ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 4, 1973 Математика

С. С. АГАЯН

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕ КОМПАКТОВ, В РЯДЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Пусть E $(\operatorname{mes} E>0)$—некоторый компакт на действительной оси, а G—дополнение E: $G=\{(-\infty, +\infty)\setminus E\}=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G_j$, и пусть $\gamma(z)$—гармоническая мера множества E относительно верхней полуплоскости. Обозначим через $\mu(z)=\tilde{\gamma}(z)+i\gamma(z)$, где $\tilde{\gamma}(z)$—функция, сопряженная с $\gamma(z)$. И, наконец, пусть функция $f(z)$ определена на $C\setminus E$, где C — комплексная плоскость. Рассмотрим ряд

$$f(z)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z)\, e^{in\mu(z)}, \tag{1}$$

„коэффициенты" которого определяются по формуле

$$c_n(z)=\frac{2}{\pi}\int_G f(t)\, e^{-in\mu(t)}\frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(z)]}{t-z}\,dt, \tag{2}$$

$$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots,$$

где z — любая точка, принадлежащая $C\setminus E$.

Знак „$\sim$" указывает на то, что мы построили ряд чисто формальным образом, и означает лишь, что $c_n(z)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$ связаны с $f(z)$ формулой (2), причем не предполагается, что ряд вообще говоря, сходится, тем более сходится к функции $f(z)$.

Главным вопросом, как и в теории тригонометрических рядов, является вопрос о возможности замены знака „$\sim$" знаком равенства.

Целью предлагаемой работы является рассмотрение вопросов, связанных с этой задачей, а именно:

а) В каком смысле и при каких условиях ряд (1) представляет функцию $f(z)$?

б) Какова скорость сходимости ряда (1)? Для нашего ряд, возникает также задача следующего типа:

в) Если ряд (1) сходится в G, то где еще, кроме G, ряд сходится, более того, сходится ли он к функции $f(z)$?

Основной результат настоящей работы заключается в представлении аналитической (ограниченной и неограниченной) вне E функции рядами типа (1)и в оценке скорости этой сходимости. В работе рассматривается также сходимость ряда (1) на действительной оси, что само по себе представляет определенный интерес, так как при этом мы получае[м] разложение непериодической, более того, определенной вне некоторо-го компакта E ($E \subset (-\infty, +\infty)$) функции в ряды типа (1).

Далее, доказывается, что на эти ряды распространяется ря[д] основных теорем теории рядов Фурье (например, принцип локализа-ции Римана, критерий сходимости рядов Фурье, оценка частных сумм рядов Фурье и т. д.).

§ 1. Сходимость ряда (1) в комплексной плоскости

Предварительно введем некоторые обозначения, а затем дока-жем ряд лемм.

Обозначим через

$$\Pi_+ = \{z\colon z \in C,\ \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$\Pi_- = \{z\colon z \in C,\ \operatorname{Im} z < 0\},$$

а через $F_+(x)$ и $F_-(x)$ соответственно пределы:

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ z \in \Pi_+}} F(z) = \lim_{y \to 0} F(x + iy) = F_+(x)$$

и

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ z \in \Pi_-}} F(z) = \lim_{y \to 0} F(x - iy) = F_-(x).$$

Сформулируем лемму, которая является очевидным следствием теорем Коши и Фату.

Лемма 1. *Если ограниченная функция $F(z)$ аналитична в Π_+ и имеет в точке $z = \infty$ нуль по меньшей мере второго порядка (т. е. величина $z^2 F(z)$ стремится к конечному пределу при $n \to \infty$), то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_+(t)\, dt = 0.$$

Лемма 2. *Если ограниченная функция $F(z)$ аналитична в $C \setminus E$ и имеет в точке $z = \infty$ нуль по меньшей мере второго порядка, то справедливо*

$$\int_E F_+(z)\, dz = \int_E F_-(z)\, dz.$$

Доказательство. По предыдущей лемме имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_+(z)\, dz = 0,$$

аналогично и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_-(z)\, dz = 0,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_+(z)\,dz - \int_{-\infty}^{+\infty} F_-(z)\,dz = 0.$$

Из аналитичности $F(z)$ в $C\setminus E$ вытекает, что для $z\in C\setminus E$ справедливо равенство $F_+(z)=F_-(z)$, откуда

$$\int_E F_+(z)\,dz = \int_E F_-(z)\,dz.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если ограниченная функция $f(z)$ аналитична в $C\setminus E$ и $f(\infty)=0$, то для любого z, $z\in C\setminus E$*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f_+(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f_-(t)\,dt}{t-z}.$$

Идея доказательства та же, что и в лемме 2.

