

А. Б. НЕРСЕСЯН, А. О. ОГАНЕСЯН

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Как известно (см., напр., [1]) задача Коши для строго гиперболических уравнений с данными на нехарактеристическом многообразии поставлена корректно.

При нарушении условия строгой гиперболичности изучение этой задачи значительно затрудняется. Оказывается, что, вообще говоря, корректность постановки подобных задач зависит от поведения коэффициентов при младших производных в уравнении. Наиболее общие результаты в этом направлении получены в двухмерном случае ([2]) методом сведения задачи Коши к системе интегральных уравнений с неограниченным ядром. Полученные таким образом достаточные условия корректности (строгая гиперболичность нарушается на кривой с начальными данными) переносятся на многомерные уравнения с коэффициентами, не зависящими от пространственных переменных ([3]). Условия эти формулируются через оценки коэффициентов младших членов уравнения. Несколько иной вид условия корректности, содержащего оценку соответствующей квадратичной формы, указан О. А. Олейник ([4]) в случае многомерного уравнения второго порядка.

В предлагаемой работе изучается определенный класс гиперболических уравнений четного порядка, вырождающихся на начальной гиперплоскости. Указываются достаточные условия корректности задачи Коши, носящие, как и в ([4]), в основном, алгебраический характер.

При попытке применить классическую схему ([1]) к решению поставленной задачи встречается ряд принципиальных затруднений. Основная квадратичная форма („энергия“) оказывается не строго положительно определенной, вследствие чего при выводе априорных оценок нельзя воспользоваться леммой Гронуолла.

Соответствующие оценки в данном случае удастся получить применением метода, заключающегося в редукции задачи Коши к задаче с быстро стремящимся к нулю свободным членом с последующим обращением интегрального неравенства с неинтегрируемым ядром ([2], [5], [6]):

§ 1. Постановка задачи

Обозначим

$$V = V_t = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 \leq t\}, \quad S = S_t$$

— гиперплоскость $x_1 = t$, Lip^k — множество всех определенных в R^n

комплекснозначных функций, у которых производные порядка $\leq k$ существуют почти всюду и ограничены, а через Lip^0 — совокупность всех измеримых и ограниченных функций.

Пусть

$$a = a(x, D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha \quad |\alpha| \leq m+1 \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} D_j^{\alpha_j} = \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$$

— линейный дифференциальный оператор порядка $m+1$ с главной частью

$$Pa = Pa(x, D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha, \quad |\alpha| = m+1.$$

Коэффициенты предполагаются симметричными относительно перестановок в α . Обозначим через $a_0 = a_0(x)$ коэффициент при D_1^{m+1} и условимся называть оператор a нормальным, если $a_0(x) \equiv \text{const}$. Запись $a \in Lip^k$ будет означать, что коэффициенты оператора a принадлежат Lip^k . Пусть

$$Pa(x, \zeta) = \sum a_\alpha(x) \zeta^\alpha, \quad \zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = m+1$$

— характеристический полином оператора Pa . Как известно, оператор a называется гиперболическим (относительно первой координаты), если $a_0(x) \neq 0$ при всех x и если в разложении на множители

$$Pa(x, \zeta) = a_0(x) \prod (\zeta_1 - \lambda_j) \quad (1 \leq j \leq m+1)$$

числа $\lambda_j = \lambda_j(x, \zeta')$ ($\zeta' = (\zeta_2, \dots, \zeta_n)$) действительны и различны, когда ζ' действительно и $\neq 0$. Если же хотя бы два корня совпадают хотя бы в одной точке $x \in V$, то оператор назовем вырождающимся гиперболическим оператором (слабо гиперболическим оператором).

В дальнейшем рассматривается следующая задача Коши:

$$\prod_{i=1}^{m+1} (D_1^2 - \nu_i^2(x)) \sum_{j=2}^n \mu_j^2(x) D_j^2 u + \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad (1.1)$$

$$D_j^i u(0, x') = 0 \quad (i=0, 1, \dots, m) \quad x' = (x_2, \dots, x_n), \quad (1.2)$$

где $m+1$ — четное, $\min_{x, l} \mu_j^2(x) \neq 0$, а $\nu_l(x)$ стремятся к нулю при $x_1 \rightarrow 0$.

Корни характеристического уравнения $\lambda_1(x, \xi'), \dots, \lambda_{m+1}(x, \xi')$ пронумеруем так, чтобы

$$-\lambda_1(x, \xi') = \lambda_{m+1-(l-1)}(x, \xi') \quad \text{и} \quad \lambda_l(x, \xi') < \lambda_j(x, \xi')$$

при $x_1 > 0$ и $i < j$.

§ 2. Неотрицательные формы. Разделяющий оператор

Рассмотрим форму

$$H = \sum h_{\alpha\beta} D^\alpha u(x) \overline{D^\beta u(x)}$$

с характеристическим полиномом

$$K = \sum h_{\alpha\beta} \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta.$$

Будем говорить, следуя Л. Гордигу [1], что порядок формы H в точке x равен m ; m' , если $|a| \leq m$, $|\beta| \leq m'$ и найдется хотя бы один коэффициент, у которого $|a| = m$, и один, у которого $|\beta| = m'$, не обращающиеся в нуль в точке x .

В дальнейшем будем пользоваться частичным преобразованием Фурье

$$U(x_1, \eta') = \int e^{-i(\eta_2 x_2 + \dots)} u(x) dS \quad (dS = dx_2 \dots dx_n),$$

$$\eta' = (\eta_2, \dots, \eta_n).$$

Из формулы Парсеваля имеем

$$\int H dS = (2\pi)^{1-n} \int K(\sigma, \bar{\sigma}) U \bar{U} d\eta',$$

где $\sigma = (D_1, i\eta_2, \dots, i\eta_n)$.

Эрмитовый однородный оператор H порядка m ; m называется вполне положительным оператором, если

$$K(\sigma, \bar{\sigma}) U \bar{U} \sim \sum |\sigma^\alpha U|^2, \quad |a| = m \quad (2.1)$$

или же

$$\int H dS \sim \int \sum |D^\alpha u|^2 dS. \quad (2.2)$$

Пусть

$$a = \sum a_\alpha(x) D^\alpha, \quad b = \sum b_\beta(x) D^\beta$$

— два дифференциальных оператора порядков $m+1$ и m соответственно, а $\bar{a}(x, D)$ и $\bar{b}(x, D)$ — операторы, получающиеся из a и b заменой их коэффициентов на сопряженные. Рассмотрим двойной дифференциальный оператор

$$L = L(a, b) = a\bar{b} + \bar{a}b,$$

где $\bar{a} = \bar{a}(x, \bar{D})$, $\bar{b} = \bar{b}(x, \bar{D})$.

Имеет место.

