ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

С. Г. ОВСЕПЯН

НОВЫЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Первоначальные исследования в теории расширений топологических пространств велись в основном теоретико-функциональными или родственными методами [1—3].

В работе [4] П. С. Александров дал новый метод построения расширений топологических пространств, известный под названием метода центрированных систем открытых множеств, и применил его, в частности, к новому построению максимального бикомпактного, или стоун-чеховского, расширения βX вполне регулярного пространства X. Этот метод, будучи весьма плодотворным и универсальным, впоследствии широко применялся многими математиками (см., например, [5—8]). В последнее время в теории расширений топологических пространств В. И. Зайцев [9, 10] успешно применяет также метод проекционных спектров.

В настоящей работе приводится подробное изложение предложенного автором нового подхода в теории расширений топологических пространств, основанного на построении категории так называемых псевдотопологических пространств. Часть результатов настоящей статьи опубликована без доказательств в заметке [11].

В § 1 приведены некоторые используемые в статье сведения о псевдотопологических пространствах.

В § 2 каждому топологическому пространству (X, V) приписывается некоторое семейство псевдотопологических пространств и устанавливается связь между этим семейством и семейством всех расширений пространства (X, V), в которых гомеоморфный образ пространства (X, V) представляет собой плотное открытое подпространство.

§ 3 посвящен описанию некоторых классов расширений топологических пространств.

§ 1. Предварительные определения и обозначения

В этом параграфе приведем некоторые, используемые в статье, сведения о псевдотопологических пространствах [12].

Определение 1. Назовем псевдотопологией (п. т.) пару $(U, >)$, состоящую из непустого множества U и отношения частичного упорядочения $>$ на U, которая удовлетворяет следующим условиям:

(a) $u_1, u_2 \in U$, $u_1 > u_2$ и $u_2 > u_1 \Rightarrow u_1 = u_2$,

(b) $\forall u \in U$ $u > u$, т. е. отношение $>$ рефлексивно,

(c) U обладает наибольшим и наименьшим элементами,

(d) U — полное.

Наименьший элемент п. т. $(U, >)$ будем обозначать через θ_U и в дальнейшем (когда это не может вызвать недоразумения) мы будем опускать символ $>$ и обозначать п. т. через U.

Определение 2. Псевдообъединением элементов $u_\alpha \in U$ для всех α, принадлежащих произвольному индексному множеству A, назовем $\sup \{u_\alpha;\ \alpha \in A\}$ и обозначим символом $\dot{\bigcup}_{\alpha \in A} u_\alpha$ или $\dot{\bigcup} \{u_\alpha;\ \alpha \in A\}$.

Аналогично, псевдопересечением элементов $u_j \in U$ для всех j, принадлежащих любому конечному множеству индексов J, назовем $\inf \{u_j;\ j \in J\}$ и обозначим символом $\dot{\bigcap}_{j \in J} u_j$ или $\dot{\bigcap} \{u_j;\ j \in J\}$.

Ясно, что любая топология с отношением обратного включения $\supset$, представляет собой п. т.

Пусть f—отображение (не обязательно однозначное) множества U в множество V. Для любого подмножества U' множества U положим

$$f(U') = \cup \{f(u);\ u \in U'\},$$

где $f(u)$—множество всех образов элемента u. В классе многозначных отображений, очевидно, каждое отображение $f\colon U \to V$ имеет единственное обратное $f^{-1}\colon f(U) \to U$, где $\forall v \in f(U)$, $u \in f^{-1}(v)$ тогда и только тогда, когда $v \in f(u)$.

Определение 3. Отображение $f\colon U \to V$ назовем морфизмом п. т. U в п. т. V, если выполнены следующие условия:

(M_1) $\theta_V \in f(\theta_U)$,

(M_2) $v_j \in f(u_j)$ $\forall j$ из произвольного конечного индексного множества

$$J \Rightarrow \dot{\bigcap_{j \in J}} v_j \in f\Big(\dot{\bigcap_{j \in J}} u_j\Big),$$

(M_3) $v_\alpha \in f(u_\alpha)$ $\forall \alpha$ из произвольного множества индексов

$$A \Rightarrow \dot{\bigcup_{\alpha \in A}} v_\alpha \in f(\dot{\bigcup} u_\alpha).$$

Морфизм $f\colon U \to V$ назовем сильным тогда и только тогда, когда из $\theta_V \in f(u)$ следует, что $u = \theta_U$.