Получим теперь частичную сумму $S_n(f, z)$

$$S_n(f,z)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(z)\,e^{ik\mu(z)} \tag{1.10}$$

ряда (1) от функции $f(z)$ в интегральной форме.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$S_n(f, z)=\frac{1}{\pi}\int_G f(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(z)]\,dt}{t-z}. \tag{1.1}$$

В самом деле, подставляя выражения $c_k(z)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ $\cdots, \pm n)$ в (1.0) и принимая во внимание равенство

$$\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(z)]\sum_{k=-n}^{n} e^{ik[\mu(t)-\mu(z)]}=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(z)],$$

получим (1.1). Лемма доказана.

Теорема 1. *Если аналитическая и ограниченная вне E функция f такая, что $f(\infty)=0$, то ряд (1) сходится к $f(z)$ для любого z, принадлежащего $C\setminus E$, причем сходимость равномерна вне любого открытого множества, содержащего множество E.*

Доказательство. Согласно леммам 4 и 1 имеем

$$S_n(f, z)=-\frac{1}{\pi}\int_E f_+(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]}{t-z}\,dt, \tag{1.2}$$

откуда и

$$S_n(f, z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E f_+(t)\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]}}{t-z}\,dt. \tag{1.3}$$

Далее, согласно лемме 3 получим

$$S_n(f, z) - f(z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E f_+(t)\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]}}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_E f_-(t)\frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_-(t)-\mu(z)]}}{t-z}\,dt. \tag{1.4}$$

Оценим теперь каждый интеграл в отдельности. С этой целью рассмотрим разность

$$\mu_+(t) - \mu(z) = \tilde{\gamma}_+(t) + i\gamma_+(t) - \tilde{\gamma}(z) - i\gamma(z) =$$

$$= \tilde{\gamma}_+(t) - \tilde{\gamma}(z) - i[\gamma_+(t) - \gamma(z)], \tag{1.5}$$

откуда, учитывая и тот факт, что почти всюду на E $\gamma_+(t)=1$, получаем

$$\left| e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]} \right| = e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)[1-\gamma(z)]} \tag{1.6}$$

почти всюду на E.

Рассмотрим интеграл

$$J_n^1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E f_+(t)\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]}}{t-z}\,dt. \tag{1.7}$$

Согласно (1.6) и учитывая ограниченность функции $f(z)$ ($|f(z)| \leqslant M$) имеем

$$J_n^1(z) \leqslant \frac{M}{2\pi\delta} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)[1-\gamma(z)]} \operatorname{mes} E \leqslant \frac{M}{2\pi\delta} \operatorname{mes} E\cdot q^{n+\frac{1}{2}}, \tag{1.8}$$

где δ — расстояние от точки z до множества E, а $q=[e^{1-\gamma(z)}]^{-1}$. Но так как $\gamma(z)<1$, то $1-\gamma(z)>0$, откуда и $q<1$, следовательно, для достаточно больших „n“ справедливо

$$|J_n^1(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.9}$$

где ε—наперед заданное число.

Аналогично оценивается и интеграл

$$J_n^2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_E f_-(t)\frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_-(t)-\mu(z)]}}{t-z}\,dt, \tag{1.10}$$

т. е. для достаточно больших „n“ справедливо

$$|J_n^2(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.11)$$

Итак, согласно (1.4), учитывая (1.9) и (1.11), получаем для достаточно больших „n“ неравенство

$$|S_n(f, z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь D—область, содержащая множество E, тогда легко видеть, что сходимость интегралов (1.7) и (1.10) к нулю при $n \to \infty$ равномерна в $C \setminus D$. Теорема полностью доказана. Фактически теорема 1 определяет порядок убывания аналитических функций „полиномами“ ряда (1), а именно справедлива

Теорема 2. *Для аналитической и ограниченной вне E функции f, такой что $f(\infty)=0$, справедливо неравенство*

$$|S_n(f, z) - f(z)| < K \cdot q^n,$$

где $z \in C \setminus E$. K — константа, зависящая от расстояния точки z до компакта E, а $q = e^{\gamma(z)-1}$ $(q<1)$.

Если выбрать некоторое открытое множество D, содержащее множество E, то можно вывести аналогичное неравенство, имеющее место одновременно для всех z; при этом K и q зависят только от выбора множества D.