Лемма 1 [1]. Если главные части операторов a и b действительны, $a \in Lip^0$, $Pa \in Lip^1$, $b \in Lip^1$, то

$$L(a, b) \equiv \sum (D_I + \bar{D}_I) A^I + A^0,$$

где $\{A^I\}_0^n$ — двойные дифференциальные операторы порядка $\leq m$; m с ограниченными коэффициентами

$$A^I = \sum a_\alpha(x) b_\beta(x) K_{\alpha\beta}^I, \quad (2.4)$$

и если $a = Pa$, $b = Pb$, то

$$A^0 = - \sum c_{j\alpha\beta}(x) K_{\alpha\beta}^I, \quad (2.5)$$

где $c_{j\alpha\beta} = D_j(a_\alpha(x) b_\beta(x))$.

Для формы $L u \bar{u}$ получаем

$$L u \bar{u} = 2 \operatorname{Re} a u \bar{b} u = \sum D_l A^l u \bar{u} + A^0 u \bar{u}.$$

Для того, чтобы форма $A^1 u \bar{u}$ при $x_1 > 0$ была вполне положительной, возьмем в качестве b разделяющий гиперболический оператор.

О п р е д е л е н и е. Пусть a и b — два гиперболических оператора порядков $m+1$ и m соответственно. Оператор b разделяет оператор a , если для всех x листы поверхности $Pb(x, \xi) = 0$ разделяют листы $Pa(x, \xi) = 0$, где $\xi = \operatorname{Re} \zeta$.

Л е м м а 2 [1]. Если a и b — два гиперболических оператора, причем $a_0 b_0 > 0$ и b разделяет a , то форма $PA^1 u \bar{u}$ вполне положительна.

Для PA^1 получается выражение

$$PA^1(x, \zeta, \bar{\zeta}) = a_0 \bar{b}_0 \sum \gamma_k |a_k(x, \zeta)|^2, \quad \operatorname{Re} \zeta' = 0, \quad (2.6)$$

где $a_k = a_k(x, \zeta) = \prod_{j=k} (\zeta_1 - i\lambda_j)$,

$$\gamma_k = \frac{\prod_{k+j} (\lambda_k - \omega_j)}{\prod_{k+j} (\lambda_k - \lambda_j)},$$

ω_j — корни характеристического уравнения разделяющего оператора. В качестве ω_j можно взять

$$\omega_j = \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Если $b(x, \xi) = Pb(x, \xi)$, то $A^1(x, \zeta, \bar{\zeta}) = PA^1(x, \zeta, \bar{\zeta})$.

Для уравнения (1.1) $\gamma_k(x, \xi') \equiv \gamma_k(x)$ и $\gamma_k = \gamma_{m+1-(k-1)}$ для всех k ,

$$|a_k(x, \zeta)|^2 + |a_{m+1-(k-1)}(x, \zeta)|^2 = \left| \prod_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} (\zeta_1^2 - (i\lambda_j)^2) \right|^2 (\zeta_1 \bar{\zeta}_1 - |i\lambda_k|^2),$$

где $|i\lambda_k|^2 = v_k^2(x) \sum_{j=2}^n \mu_j^2(x) i\eta_j \bar{i\eta_j}$.

Отсюда выражение для $A^1(x, D, \bar{D}) u \bar{u}$ имеет вид

$$A^1(x, D, \bar{D}) u \bar{u} = \sum_k \gamma_k \left| \prod_{j=k}^{\frac{m+1}{2}} (D_1^2 - v_j^2(x) \sum_{i=1}^n \mu_i^2(x) D_i^2) \right|^2 (D_1 \bar{D}_1 - v_k^2(x) \sum_{i=1}^n \mu_i^2(x) D_i \bar{D}_i) u \bar{u}.$$

Обозначим $\lambda^2(x, D') = \sum_{i=1}^n \mu_i^2(x) D_i^2$.

Л е м м а 3. Для $A^1(x, D, \bar{D}) u \bar{u}$ имеет место оценка

$$A^1(x, D, \bar{D}) u \bar{u} \geq c \left[\sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(l+1)}(x)}{\Delta_{2l+1}(x)} \sum_{j=2}^n \mu_j^2(x) \left| \lambda^{2l}(x, D') D_l D_1^{m-(2l+1)} u \right|^2 + \right. \\ \left. + \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2l+1}(x)}{\Delta_{2l}(x)} \left| \lambda^{2l}(x, D') D_1^{m-2l} u \right|^2 \right], \quad (2.7)$$

где Δ_l зависит только от $(\lambda_s - \lambda_r)$.

Доказательство.

$$\gamma_k = \frac{\prod_{j=k} \left(\lambda_k - \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2} \right)}{\prod_{j+k} (\lambda_k - \lambda_j)} = \frac{1}{2^n} \prod_{j+k} \left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_{j+1}}{\lambda_k - \lambda_j} \right) > 0. \quad (2.8)$$

Поэтому $A^1(x, D, \bar{D}) u \bar{u}$ удовлетворяет оценке, которую можно записать в следующем виде

$$A^1(x, D, \bar{D}) u \bar{u} \geq c (\theta^+ A \theta), \quad (2.9)$$

где $A = \|A_{lj}\|$ — блочная матрица размерности $[(m+1)(n-1)] \times [(m+1)(n-1)]$, у которой $A_{lj} = 0$ при $i \neq j$, $A_{ii} = B$, $B = \|b_{rl}\|_1^{m+1}$ ($i=1, \dots, n+1$),

$$b_{rl} = (-1)^{(r-1)(l-1)} \sum_{k=1}^{m+1} \left[\left(\sum_{\substack{l_1 < \dots < l_{r-1} \\ l_1, \dots, l_{r-1} \neq k}} v_{l_1} v_{l_2} \dots v_{l_{r-1}} \right) \left(\sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{l-1} \\ j_1, \dots, j_{l-1} \neq k}} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_{l-1}} \right) \right], \quad (2.10)$$

$$v_{l_0} \equiv 1, \quad v_{j_0} \equiv 1.$$

Чтобы записать вектор θ , определим сначала следующие $(n-1)$ -мерные векторы

$$\vec{a}_{2l} = \left(\mu_2 \lambda^{2(l-1)}(x, D') D_2 D_1^{m-(2l-1)} u, \dots, \mu_n \lambda^{2(l-1)}(x, D') D_n D_1^{m-(2l-1)} u \right) \\ \left(i = 1, \dots, \frac{m+1}{2} \right), \quad (2.11)$$

$$a_{2l+1} = \left(\frac{\lambda^{2l}(x, D') D_1^{m-2l} u}{\sqrt{n-1}}, \dots, \frac{\lambda^{2l}(x, D') D_1^{m-2l} u}{\sqrt{n-1}} \right) \left(j=0, 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right).$$

Тогда в обозначениях $a_i = (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{n-1})$ вектор-столбец θ будет иметь компоненты

$$\theta = (a_1^1, a_1^2, \dots, a_{m+1}^1, a_1^2, a_2^2, \dots, a_{m+1}^2, \dots, a_1^{n-1}, a_2^{n-1}, \dots, a_{m+1}^{n-1}). \quad (2.12)$$

Из условия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы следует, что для того чтобы форма $\theta^+ A \theta$ была положительно определенной, достаточно, чтобы главные миноры матрицы B , стоящие на диагонали, были бы положительными. При этом имеет место оценка

$$\theta^+ A \theta \geq c \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m+1} a_i' a_i' \quad (2.13)$$

(θ^+ — эрмитово сопряженный к θ вектор-строка).