Предложение 1. *Пусть f — морфизм п. т. U на п. т. V, тогда обратное к нему отображение f^{-1} является морфизмом п. т. V на п. т. U.*

Доказательство непосредственно следует из определения морфизма. В самом деле, так как по (M_1) $\theta_V \in f(\theta_U)$, то $\theta_U \in f^{-1}(\theta_V)$, т. е. f^{-1} удовлетворяет условию (M_1). Пусть $u_j \in f^{-1}(v_j)$ $\forall j$ из конечного множества J, тогда $v_j \in f(u_j)$ и в силу (M_2) $\dot{\bigcap}_{j \in J} v_j \in f(\dot{\bigcap}_{j \in J} u_j)$, следовательно $\dot{\bigcap}_{j \in J} u_j \in f^{-1}(\dot{\bigcap}_{j \in J} v_j)$, т. е. f^{-1} удовлетворяет условию (M_2). Аналогично проверяется, что f^{-1} удовлетворяет и условию (M_3).

Легко доказать также следующее

Предложение 2. *Композиция $\psi = g \circ f$ морфизмов $f: U \to V$ и $g: V \to W$ является морфизмом п. т. U в п. т. W. При этом, если f и g — сильные морфизмы, то ψ—сильный морфизм.*

В самом деле, так как $\theta_W \in g(\theta_V)$ и $\theta_V \in f(\theta_U)$, то $\theta_W \in \psi(\theta_U)$. Пусть $w_j \in \psi(u_j)$ $\forall j \in J$, где J—конечное множество, тогда существует $v_j \in f(u_j)$ такое, что $w_j \in g(v_j)$ и так как f и g удовлетворяют условию (M_2), то $\dot{\bigcap\limits_{j\in J}} w_j \in \psi(\dot{\bigcap\limits_{j\in J}} u_j)$. Аналогично проверяется, что ψ удовлетворяет и условию (M_3).

Пусть $\theta_W \in \psi(u)$, тогда существует $v \in f(u)$ такое, что $\theta_W \in g(v)$, отсюда в случае, когда f и g—сильные морфизмы, следует $v = \theta_V$ и, следовательно, $u = \theta_U$, т. е. ψ — сильный морфизм.

Определение 4. Две п. т. U и V назовем изоморфными, если существует биективный морфизм п. т. U на п. т. V.

Заметим, что каждый гомеоморфизм h одного топологического пространства (Y, U) на другое (X, V) естественным образом порождает изоморфизм $h_*: U \to V$, где $\forall u \in U$ $h_*(u) = h(u)$.

Определение 5. Непустое подмножество p п. т. Φ назовем фильтром п. т. Φ, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(F_1) $\theta_\Phi \overline{\in} p$,

(F_2) $\varphi_1, \varphi_2 \in p \Rightarrow \varphi_1 \dot{\cap} \varphi_2 \in p$,

(F_3) $\varphi \in p$, $\varphi_1 \in \Phi$ и $\varphi_1 > \varphi \Rightarrow \varphi_1 \in p$.

Определение 6. Псевдотопологическим пространством (п.т.п.) назовем пару $\{P, \Phi\}$, состоящую из п.т. Φ и из некоторого непустого семейства P фильтров этой п.т.

Если семейство P фильтров п.т. Φ обладает тем свойством, что $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$ существует $p \in P$ такой, что только один из φ_1, φ_2 принадлежит p, то будем говорить, что P различает элементы Φ.

Учитывая предложение 2, легко проверить, что п.т. образуют категорию, если определить Mor (U, V), как множество морфизмов п.т. U в п.т. V. П.т.п. также образуют категорию (см. [12]).

П.т.п. $\{P, \Phi\}$ назовем бикомпактным, если для каждого подсемейства $\Phi' \subset \Phi$, обладающего тем свойством, что $\forall p \in P$ существует $\varphi' \in \Phi'$ такое, что $\varphi' \in p$, существует конечное подсемейство $\Phi'' \subset \Phi'$ с таким же свойством.

Будем говорить, что п.т.п. $\{P, \Phi\}$ удовлетворяет T_1 аксиоме отделимости, если для любых двух различных элементов p_1 и p_2 из P существуют $\varphi_1 \in p_1$ и $\varphi_2 \in p_2$ такие, что $\varphi_1 \overline{\in} p_2$ и $\varphi_2 \overline{\in} p_1$.