Теорема 1 сохраняет силу, если на функцию f вместо ее ограниченности наложить более слабое условие, а именно условие интегрируемости функции $|f(x)|(1+|x|)^{-1}$ на множестве G. Но тогда сходимость ряда (1) к функции $f(z)$ будет равномерной уже в области

$$G_\alpha = \{z\colon z \in C \setminus E,\ \gamma(z) \leqslant \alpha\},$$

где α — произвольное число с условием $\alpha \in (0, 1)$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопросов сходимости на действительной оси.

§ 2. Стремление к нулю коэффициентов ряда (1)

Теорема 3. *Если $|f(t)|(1+|t|)^{-1}$ интегрируема на G, то*

$$\lim_{n\to\infty} c_n(x) = 0, \qquad (2.1)$$

причем сходимость равномерна на любом отрезке $[a, b]$, целиком содержащемся внутри G.

Эта теорема является непосредственным следствием следующей леммы.

Лемма 5. *Если G_j—компонента связности множества G, то*

$$\int\limits_{\delta_j} f(t)\, e^{-in\mu(t)} \frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\, dt = \int\limits_{\mu(\delta_j)} F_j(v)\, e^{-inv}\, dv, \qquad (2.2)$$

где функция $F_j(v)$ *интегрируема на* $\mu(G_j)$

$$\left(\text{здесь}\quad F_j(v) = f[\varphi_j(v)]\cdot\varphi_j'(v)\frac{\sin\frac{1}{2}[v-v_0]}{\varphi(v)-\varphi(v_0)}\right),$$

а $\varphi_j(v)$ — *обратная функция к функции* $\mu(t)$ *и* $\mu(x)=v$.

Доказательство. Сначала докажем существование обратной функции $\mu(x)$, $x\in G_j$, а для этого получим интегральное представление функции $\mu(z)$. Легко видеть, что

$$\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{dt}{t-z}.$$

В самом деле, пусть $\chi_E(t)$ есть функция, равная 1 на E и равная 0 вне E. Далее, решая задачу Дирихле для полуплоскости с граничным значением функции $\chi_E(t)$, получим

$$\gamma(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,\frac{\chi_E(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2},$$

где $z = x+iy$. Так как очевидно

$$\frac{y}{(t-x)^2+y^2} = \operatorname{Im}\frac{1}{t-z},$$

то можем написать

$$\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi_E(t)}{t-z}\, dt + c = \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{dt}{t-z} + c,$$

где c — действительная постоянная. Полагая $c=0$ (в противном случае мы взяли бы вместо $\tilde{\gamma}(z)$ функцию $\tilde{\gamma}(z)-c$), устанавливаем справедливость равенства (2.3), откуда и для любого $x\in G_j$ имеем

$$\mu'(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{dt}{(t-x)^2},$$

т. е. $\mu'(x)>0$ для $x\in G_j$. Таким образом, существование обратной функции на G_j доказано. Поэтому мы можем перейти к замене переменной в первом интеграле (2.2). Далее, заменяя $\mu(t)$ на v, $\mu(x)=v_0$, $t=\varphi(v)$, получаем равенство (2.2). Лемма 5 доказана.

Сформулируем еще следующую лемму, доказательство которой аналогично предыдущей.

Лемма 6. *Для любого $\delta>0$ с условием $(x-\delta, x+\delta)\cap E=\varnothing$ справедливо равенство*

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt=\int_{-\delta_1}^{\delta_2} f[\varphi(v)]\,\psi(v)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\,dv, \tag{2.4}$$

где $\delta_1=v_0-\mu(x-\delta)$, $\delta_2=\mu(x+\delta)+v_0$,

$$\psi(v)=\left[\frac{\varphi(v_0+v)-\varphi(v)}{v}\right]^{-1}\varphi'(v).$$

Вернемся теперь к доказательству теоремы 3.

