n(\mathcal{A}(n+1)) = \mathcal{E}_s(\mathcal{A}(s))$. Совершенно аналогично тому как делалось в случае 2, строим цепочки отрезков R' и R'' , обладающих следующими свойствами: (1) ломаная $LO_{0\Delta 1}(R')$ является несамопересекающейся, соединяет точку $L_r(\mathcal{E}_n(\mathcal{A}(r)))$ с начальной точкой отрезка $\mathcal{Q}$ и не имеет никаких точек пересечения с ломаными $L_0, L_1, \dots, L_n, LO_{0\Delta 1}(\mathcal{Q})$, отличных от начальной и конечной точек ломаной $LO_{0\Delta 1}(R')$; (2) ломаная $LO_{0\Delta 1}(R'')$ является несамопересекающейся, соединяет заключительную точку отрезка $\mathcal{Q}$ с точкой $L_s(\mathcal{E}_s(\mathcal{A}(s)))$ и не имеет никаких точек пересечения с ломаными $L_0, L_1, \dots, L_n, LO_{0\Delta 1}(\mathcal{Q})$, R' , отличных от начальной и конечной точек ломаной $LO_{0\Delta 1}(R'')$. Ясно, что в качестве ломаной L , удовлетворяющей требуемым условиям, мы можем взять $LO_{\mathcal{A}(n+1)}(R' * \mathcal{Q} * R'')$. Теорема доказана.

Формулировка основной теоремы настоящей статьи была опубликована в [5].

Автор приносит глубокую благодарность М. А. Хачатрян и И. Д. Заславскому за ряд ценных советов и замечаний.

Вычислительный центр
АН Армянской ССР и
Ереванского государственного
университета

Поступила 15.VII.1977

Ս. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ. Այնտեղից խիտ կոնստրուկտիվ պարզ աղեղների մասին (ամփոփում)

Ապացուցված է, որ գոյություն ունի այնպիսի կոնստրուկտիվ պարզ աղեղ, որն անցնում է հարթության բոլոր ռացիոնալ կետերով:

S. N. MANUKIAN. On constructive everywhere dense simple arcs (summary)

It is proved that there exists a planar constructive curve defined on $\mathcal{Q}\Delta 1$ without selfintersections which passes through all two-dimensional rational points.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин. О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 458—502.
2. И. Д. Заславский. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 385—457.
3. И. Д. Заславский, С. Н. Манукян. О разбиениях плоскости конструктивными кривыми, Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ „Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники“, т. V, 1968, 26—138.
4. С. Н. Манукян. Некоторые вопросы теории конструктивных кривых и криволинейных интегралов, Диссертация, МГУ, 1969.
5. С. Н. Манукян. Пример конструктивной простой дуги, всюду плотной на плоскости. Вторая Всесоюзная конференция по математической логике (тезисы кратких сообщений), 1972, 30.