П.т.п. $\{P, \Phi\}$ назовем хаусдорфовым, если для любых двух различных элементов p_1 и p_2 из P существуют φ_1 и φ_2 из Φ такие, что $\varphi_1 \in p_1$, $\varphi_2 \in p_2$ и $\varphi_1 \dot{\cap} \varphi_2 = \theta_\Phi$.

Пусть $\{P, \Phi\}$—п.т.п. Для каждого $\varphi \in \Phi$ обозначим через s_φ подмножество $\{p;\ p \in P,\ \varphi \in p\}$ множества P, и пусть $\hat{S}$ — семейство всех s_φ, когда φ пробегает все Φ. Рассмотрим отображение $l: \Phi \to \hat{S}$, которое каждому $\varphi\in\Phi$ сопоставляет $l(\varphi)=s_\varphi$. Нетрудно проверить следующие свойства этого отображения:

$$l\left(\dot{\bigcap_{j\in J}}\varphi_j\right)=\bigcap_{j\in J}l(\varphi_j) \tag{1}$$

и

$$l\left(\dot{\bigcup_{\alpha\in A}}\varphi_\alpha\right)\supset\bigcup_{\alpha\in A}l(\varphi_\alpha), \tag{2}$$

где J — конечное, а A — произвольное индексные множества.

В самом деле, пусть $\varphi=\dot{\bigcap\limits_{j\in J}}\varphi_j$ и $p\in l(\varphi)$, тогда $\varphi\in p$ и в силу (F_3) $\varphi_j\in p$, т. е. $\forall j\in J$ $p\in l(\varphi_j)$, следовательно $p\in\bigcap\limits_{j\in J}l(\varphi_j)$.

Обратно, пусть $p\in\bigcap\limits_{j\in J}l(\varphi_j)$, тогда $p\in l(\varphi_j)$ $\forall j\in J$, следовательно $\varphi_j\in p$ и в силу (F_2) $\varphi\in p$, т. е. $p\in l(\varphi)$.

Пусть теперь $p\in\bigcup\limits_{\alpha\in A}l(\varphi_\alpha)$, тогда $p\in l(\varphi_{\alpha_0})$ для некоторого $\alpha_0\in A$, т. е. $\varphi_{\alpha_0}\in p$ и в силу (F_3) $\dot{\bigcup\limits_{\alpha\in A}}\varphi_\alpha\in p$, значит $p\in l\left(\dot{\bigcup\limits_{\alpha\in A}}\varphi_\alpha\right)$.

Из (1) следует, что $\dot{S}$ — база некоторой топологии S на множестве P.

Таким образом, определено отображение F множества всех п.т.п. в множество топологических пространств, которое каждому п.т.п. $\{P, \Phi\}$ сопоставляет вышеописанным способом вполне определенное топологическое пространство $(P, S)=F\{P, \Phi\}$.

§ 2. Связь псевдотопологических пространств с расширениями топологических пространств

Расширением топологического пространства (X, V) называется пара $[(Z, W); \beta]$, где β—гомеоморфизм пространства (X, V) на плотное истинное подпространство пространства (Z, W).

В тех случаях, когда гомеоморфизм β является канонической инъекцией множества X в множество Z, соответствующее расширение будем обозначать просто через (Z, W).

В можестве всех расширений данного пространства вводится отношение $>$ частичного упорядочения следующим образом: $[(Z_1, W_1); \beta_1]>>[(Z_2, W_2); \beta_2]$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение H пространства (Z_1, W_1) на пространство (Z_2, W_2) такое, что $\beta_2=H\circ\beta_1$. Если в качестве H можно взять гомеоморфизм, то указанные расширения называются топологически эквивалентными.

Обозначим через $M(V)$ семейство всех сильных морфизмов, каждый из которых переводит некоторую топологию U на топологию V. Всюду в дальнейшем предполагается, что $X\cap Y=\varnothing$, где $Y=\bigcup\{u;\ u\in U\}$ (в противном случае следует рассматривать различные экземпляры одного и того же множества).

Два морфизма $f_1: U_1 \to V$ и $f_2: U_2 \to V$ из $M(V)$ будем считать эквивалентными тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм h пространства (Y_1, U_1) на пространство (Y_2, U_2) такой, что $f_1 = f_2 \circ h_*$, где Y_i — пространство топологии U_i $(i=1, 2)$.