Подсчитаем главные миноры матрицы B , стоящие на диагонали. Обозначим

$$\Delta_{s+1} = \det \| b_{rl} \|_1^{s+1}. \quad (2.14)$$

Из легко проверяемого соотношения

$$\Delta_{s+1} = \sum_{|k|=s+1} \det \| a_{er} \|_1^{s+1} = \sum_{|k|=s+1} [\det \| \beta_{er} \|_1^{s+1}]^2,$$

где

$$a_{lr} = \sum_{i_1, \dots, i_{l-1}+k_l} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_{l-1}} \sum_{j_1, \dots, j_{r-1}+k_l} y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_{r-1}}, \quad \beta_{lr} = \sum_{i_1, \dots, i_{r-1}+k_l} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_{r-1}}$$

следует формула

$$\Delta_{s+1} = \sum \prod_{k_i < k_j} (y_{k_i} - y_{k_j})^2, \quad (2.15)$$

где суммирование производится по всем наборам $(k_1, k_2, \dots, k_{s+1})$ из чисел $(1, 2, \dots, m+1)$.

Теперь, если выражение $(\theta^+ A \theta)$ записать в виде $(\xi^+ \tilde{A} \xi)$, где ξ определяется так же, как и θ , только вместо a_i надо брать $\sqrt{\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}} \vec{a}_i$ ($i=1, \dots, m+1$), $\Delta_0 \equiv 1$, то $\tilde{A}$ будет положительно определенной во всей области, включая и гиперплоскость $x_1=0$, так как главные миноры на диагонали равны 1. Поэтому

$$\begin{aligned} A^1(x, D, \bar{D}) u \bar{u} &\geq c (\xi^+ \tilde{A} \xi) \geq c \xi^+ \xi = \\ &= c \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Delta_{i+1}(x)}{\Delta_i(x)} a_{i+1}' a_{i+1}' \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставляя векторы a_i , получим требуемую оценку (2.7).

Обозначим теперь

$$\begin{aligned} Q(x, u) &\equiv \sum_{i=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(i+1)}(x)}{\Delta_{2i+1}(x)} \sum_{j=2}^n \mu_j^2(x) |\lambda^{2i}(x, D') D_j D_1^{m-(2i+1)} u(x)|^2 + \\ &+ \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2i+1}(x)}{\Delta_{2i}(x)} |\lambda^{2i}(x, D') D_1^{m-2i} u(x)|^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} Q(x_0, u) &\equiv \sum_{i=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(i+1)}(x_0)}{\Delta_{2i+1}(x_0)} \sum_{j=2}^n \mu_j^2(x_0) |\lambda^{2i}(x_0, D') D_j D_1^{m-(2i+1)} u(x)|^2 + \\ &+ \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2i+1}(x_0)}{\Delta_{2i}(x_0)} |\lambda^{2i}(x_0, D') D_1^{m-2i} u(x)|^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В дальнейшем, кроме полного порядка производной D^{α} , равного $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, будем пользоваться двойным порядком $[z] = j, k$, где j — порядок дифференцирования по x_1 , а $j+k = |\alpha|$. Запись $[z] \leq p, q$ означает, что $j \leq p$ и $j+k \leq p+q$, а $\{\alpha\} \leq p, q; j \leq p, k \leq q$.

§ 3. Оценка интеграла от дивергентной части

Введем некоторые линейные пространства.

1. E^k — пространство всех непрерывно дифференцируемых в V до порядка k функций с компактными носителями, $E^{\infty} = E$.

2. Если W является частью V , то $H^{p,q}(W)$ — пополнение E по норме

$$|D^{p,q} f, W|^2 = \int |D^{p,q} f(x)|^2 dW = \int \sum_{[z] \leq p,q} |D^z f(x)|^2 dW, \quad (3.1)$$

где $dW = dx_1 \dots dx_n$ при $W = V$ и $dW = dx_2 \dots dx_n$, если W совпадает с S или его частью. $H^{p,q}$ — гильбертово пространство.

Следующий результат обобщает известную ([1]) оценку для гиперболических операторов.

Теорема 1. Пусть $A^1(x, u)$ при любом $\epsilon > 0$ является равномерно вполне положительным оператором при $x_1 > \epsilon$ с равномерно непрерывными коэффициентами. Тогда существует постоянная $c > 0$, не зависящая от u такая, что

$$\int A^1(x, u) dS \geq c \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{[z] \leq m-l, l} |D^z u|^2 \right] dS - \frac{1}{c} \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{z\} \leq m-1-l, l} |D^z u|^2 \right] dS. \quad (3.2)$$

Доказательство. В произвольной фиксированной точке x_0 согласно (2.18) имеем

$$\begin{aligned} & \int Q(x_0, U) d\eta' = \\ &= \int \left[\sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(l+1)}(x_0)}{\Delta_{2l+1}(x_0)} \sum_{j=2}^n \mu_j^2(x_0) \left| \lambda^{2l} \left(x_0, \frac{i\eta'}{s} \right) \right|^2 \frac{|i\eta_l|^2}{s^2} s^{2(2l+1)} |D_1^{m-(2l+1)} U|^2 + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2l+1}(x_0)}{\Delta_{2l}(x_0)} \left| \lambda^{2l} \left(x_0, \frac{i\eta'}{s} \right) \right|^2 s^{4l} |D_1^{m-2l} U|^2 \right] d\eta', \quad (3.3) \end{aligned}$$

где $d\eta' = d\eta_2 \dots d\eta_n$, $s = \sum_{i=2}^n |\eta_i|$.

Внесем $\min \left(\sum_{j=2}^n \mu_j^2(x_0) \left| \lambda^{2l} \left(x_0, \frac{i\eta'}{s} \right) \right|^2 \frac{|i\eta_l|^2}{s^2}, \left| \lambda^{2l} \left(x_0, \frac{i\eta'}{s} \right) \right|^2 \right)$.