Доказательство. Пусть x — фиксированная точка множества G. Представим выражение $c_n(x)$ (см. (2)) в следующем виде:

$$c_n(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{a_j} f(t)\,e^{-in\mu(t)}\,\frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt= \tag{2.5}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\sum_{j=1}^{m}+\sum_{j=m+1}^{\infty}\right)\int_{a_j} f(t)\,e^{-in\mu(t)}\,\frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt.$$

Далее, пусть ε — некоторое положительное число. Тогда, учитывая ограниченность функции $\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]$ по переменной t на G, для ε и точки x выберем m таким образом, чтобы

$$\left|\frac{2}{\pi}\sum_{j=m+1}^{\infty}\int_{a_j} f(t)\,e^{-in\mu(t)}\,\frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Перейдем теперь к оценке суммы

$$J_n^m(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{a_j} f(t)\,e^{-in\mu(t)}\,\frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt. \tag{2.7}$$

Докажем, что эту сумму можно сделать по модулю меньше наперед заданного числа ε. С этой целью заметим, что согласно лемме 5 $J_n^m(x)$ можно представить в виде

$$J_n^m(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{\mu(a_j)} F(v)\,e^{-inv}\,dv, \tag{2.8}$$

где функция $F(v)$ интегрируема на $\bigcup_{j=1}^{m} \mu(G_j)$.

Отсюда по теореме Римана-Лебега $J_n^m(x)$ будет стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Далее из (2.5), если учесть соотношения (2.7) и (2.8), заключаем

$$\lim_{n\to\infty} c_n(x) = 0. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что сходимость равномерна на любом отрезке $[a, b] \subset G$. Теорема полностью доказана.

Используя идею доказательства этой теоремы, мы получаем:

Теорема 4 (о локализации). *Если* $\frac{|f(t)|}{1+|t|}$ *интегрируема на* G, *то для любого* x *и* $\delta > 0$ *справедливо равенство*

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{G\cap\{x-\delta,\, x+\delta\}} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x} dt + o(1). \tag{2.10}$$

Другими словами, поведение ряда (1) функции $f(x)$, $x \in G$ в некоторой точке x зависит исключительно от значений, принимаемых функцией в некоторой (произвольно малой) окрестности точки x.

На самом деле, пусть x—фиксированная точка, а $\delta > 0$— произвольное число. Представим $S_n(f, x)$ в виде суммы двух слагаемых

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{G\setminus G_\delta} + \int\limits_{G\cap G_\delta}\right) f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x} dt, \tag{2.11}$$

где $G_\delta = \{x-\delta,\ x+\delta\}$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G\setminus G_\delta} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x} dt = 0.$$

Согласно (2.11) и (2.12) имеем

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{G\cap G_\delta} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x} dt + o(1).$$

Отсюда видно, что значения функции $f(x)$ вне интервала $(x-\delta,$ $x+\delta)$ совершенно не фигурируют в формуле (2.13), а потому вопрос о том, стремится ли $S_n(f, x)$ к пределу при $n\to\infty$ зависит только от поведения f на этом интервале. Теорема доказана.

§ 4. Необходимый и достаточный признак сходимости

Теорема 5. *Если* $\frac{|f(t)|}{1+|t|}$ *интегрируема на* G, *то для того чтобы в некоторой точке* x *частичная сумма* $S_n(f, x)$ *сходилась к некоторому числу* S, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{f(x+t)-S}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t+x)-\mu(x)]\,dt=0, \tag{3.0}$$

где $\delta>0$ — *произвольное число.*

Прежде чем приступить к доказательству нашего критерия, докажем следующую лемму.

Лемма 7. *Для любого* x, $x\in G$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(1, x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{G}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt=1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt. \tag{3.2}$$

Согласно лемме 6, при условии $f(t)=1$ имеем

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta_1}^{\delta_2}\psi(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\,dv. \tag{3.3}$$

Далее легко видеть, что функция $\psi(t)$ дифференцируема и в точке нуль равна 1, т. е. $\psi(0)=1$, следовательно, в силу признака Дини (см.[1], стр. 120) сходимости рядов Фурье получаем, что $J_n(x)$ сходится при $n\to\infty$ к $\psi(0)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} J_n(x)=1. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание теорему 4 о локализации и равенство (3.4), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{G}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt=1 \tag{3.5}$$

для любого x, $x \in G$. Лемма доказана.

Приступим, наконец, к доказательству нашего критерия. По те-реме о локализации имеем

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt + o(1). \qquad (3$$

Согласно лемме 7

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt + o(1), \qquad (3.$$

откуда и заменяя $t-x$ на t в интегралах (3.6), (3.7), находим

$$S_n(f, x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{f(x+t)-S}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t+x)-\mu(x)]\,dt + o(1). \qquad (3.$$

Отсюда ясно, что для сходимости $S_n(f, x)$ к числу S в точк x необходимо и достаточно выполнение условия (3.0).

Если мы хотим, чтобы в точке x ряд (1) имел „естественну сумму", т. е. сумму, равную $f(x)$, то для этого достаточно взя $S = f(x)$.