Пусть $[(Z, W); \beta]$—некоторое расширение пространства (X, V), и (Y, U) — подпространство пространства (Z, W), где $Y = Z \setminus \beta(X)$. Легко проверить, что отображение $J_U^W: W \to U$, где $\forall w \in W\ J_U^W(w) = w \cap Y \in U$, является однозначным морфизмом топологии W на топологию U. В силу предложения 1 обратное к нему отображение $(J_U^W)^{-1}$, которое будем обозначать через J_W^U, является морфизмом топологии U на топологию W. Так как $\forall u \in U$ и $\forall w \in J_W^U(u)$ имеем $u \subset w$, то из $w = \varnothing$ следует, что $u = \varnothing$, и стало быть, J_W^U — сильный морфизм. Пусть W индуцирует на $X' = \beta(X)$ топологию V'. Учитывая, что (X', V') — плотное подпространство пространства (Z, W), легко проверить, что $J_{V'}^W$— сильный морфизм топологии W на топологию V'. В силу предложения 2 $f' = J_{V'}^W \circ J_W^U$ является сильным морфизмом топологии U на V', и так как изоморфизм п. т. всегда является сильным морфизмом, то $f = \beta_*^{-1} \circ f'$ — сильный морфизм топологии U на топологию V, т. е. $f \in M(V)$. Таким образом, каждому расширению пространства (X, V) указанным способом сопоставляется определенный морфизм из $M(V)$, т. е. имеем отображение

$$\mu: R(V) \to M(V)$$

множества $R(V)$ всех расширений пространства (X, V) в множество $M(V)$.

Теорема 1. *Отображение $\mu: R(V) \to M(V)$ сюръективно, а с точностью до эквивалентности расширений и морфизмов оно является биекцией.*

Доказательство. Пусть $f: U \to V$ — морфизм из $M(V)$, Y — пространство топологии U и W_1 — семейство всех подмножеств множества $Z_1 = X \cup Y$, имеющих вид: $w = u \cup v$, где $u \in U$, а $v \in f(u)$. Исходя из свойств морфизмов и учитывая, что $Y \cap X = \varnothing$, легко проверить, что W_1 является топологией на Z_1. В самом деле, из (M_1) вытекает, что $\varnothing \in W_1$, из (M_2) следует, что пересечение конечного числа элементов из W_1 принадлежит W_1, а из (M_3) следует, что объединение любого семейства элементов из W_1 принадлежит W_1. Так как $X \in V$ и f — сюръективное отображение, то существует $u \in U$ такое, что $X \in f(u)$. Пусть $v \in f(Y)$, тогда в силу (M_3), $X \in f(Y)$, следовательно $Z_1 \in W_1$. Из построения топологии W_1 непосредственно следует, что она на X индуцирует топологию V, а на Y—топологию U. Покажем, что (X, V) — плотное подпространство пространства (Z_1, W_1). В самом деле, пусть $w \in W_1$ и $w \cap X = v$, тогда $w = u \cup v$, где $u \in U$, а $v \in f(u)$, и так как f— сильный морфизм, то из $v = \varnothing$ следует, что $u = \varnothing$, т. е. $w = \varnothing$. Таким образом, каждый морфизм $f \in M(V)$ указанным выше способом порождает определенное расширение (Z_1, W_1) пространства (X, V), следовательно имеем отображение

$$\mu_{-1} : M(V) \to R(V).$$

Легко убедиться, что композиция $\mu \circ \mu_{-1}$ является тождественным отображением множества $M(V)$, следовательно μ—сюръективное отображение.

Покажем, что композиция $\mu_{-1} \circ \mu$ переводит каждое расширение пространства (X, V) в эквивалентное ему расширение. В самом деле, пусть $\xi = [(Z, W); \beta] \in R(V)$, $\mu(\xi) = f: U \to V$, $\mu_{-1}(f) = (Z_1, W_1)$ и $H: Z_1 \to Z$—отображение, которое тождественно на множестве Y, а на X совпадает с β. Учитывая равенство $f' = \beta_* \circ f$ и то, что $w \in W$ тогда и только тогда, когда $w = u \cup v'$, где $u \in U$ и $v' \in f'(u)$, легко проверить, что H—гомеоморфизм пространства (Z_1, W_1) на пространство (Z, W), осуществляющий эквивалентность расширений ξ и (Z_1, W_1).