Учитывая, что $s^{2p} \sim \sum_{j=2}^n |\eta_j|^{2p}$, получим

$$\int Q(x_0, U) d\eta' \geq c \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x_0)}{\Delta_l(x_0)} \sum_{j=2}^n |\eta_j|^{2l} |D_1^{m-l} U|^2 \right] d\eta'. \quad (3.4)$$

Применяя равенство Парсеваля, приходим к оценке

$$\int Q(x_0, u) dS \geq c \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x_0)}{\Delta_l(x_0)} \sum_{[\alpha]=m-l, l} |D^\alpha u|^2 \right] dS. \quad (3.5)$$

Пусть носитель функции u заключен внутри сферы $T \subset S$ диаметра ε с центром в точке x_0

$$\int Q(x, u) dS = \int Q(x_0, u) dS + \int [Q(x, u) - Q(x_0, u)] dS. \quad (3.6)$$

Второй член ограничен величиной

$$\delta(\varepsilon) |D^m u|^2,$$

где $\delta(\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ независимо от u и x_0 в силу равномерной непрерывности коэффициентов оператора. Тогда для достаточно малого ε получаем

$$\int Q(x, u) dS \geq c \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{[\alpha]=m-l, l} |D^\alpha u|^2 \right] dS. \quad (3.7)$$

Пусть $1 = \sum_{k=1}^p \varphi_k^2$ — разбиение единицы на S , удовлетворяющее следующим условиям: каждая функция $\varphi_k \geq 0$ бесконечно дифференцируема, и производные ее до $m+1$ порядка включительно равномерно ограничены; носитель S_k функции φ_k пересекается лишь с конечным числом других носителей, причем для любой функции u , равной нулю вне S_k , соотношение (3.7) выполняется с постоянной, не зависящей от k

$$\int Q(x, u) dS = \sum_{k=1}^p \int \varphi_k^2(x) Q(x, u) dS. \quad (3.8)$$

Разность $\varphi_k^2 Q(x, u) - Q(x, \varphi_k u)$ может быть записана в виде

$$\left[\left(\varphi(x) \varphi(\bar{x}) K(x, D, \bar{D}) - K(x, D, \bar{D}) \varphi(x) \varphi(\bar{x}) \right) u(x) \overline{u(\bar{x})} \right]_{\bar{x}=x},$$

где $\varphi \equiv \varphi_k$, а K — двойные дифференциальные операторы, входящие в Q . Далее

$$\begin{aligned} \varphi(x) \varphi(\bar{x}) K - K \varphi(x) \varphi(\bar{x}) &= \varphi(x) (\varphi(\bar{x}) K - K \varphi(\bar{x})) + \\ &+ (\varphi(x) K - K \varphi(x)) \varphi(\bar{x}), \end{aligned}$$

где в роли K могут фигурировать следующие выражения:

1.

$$K = \sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(l+1)}(x)}{\Delta_{2l+1}(x)} \sum_{j=2}^n \mu_j^3(x) \lambda^{2l}(x, D') D_j D_1^{m-(2l+1)} \lambda^{2l}(x, \overline{D'}) \overline{D_j} \overline{D_1^{m-(2l+1)}},$$

$$\left| \left(\varphi(x) \varphi(\bar{x}) K - K \varphi(x) \varphi(\bar{x}) \right) u \bar{u} \right| \leq c \left(r \sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(l+1)}}{\Delta_{2l+1}} \sum_{\{\alpha\} = m-(2l+1), 2l+1} |D^\alpha u|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(l+1)}}{\Delta_{2l+1}} \sum_{\{\alpha\} < m-1-(2l+1), 2l+1} |D^\alpha u|^2 \right),$$

$$2. K = \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2l+1}}{\Delta_{2l}} \lambda^{2l}(x, D') D_1^{m-2l} \lambda^{2l}(x, \overline{D'}) \overline{D_1^{m-2l}},$$

$$\left| \left(\varphi(x) \varphi(\bar{x}) K - K \varphi(x) \varphi(\bar{x}) \right) u \bar{u} \right| \leq c \left(r \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2l+1}}{\Delta_{2l}} \sum_{\{\alpha\} = m-2l, 2l} |D^\alpha u|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2l+1}}{\Delta_{2l}} \sum_{\{\alpha\} < m-1-2l, 2l} |D^\alpha u|^2 \right).$$

Учитывая эти оценки, получаем

$$\varphi_k^2 Q(u) - Q(\varphi_k u) \geq -c \left[r \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{\alpha\} = m-l, l} |D^\alpha u|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{\alpha\} < m-1-l, l} |D^\alpha u|^2 \right]. \quad (3.9)$$

Интегрируя это неравенство по S_k и суммируя результаты по всем k , получаем

$$\int Q(x, u) dS \geq \sum_{k=1}^p \int Q(\varphi_k u) dS - c \sum_{k=1}^p \left[r \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{\alpha\} = m-l, l} |D^\alpha u|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{\alpha\} < m-1-l, l} |D^\alpha u|^2 \right] dS_k. \quad (3.10)$$

Из неравенства (3.7) имеем

$$\int Q(\varphi_k u) dS \geq c \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{\alpha\} = m-l, l} |D^\alpha \varphi_k u|^2 \right] dS \equiv c |D^m \varphi_k u|^2_\Delta \equiv$$

$$\equiv c \int |D^m \varphi_k u(x)|^2_\Delta dS. \quad (3.11)$$

Так же, как в случае разности $\varphi_k^2 Q(u) - Q(\varphi_k u)$, оценивая на S_k выражение

$$|D^m \varphi_k u|_\Delta - \varphi_k^2(x) |D^m u|_\Delta^2$$

и подставляя в (3.11), получаем

$$\begin{aligned} \int Q(\varphi_k u) dS \geq c \int \varphi_k^2 |D^m u(x)|_\Delta^2 dS - cr \int |D^m u(x)|_\Delta^2 dS_k - \\ - \frac{c}{r} \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{\alpha\} < m-1-l, l} |D^\alpha u|^2 \right] dS_k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Суммируя это неравенство по всем k , подставляя в (3.9) и выбирая r достаточно малым, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int Q(x, u) dS > c \int \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{\alpha\} < m-1-l, l} |D^\alpha u|^2 dS - \\ - \frac{1}{c} \int \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{\alpha\} < m-1-l, l} |D^\alpha u|^2 dS. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь также учтено; что

$$\sum_k \int |D^j u(x)|^2 dS_k \leq N \int |D^j u(x)|^2 dS \quad (j-\text{любое}),$$

где N — максимальное число S_k , которым может принадлежать фиксированная точка плоскости S .

Исходное неравенство следует из неравенства (3.13) и предыдущей леммы.