Если $f(x)$ непрерывна на (a, b) и ε — любое положительное числ то для равномерной сходимости ряда (1) на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ необходим и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t+x)-\mu(x)]\,dt = 0$$

равномерно на $[a, b]$, где δ — любое, и $0 < \delta < \varepsilon$.

Отсюда можно вывести интересное для приложений

Следствие. Если $\dfrac{|f(t)|}{1+|t|}$ интегрируема на G и при фиксиро-ванном x интегралы

$$\int_{-\delta}^{0}\left|\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right| dt, \quad \int_{0}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right| dt$$

с некоторым δ существуют, то частичные суммы $S_n(f, x)$ ряда (1 функции f сходятся в точке x к $\dfrac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$, где $f(x+0$

и $f(x-0)$ суть левый и правый пределы функции f в точке x (предполагается, что x есть точка разрыва первого рода функции f).

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b] \subset G$, и если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, так что сразу для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \right| dt < \varepsilon,$$

то ряд (1) для функции $f(x)$ стремится к ней равномерно на $[a, b]$.

Заметим, что мы получили условия для разложения функции непериодической, более того, неопределенной на некотором компакте E, $E \subset (-\infty, +\infty)$, в ряды типа (1).

§ 4. Оценка частичных сумм ряда (1)

Теорема 6. *Если* $\frac{|f(t)|}{1+|t|}$ — *интегрируемая функция на* G, *то почти всюду справедливо*

$$S_n(f, x) = o(\ln n). \tag{4.0}$$

Доказательство. Учитывая равенства (2.6) и (3.1), получаем

$$S_n(f, x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) [\mu(t)-\mu(x)]\, dt + o(1). \tag{4.1}$$

Далее, согласно лемме 6, получаем

$$S_n(f, x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} [F(v+v_0)-F(v_0)]\, \psi(v) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\, dv + o(1), \tag{4.2}$$

где $F(v+v_0) = f[\varphi(v+v_0)]$, $F(v_0) = f[\varphi(v_0)]$.

Воспользовавшись второй раз теоремой Римана о локализации, но уже для рядов Фурье, получаем

$$S_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta_3}^{\delta_3} [F(v)-F(v_0)]\, \psi(v) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\, dv + o(1), \tag{4.3}$$

где δ_3 — любое положительное число.

Далее, ссылаясь на идею доказательства аналогичной оценки ча
т ной суммы ряда Фурье функции $F(t)$ (см. [1], стр. 144), получае

$$\int_{-\delta_0}^{+\delta_0} [F(v)-F(v_0)]\,\psi(v)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\,dv = o\,(\ln n). \qquad (4.5)$$

Итак, согласно (4.3), (4.4), (4.5) и учитывая, что $f(x)=o\,(\ln n$
имеем $S_n(f, x)=o/\ln n)$. Теорема полностью доказана.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность С. Н
Мергеляну за постановку задачи и внимание к работе.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступила 26.I.19

Ս. Ս. ԱՂԱՅԱՆ. Կոմպակտից դուրս որոշված ֆունկցիայի ներկայացումը հատուկ շարք
(ամփոփում)

Դիցուկ E(mesE>O), որևէ կոմպակտ է իրական առանցքի վրա։

Ներկա աշխատանքում սահմանվում է շարք, որի միջոցով E-ից դուրս որոշված անալիտ
(սահմանափակ կամ անսահմանափակ) ֆունկցիան ներկայացվում է այդպիսի շարքով։

Այնուհետև դիտարկվում է սահմանված շարքի զուգամիտությունը իրական առանցքի վրա
որը առանձին դիտարկված ներկայացնում է ինքնուրույն հետաքրքրություն, քանի որ մենք ստա
նում ենք ոչ պարբերական (ավելին, որոշված որևէ կոմպակտից դուրս) ֆունկցիայի ներկայա
ցումը այդպիսի շարքերով։

Աշխատանքում ապացուցվում է նաև, որ այդպիսի շարքերի վրա տարածվում են մի շար
հիմնական թեորեմներ Ֆուրյեի շարքերի տեսությունից։

S. S. AGHAIAN. *Special series expansion of the functions defined on the complements of compacts* (summary)

Let E (mes $E>0$) be a compact on the real axis.

In this paper a series for the representation of an analytical outside of E com
plements function is defined.

The convergence of introduced series on the real axis is considered.

Extensions of a number of fundamental theorems of Fourier series theory ar
obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
2. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-ое, М.—Л.
1950.
3. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.