Применим к уравнению (1.1) оператор $\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma$

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma a(u) &\equiv Pa \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma u \right) + \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma Pa(u) - Pa \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma u \right) + \\ &+ \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha D^\alpha u = \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma f. \end{aligned}$$

Сделав приведение подобных членов в последних трех слагаемых и введя соответствующие обозначения, запишем уравнение в следующем виде:

$$Pa \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma u \right) + \sum_{|\alpha| < m, q} \overline{a_\alpha} D^\alpha u = \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma f. \quad (3.14)$$

В качестве разделяющего оператора можно взять выражение $b = b \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma u \right)$. Тогда

$$\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma a \cdot \overline{b} + \overline{\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma a} \cdot b = \sum (D_j + \overline{D_j}) B^j + B^0,$$

где $B^j(x, u, u) = A^j \left(x, \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma u, \overline{\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma u} \right) \quad (j=1, \dots, n)$, а

$$B^0(x, u, \bar{u}) = - \sum D_I (a_\alpha(x) b_\beta(x)) K_{\alpha\beta}^I \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma u, \overline{\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma u} \right) + \\ + b \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma u \right) \sum_{|\alpha| < m, q} \tilde{a}_\alpha D^\alpha u.$$

Для $B^1(x, u, \bar{u})$ имеет место оценка

$$\int B^1(x, u, \bar{u}) dS > c \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{\alpha\} < m-l, l+q} |D^\alpha u|^2 \right] dS - \\ - \frac{1}{c} \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{\alpha\} < m-l-1, l+q} |D^\alpha u|^2 \right] dS. \quad (3.15)$$

Пусть имеем интегральное уравнение

$$\rho(\tau) = \int_0^\tau K(t) \rho(t) dt + \sigma(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad (3.16)$$

K и σ — непрерывные функции при $\tau > 0$ и $\int_0^1 K(t) dt = \infty$. Если $K > 0$, то

$$\rho^* = \exp \left\{ \int_1^\tau K(t) dt \right\} \quad (3.17)$$

является непрерывным ненулевым решением однородного уравнения.

Ниже нам понадобится следующий результат.

Л е м м а 4 ([3]). Пусть $\sigma(t)$ — непрерывная функция при $0 \leq t \leq 1$,

удовлетворяет условию $\int_0^1 \frac{K(t) \sigma(t)}{\rho^*(t)} dt < \infty$. Тогда, если

$$\rho_n(\tau) \leq \int_0^\tau K(t) \rho_{n-1}(t) dt + \sigma(\tau) \quad (n \geq 1, \rho_0 = \sigma), \quad (3.18)$$

то ряд $\rho(\tau) = \sum_{n=0}^\infty \rho_n(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq 1$) равномерно сходится и его сумма удовлетворяет условию

$$\rho(\tau) = \rho^*(\tau) O(1) \quad \text{при } \tau \rightarrow +0$$

и оценке

$$\rho(\tau) \leq \rho^*(\tau) \int_0^\tau \frac{K(t) \sigma(t)}{\rho^*(t)} dt. \quad (3.19)$$

§ 4. Достаточные условия корректности задачи Коши

Теперь сформулируем и докажем основной результат работы.

Теорема 2. Пусть в задаче (1.1) — (1.2) коэффициенты уравнения и правая часть — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$1. \quad c_2 \lambda^{2\alpha}(x_1) \leq \sum_{\substack{l < j \\ l, j=1}}^{m+1} (v_l(x) - v_j(x))^2 \leq c_1 \lambda^{2\alpha}(x_1),$$

$$c_4 \lambda^{2\beta}(x_1) \leq \sum_{\substack{l < j \\ l, j=1}}^{m+1} (v_l(x) - v_j(x))^2 \leq c_3 \lambda^{2\beta}(x_1),$$

где $\lambda(x_1) \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow 0$, $D_1 \lambda(x_1) > 0$, $\lambda(x_1) > 0$;

$$2. \quad |D_j^k v_l(x)| \leq c \lambda^s(x_1) \quad (s > 0), \quad (j=2, \dots, n), \quad (k=1, \dots, q), \\ (i=1, \dots, m+1);$$

$$3. \quad \sum D_l (a_\alpha(x) b_\beta(x)) K'_{\alpha\beta} \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} \zeta_\gamma, \quad \overline{\sum_{|\gamma| < 0, q} \zeta_\gamma} \right) - b \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} \zeta_\gamma \right) \sum_{|\alpha| < m, q} \bar{a}_\alpha(x) \zeta_\alpha \leq \\ \leq c \frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)} \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{\alpha\} < m-l, l+q} |\zeta_\alpha|^2 x_1^{2\alpha_1 - (m-l)} \quad (q > m+1);$$

$$4. \quad D_1 \left(\frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \right) \leq c \frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)} \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)},$$

тогда для любого $f \in H^{0, q+d}$, где d — достаточно большая постоянная, существует единственное решение задачи (1.1) — (1.2) $u \in H^{m+1, q-1-m}$. Справедлива оценка

$$|D^{m+1, q-1-m} u, V_t|^2 \leq c |D^{0, q+d} f, V_t|^2. \quad (4.1)$$

Доказательство. Сначала покажем, что если выполнены условия теоремы, то за счет гладкости $f(x)$ по $(x_2, \dots, x_n)$ можно заменить уравнение (1.1) аналогичным уравнением, у которого правая часть имеет порядок $\lambda^{\epsilon_1}(x_1)$, где $c_1 > 0$ — произвольно. Из условия 3 следует, что коэффициенты $a_\alpha(x)$ (см. (3.14)) $a_1 \neq |\alpha|$ при $x_1 \rightarrow 0$ имеют порядок $D_1 \lambda^s(x_1)$ $s > 0$, а из условия 2 следует, что и $a_\alpha(x)$ $a_1 \neq |\alpha|$ имеют порядок $D_1 \lambda^s(x_1)$ $s > 0$.

Отнимем из уравнения (1.1) уравнение

$$a'(\bar{u}) \equiv D_1^{m+1} \bar{u} + \sum_{\alpha_1 - |\alpha| < m} a_\alpha(x) D^\alpha \bar{u} = f(x). \quad (4.2)$$

Однородная задача Коши для этого обыкновенного дифференциального уравнения, очевидно, имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$|D_1^{m+1} \bar{u}| \leq \text{const} \max_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \\ 0 \leq \tau \leq x_1}} |f(\tau, x_2, \dots, x_n)|. \quad (4.3)$$

Для функции $\bar{u}_1 = \bar{u} - \bar{u}$ получим уравнение

$$\alpha(u_1) = (\alpha' - \alpha) \bar{u} \equiv f_1(x) \quad (4.4)$$

с нулевыми начальными условиями, где $|f_1| \leq c D_1 \lambda^{\delta}(x_1)$. Зная решение полученной задачи и прибавляя к нему $\bar{u}$, получим решение первоначальной задачи. Функция $\bar{u}$ должна иметь непрерывные производные порядка $m+1$ по $(x_2, \dots, x_n)$, поэтому такую же гладкость должна иметь $f(x)$. Отнимем из полученного уравнения уравнение

$$\alpha'(\bar{u}_1) = f_1(x). \quad (4.5)$$

Решение $\bar{u}_1$ удовлетворяет условию $|D_1^{m+1} \bar{u}_1| \leq c D_1 \lambda^{\delta}(x_1)$, то есть $|D_1^m \bar{u}_1| \leq c \lambda^{\delta}(x_1)$. Для разности $u_2 = u_1 - \bar{u}_1$ получим уравнение

$$\alpha(u_2) = (\alpha' - \alpha) \bar{u}_1 \equiv f_2, \quad (4.6)$$

где $|f_2| \leq c D_1 \lambda^{\delta} \cdot \lambda^{\delta}$. Продолжая аналогичным образом, на n -ом шаге получим

$$\alpha(u_n) = (\alpha' - \alpha) \bar{u}_{n-1} \equiv f_n, \quad (4.7)$$

где $\alpha'(\bar{u}_{n-1}) = f_{n-1}$, $|f_n| \leq c D_1 \lambda^{\delta} \lambda^{\delta(n-1)}$, $n \geq 1$.

При этом функция $f(x)$ должна иметь производные порядка $(m+1)n=d$ по $(x_2, \dots, x_n)$. Выбрав n достаточно большим, получим $\delta(n-1) = c_1$. Первоначальная неизвестная функция равна

$$u = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} \bar{u}_k \quad (\bar{u}_0 \equiv \bar{u}, \quad f_0 \equiv f). \quad (4.8)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |D^{m+1, q-1-m} u, V_t|^2 &\leq c \left(|D^{m+1, q-1-m} u_n, V_t|^2 + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} |D^{m+1, q-1-m} \bar{u}_k, V_t|^2 \Big) \leq c \left(|D^{m+1, q-1-m} u_n, V_t|^2 + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} |D^{0, q} f_k, V_t|^2 \Big) \leq c \left(|D^{m+1, q-1-m} u_n, V_t|^2 + |D^{0, q} f, V_t|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

В дальнейшем нам понадобится следующая оценка:

$$\begin{aligned} \int_{|\tau| < 0, q} \sum |D^{\tau} \lambda^{-c_1} f_n(x)| dV_t &= \int \sum_{|\tau| < 0, q} |D^{\tau} \lambda^{-c_1} (\alpha' - \alpha) \bar{u}_{n-1}| dV_t \leq \\ &\leq c \int_0^t D_1 \lambda^{\delta} \cdot \lambda^{-c_1} \int |D^{m, q+1} \bar{u}_{n-1}| dS_{\tau} d\tau \leq \\ &\leq c \int_0^t D_1 \lambda^{\delta} \cdot \lambda^{-c_1} \int |D^{0, q+m+1} f_{n-1}| dV_{\tau} d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\leq c \int \sum_{|\gamma| < 0, q+m+1} |D^\gamma \lambda^{-c_1+\delta} f_{n-1}| dV_t.$$

Сделав аналогичные оценки n раз и возведя в квадрат обе части неравенства, после очевидных оценок получим

$$|D^{0,q} \lambda^{-c_1} f_n, V_t|^2 \leq c |D^{0,q+(m+1)n} f, V_t|^2 = c |D^{0,q+d} f, V_t|^2. \quad (4.10)$$

Таким образом, достаточно решить задачу (1.1)–(1.2) в классе функций $|f| \leq c \lambda^{c_1}(x_1)$.

Получим теперь для решения энергетическую оценку. Пусть существует решение уравнения

$$a(v) = \lambda^{c_1}(x_1) g(x) \quad (c_1 = \text{const}) \quad (4.11)$$

с однородными начальными условиями, где $v \equiv u_n$, $\lambda^{c_1} g \equiv f_n$. Из уравнения (4.11) и нулевых начальных условий следует, что

$$\sum_{k=0}^m |D_1^k v|^2 \leq c \lambda^{c_1}(x_1) \quad (c_1 > 0). \quad (4.12)$$

Учитывая компактность носителя v , проинтегрируем тождество

$$2 \operatorname{Re} \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma a(v) \cdot b \left(\overline{\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma v} \right) \right) = \sum_{j=1}^n D_j B^j(x, v, \bar{v}) + B^0(x, v, \bar{v}) \quad (4.13)$$

по V_τ

$$\begin{aligned} \int B^1(x, v, \bar{v}) dS_\tau &= \int B^1(x, v, \bar{v}) dS_0 - \int B^0(x, v, \bar{v}) dV_\tau + \\ &+ 2 \int \operatorname{Re} \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma a(v) \cdot b \left(\overline{\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma v} \right) \right) dV_\tau, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\int B^1(x, v, \bar{v}) dS_0 = 0, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} 2 \left| \int \operatorname{Re} \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma a(v) \cdot b \left(\overline{\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma v} \right) \right) dV_\tau \right| &\leq \\ &\leq c \int \left| \lambda^{c_1}(x_1) \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma g(x) \right| \left| b \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma v \right) \right| dV_\tau \equiv \sigma(\tau). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из условия 3 следует, что

$$\begin{aligned} & - \int B^0(x, v, \bar{v}) dV_\tau \leq \\ & \leq c \int \left| \frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)} \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-l, l+q}} |D^\alpha v|^2 x_1^{2[\alpha_1 - (m-l)]} \right| dV_\tau. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Оценка (4.12) обеспечивает сходимость интеграла в правой части.

Используя (4.15), (4.16), (4.17) и оценку снизу для $\int B^1(x, v, \bar{v}) dS$,

п о л у ч а е м

$$c \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{a\} < m-l, l+q} |D^a v|^2 \right] dS_x - \frac{1}{c} \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{a\} < m-1-l, l+q} |D^a v|^2 \right] dS_x \leq \\ \leq c_2 \int \left[\frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)} \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{a\} < m-l, l+q} |D^a v|^2 x_1^{2[a, -(m-l)]} \right] dV_x + o(\tau). \quad (4.18)$$

Заметим, что

$$\int \varphi(x) \sum_{\{a\} < r, p} |D^a v|^2 dS_x \leq c \int |D_1 \varphi(x)| \sum_{\{a\} < r+1, p} |D^a v|^2 dV_x \quad (4.19)$$

и

$$\int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{a\} < m-l, l+q} |D^a v|^2 \tau^{2[a, -(m-l)]} \right] dS_x \leq \\ \leq c \operatorname{essup}_{0 < x_1 < \tau} \int \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\substack{a_1 = m-l \\ |a'| < l+q}} |D^a v|^2 dS_{x_1} \leq \\ \leq c \operatorname{essup}_{0 < x_1 < \tau} \int \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{a\} < m-l, l+q} |D^a v|^2 dS_{x_1}.$$

Поэтому, учитывая условие 4, приходим к оценке

$$\operatorname{essup}_{0 < x_1 < \tau} \int \sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{a\} < m-l, l+q} |D^a v|^2 dS_{x_1} \leq \\ \leq c \int_0^\tau \left[\frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)} \operatorname{essup}_{0 < r < x_1} \left(\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{a\} < m-l, l+q} |D^a v|^2 dS_r \right) \right] dx_1 + o(\tau). \quad (4.20)$$

Используя (3.19) — результат леммы 4, получаем

$$\operatorname{essup}_{0 < x_1 < \tau} \int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{a\} < m-l, l+q} |D^a v|^2 \right] dS_{x_1} \leq c_3 \lambda^c(\tau) \int_0^\tau \frac{D_1 \lambda(x_1) \sigma(x_1)}{\lambda^{c+1}(x_1)} dx_1$$

или

$$\int \left[\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{a\} < m-l, l+q} |D^a v|^2 \right] dS_x \leq c_3 \lambda^c(\tau) \int_0^\tau \frac{D_1 \lambda(x_1) \tau(x_1)}{\lambda^{c+1}(x_1)} dx_1. \quad (4.21)$$

Обозначая левую часть $|D^{m,q} v, S_x|_\Delta^2$

$$|D^{m,q} v, S_x|_\Delta^2 \leq \\ \leq c_4 \int_0^\tau \frac{D_1 \lambda(x_1) \int_0^{x_1} \lambda^{c_1}(r) \left| \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma g(x) \right| \left| b \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma v \right) \right| dS_r dr}{\lambda^{c+1}(x_1)} dx_1. \quad (4.22)$$

Если $c_1 = c_3 + \beta$, где β — постоянная, фигурирующая в условии 1, то

$$|D^{m,q} v, S_x|_\Delta^2 \leq c_4 \int \left[\lambda^\beta(x_1) \left| \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma g(x) \right| \left| b \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma v \right) \right| \right] dV_x \int \frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda^{c+1-c_3}(x_1)} dx_1 \quad (4.23)$$

и если $c+1-c_5 < 1$, то

$$|D^{m,q} v, S_\tau|^2 \leq c \int \lambda^{\beta_1}(x_1) \left| \sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma g(x) \right| \left| b \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma v \right) \right| dV_\tau. \quad (4.24)$$

Проинтегрируем по τ от 0 до t

$$|D^{m,q} v, V_t|^2 \leq c r^{-1} \int \sum_{|\gamma| < 0, q} |D^\gamma g(x)|^2 dV_t + c r \int \lambda^{\beta_1}(x_1) \left| b \left(\sum_{|\gamma| < 0, q} D^\gamma v \right) \right|^2 dV_t.$$

Взяв r достаточно малым, получим

$$|D^{m,q} v, V_t|^2 \leq c |D^{0,q} g(x), V_t|^2. \quad (4.25)$$

Учитывая, что

$$\sum_{l=0}^m \frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l} \sum_{\{\alpha\} < m-l, l+q} |D^\alpha v|^2 \geq c \sum_{\{\alpha\} < m, q} |D^\alpha v|^2 \geq c \sum_{\{\alpha\} < m, q-m} |D^\alpha v|^2, \quad (4.26)$$

получим

$$|D^{m, q-m} v, V_t|^2 \leq c |D^{0,q} g(x), V_t|^2. \quad (4.27)$$

Из тождества

$$D^\beta v = D^\gamma a(v) - \sum D^\gamma a_\alpha D^\alpha v, \quad (4.28)$$

$$|\alpha| \leq m+1, \quad \alpha_1 \leq m, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \quad |\beta| \leq q, \quad \beta_1 = m+1, \\ \gamma = (0, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

приходим к оценке

$$|D^{m+1, q-1-m} v, V_t|^2 \leq c |D^{0,q} g(x), V_t|^2. \quad (4.29)$$

Учитывая неравенства (4.9) и (4.10), получаем

$$|D^{m+1, q-1-m} u, V_t|^2 \leq c |D^{0, q+d} f, V_t|^2. \quad (4.30)$$

Из этой оценки следует единственность и устойчивость решения.

Для доказательства существования решения воспользуемся следующей известной процедурой. Введем оператор осреднения. Пусть $j_0 \in E([0, 1])$ и обращается в нуль в окрестности 0 и t , $j_0 \geq 0$ и

$$\int j_0(s) ds = 1, \quad (4.31)$$

$$j_\varepsilon(s) = \varepsilon^{-1} j_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Оператор осреднения для функции $f(x) \in H^{0, q+d}$, $x \in R^n$ определим по формуле

$$T_\varepsilon f(x) = \int f(x_1-s, x_2, \dots, x_n) j_\varepsilon(s) ds = \int j_\varepsilon(x_1-s) f(s, x_2, \dots, x_n) ds, \quad (4.32)$$

$T_\varepsilon f(x)$ бесконечно дифференцируема по x_1 , равна нулю в окрестности гиперплоскости $x_1=0$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|D^{0, q+d}(T_* f - f)\|^2 \rightarrow 0. \quad (4.33)$$

Для таких функций задача (1.1)—(1.2) имеет решение. Обозначим через $u_*(x)$ решение для $T_* f(x)$. Тогда

$$\|D^{m+1, q-1-m}(u_{*1} - u_{*2})\|^2 \leq c \|D^{0, q+d}(T_{*1} f - T_{*2} f)\|^2, \quad (4.34)$$

то есть последовательность $u_*(x)$ фундаментальна и из полноты пространства $H^{p, q}$ следует, что имеет предел $u(x) \in H^{m+1, q-1-m}$, который и является решением задачи (1.1)—(1.2). Теорема 2 доказана.

В случае уравнения второго порядка, записанного в симметрическом виде

$$D_1^2 u - \sum_{l=2}^n D_l (v_1^2(x) \mu_l^2(x) D_l u) + \sum_{l=1}^n b_l(x) D_l u + c_0 u = f, \quad (4.35)$$

условие 3 теоремы 2 принимает вид

$$\begin{aligned} c \frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)} v_1^2(x) \sum_{l=2}^n \xi_l^2 - D_1 v_1^2(x) \sum_{l=2}^n \xi_l^2 + c \frac{D_1 \lambda}{\lambda} |\xi_1|^2 - \\ - \sum_{l=1}^n b_l(x) \xi_l \xi_1 - c_0 \xi_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Для выполнения этого условия достаточно, чтобы существовала постоянная $c > 0$ такая, что

$$c \left(\frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)} \right)^2 v_1^2(x) \sum_{l=2}^n \xi_l^2 - \left(\sum_{l=2}^n b_l(x) \xi_l \right)^2 \geq 0,$$

$$|b_l(x)| \leq \text{const} \frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)},$$

$$|c_0(x)| \leq \text{const} \frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)} x_1^{-1}, \quad (\text{Im } \xi_l = 0).$$

Это, по существу, совпадает с условием О. А. Олейник [4] при $\lambda(x_1) \sim x_1^\beta$.

В случае уравнения четвертого порядка

$$\begin{aligned} \left(D_1^2 - v_1^2(x) \sum_{l=2}^n D_l^2 \right) \left(D_1^2 - v_2^2(x) \sum_{l=2}^n D_l^2 \right) u + \sum_{l, j, k=1}^n a_{lj k}(x) D_l D_j D_k u + \\ + \sum_{l, j=1}^n a_{lj}(x) D_l D_j u + \sum_{l=1}^n a_l(x) D_l u + a_0(x) u = f(x), \end{aligned}$$

где $a_{ijl}(x) \equiv a_l(x)$ для всех i , для которого, насколько нам известно, корректность задачи Коши до сих пор не изучена, из результатов теоремы 2 получаются следующие достаточные условия корректности:

1. Существует постоянная $c > 0$, для которой матрица $D = \|d_{ij}\|_1^4$ является неотрицательно определенной, где

$$d_{11} = c \frac{D_1 \lambda}{\lambda} \Delta_1 - a_{11}, \quad d_{22} = c \frac{D_1 \lambda}{\lambda} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} - D_1 (v_1^2 + v_2^2),$$

$$d_{33} = c \frac{D_1 \lambda}{\lambda} \frac{\Delta_3}{\Delta_2} - \left[D_1 (v_1^4 + v_2^4) + \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) a_{11} \right],$$

$$d_{44} = c \frac{D_1 \lambda}{\lambda} \frac{\Delta_4}{\Delta_3} - D_1 \left[(v_1^2 + v_2^2) \lambda_1^2 \lambda_2^2 \right],$$

$$d_{21} = d_{13} = \left[D_1 (v_1^2 + v_2^2) - a_{11} + \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) a_{111} \right],$$

$$d_{24} = d_{42} = 2D_1 (v_1^2 v_2^2),$$

а остальные $d_{ij} = 0$.

2. Существуют постоянные $c_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, 7$), для которых

$$c_1 \left(\frac{D_1 \lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \sum_{i=2}^n |\zeta_i^2 \zeta_i|^2 - \left(\sum_{i=2}^n \left[-2D_1 (v_1^2 v_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) a_{111} \right] \zeta_i^2 \zeta_i \right)^2 \geq 0,$$

$$c_2 \left(\frac{D_1 \lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{\Delta_4}{\Delta_2} \sum_{i,j,k=2}^n |\zeta_i \zeta_j \zeta_k|^2 - \left(\sum_{i,j=2}^n \left[v_1^2 v_2^2 D_1 (v_1^2 + v_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) a_{11j} \right] \zeta_i \zeta_j \right)^2 \geq 0,$$

$$c_3 \left(\frac{D_1 \lambda}{\lambda} \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \right)^2 \sum_{i,j=2}^n |\zeta_i \zeta_j|^2 - (v_1^2 + v_2^2)^2 \left(\sum_{i+j=2}^n a_{1ij} \zeta_i \zeta_j \right)^2 \geq 0,$$

$$c_4 \left(\frac{D_1 \lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{\Delta_4}{\Delta_2} \sum_{i,j,k=2}^n |\zeta_i \zeta_j \zeta_k|^2 - (v_1^2 + v_2^2)^2 \left(\sum_{i,j+k=2}^n a_{1ijk} \zeta_i \zeta_j \zeta_k \right)^2 \geq 0,$$

$$c_5 \left(\frac{D_1 \lambda}{\lambda} \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \right)^2 \sum_{i,j=2}^n |\zeta_i \zeta_j|^2 - x_1^2 (v_1^2 + v_2^2)^2 \left(\sum_{i,j=2}^n a_{1ij} \zeta_i \zeta_j \right)^2 \geq 0,$$

$$c_6 \left(\frac{D_1 \lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \sum_{i=2}^n |\zeta_i \zeta_i|^2 - x_1^2 (v_1^2 + v_2^2)^2 \left(\sum_{i=2}^n a_{1i} \zeta_i \zeta_i \right)^2 \geq 0,$$

$$c_7 \left(\frac{D_1 \lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \sum_{i=2}^n |\zeta_i|^2 - x_1^4 (v_1^2 + v_2^2)^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \zeta_i \right)^2 \geq 0,$$

$$|a_{111}(x)| \leq \text{const} \frac{D_1 \lambda}{\lambda}, \quad |a_{11}(x)| \leq \text{const} x_1^{-1} \frac{D_1 \lambda}{\lambda},$$

$$|a_1(x)| \leq \text{const} x_1^{-2} \frac{D_1 \lambda}{\lambda}, \quad |a_0(x)| \leq \text{const} x_1^{-3} \frac{D_1 \lambda}{\lambda}.$$

В частности, при $v_1 = x_1^\alpha$, $v_2 = x_1^\beta$, $\beta < \alpha$, условиями корректности могут служить следующие простые оценки:

$$|a_{I/k}| \leq \text{const } x_1^{3\beta-1},$$

$$|a_I| \leq \text{const } x_1^{\beta-3},$$

$$|a_{I/k}| \leq \text{const } x_1^{2\beta-1},$$

$$|a_{III}| \leq \text{const } x_1^{-1},$$

$$|a_{IIk}| \leq \text{const } x_1^{\beta-1},$$

$$|a_{II}| \leq \text{const } x_1^{-2},$$

$$|a_{IJ}| \leq \text{const } x_1^{2\beta-2},$$

$$|a_I| \leq \text{const } x_1^{-3},$$

$$|a_{II}| \leq \text{const } x_1^{\beta-2},$$

$$|a_0| \leq \text{const } x_1^{-4}.$$

Ереванский государственный университет

Поступила 19.III.1973

Հ. Ռ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ, Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու խնդրի կորեկտությունը մի դասի թույլ հիպերբոլիկ հավասարումների համար: Երևանի պետական համալսարանի տպագրության գործարարություն (ամփոփում)

Հոդվածում քննարկվում է Կոշու խնդիրը որոշ դասի թույլ հիպերբոլիկ հավասարումների համար: Երևանի պետական համալսարանի տպագրության գործարարություն (ամփոփում)

Ապացուցվում է այդ Կոշու խնդրի լուծման գոյությունը, միակությունը և կայունությունը, երբ հավասարման ցածր կարգի անդամների գործակիցները բավարարում են որոշակի հանրահաշվական բնույթի պայմաններին:

A. B. NERSESIAN, A. H. HOVANESIAN. *On the correctness of the Chauchy's problem for a certain class of weakly hyperbolic equations (summary)*

In the present paper the Chauchy's problem for weakly hyperbolic equations from a certain class is considered. Under the assumption that characteristic numbers of the equation vanish on the initial hyperplane, and the coefficients of low order terms satisfy a certain algebraic conditions, the correctness of the Chauchy's problem is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Горди́н. Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, 1961.
2. А. Б. Нерсисян. Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения произвольного порядка с данными на линии вырождения, Дифференциальные уравнения, 4, № 9, 1968.
3. А. Б. Нерсисян. О задаче Коши для гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 181, № 4, 1968, 798—801.
4. О. А. Олейник, Е. В. Радкевич. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, Итоги Науки, серия Математика, Мат. анализ, 1969, Москва, 1971.
5. А. Б. Нерсисян. О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, 3, № 2, 1968.
6. А. Б. Нерсисян. О задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений, Учёные записки ЕГУ, 3(109), 1968.