Пусть $\xi_1 = [(Z_1, W_1); \beta_1]$ и $\xi_2 = [(Z_2, W_2); \beta_2]$— эквивалентные расширения пространства (X, V), $Y_i = Z_i \setminus \beta_i(X)$, (Y_i, U_i)— подпространство пространства $(Z_i, W_i)(i = 1, 2)$, H — гомеоморфизм пространства (Z_1, W_1) на (Z_2, W_2), осуществляющий эквивалентность расширений ξ_1, ξ_2 и h—сужение H на Y_1. Тогда, очевидно, что h— гомеоморфизм пространства (Y_1, U_1) на пространство (Y_2, U_2). Исходя из определения μ нетрудно проверить, что если $\mu(\xi_i) = f_i: U_i \to V$ $(i = 1, 2)$, то $f_1 = f_2 \circ h_*$, т. е. μ эквивалентные расширения переводит в эквивалентные морфизмы.

Обратно, пусть $f_1: U_1 \to V$ и $f_2: U_2 \to V$—эквивалентные морфизмы из $M(V)$, Y_i — пространство топологии $U_i (i = 1, 2)$ и h — гомеоморфизм пространства (Y_1, U_1) на (Y_2, U_2) такой, что $f_1 = f_2 \circ h_*$. Легко видеть, что если $\mu_{-1}(f_i) = (Z_i, W_i)$ $(i, =1, 2)$, то отображение $H: Z_1 \to Z_2$, которое тождественно на X и совпадает с h на Y_1, является гомеоморфизмом (Z_1, W_1) на (Z_2, W_2), т. е. эквивалентные морфизмы μ_{-1} переводит в эквивалентные расширения. Отсюда, учитывая также, что композиция $\mu_{-1} \circ \mu$ каждое расширение переводит в эквивалентное ему расширение, заключаем, что неэквивалентные расширения μ переводит в неэквивалентные морфизмы. Теорема доказана.

Пусть (X_0, V_0)—открытое подпространство пространства (X, V). Скажем, что расширение $[(Z, W); \beta]$ сохраняет V_0 тогда и только тогда, когда X_0—наибольшее открытое множество пространства (X, V), для которого $\beta(X_0)$ открыто в (Z, W). Очевидно V_0 — наибольшее подсемейство топологии V такое, что $\forall v \in V_0$ $\beta_*(v) \in W$.

Пусть $R_V(V_0)$—множество всех расширений пространства (X, V), которые сохраняют V_0, а $M_V(V_0)$ — подмножество множества $M(V)$ такое, что $f \in M_V(V_0)$ тогда и только тогда, когда $f(\varnothing) = V_0$. В случае, когда V_0 совпадает с V, $R_V(V)$ будем обозначать через R_V, а $M_V(V)$ через M_V.

Теорема 1′. *Отображение μ переводит $R_V(V_0)$ на $M_V(V_0)$ и с точностью до эквивалентности расширений и морфизмов является биекцией между ними.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что достаточно доказать первую часть теоремы. Пусть $\xi=[(Z, W); \beta]\in \in R_V(V_0)$ и $\mu(\xi)=f=\beta_*^{-1}\circ f'$. Из определения морфизма $f'=J_V^W\circ J_W^U$ непосредственно следует, что $\beta_*(V_0)=f'(\varnothing)$, следовательно, $f(\varnothing)=V_0$. Обратно, пусть $f\in M_V(V_0)$ и $\mu_{-1}(f)=(Z_1, W_1)$. Имеем $w\in W_1$ тогда и только тогда, когда $w=u\cup v$, где $u\in U$ и $v\in f(u)$, следовательно, $v=w\in W_1$ в том и только в том случае, когда $u=\varnothing$. Таким образом, расширение $\mu_{-1}(f)$ сохраняет $f(\varnothing)=V_0$, т.е. μ_{-1} переводит $M_V(V_0)$ в $R_V(V_0)$ и теорема доказана.

Обозначим через Φ_V семейство подмножеств множества V, состоящее из всех открытых фильтров* пространства (X, V) и из V. В множестве Φ_V введем отношение частичного упорядочения $>$ следующим образом: $\varphi_1>\varphi_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1\subset\varphi_2$. Легко проверить, что Φ_V с указанным отношением образует п. т., наименьшим элементом которой служит V, а псевдообъединение элементов из Φ_V совпадает с пересечением этих же элементов как подмножеств из V.

Подмножество Φ множества Φ_V назовем полуподтопологией п.т. Φ_V, если Φ с тем же отношением $>$ образует п.т. такую, что ее наименьший элемент θ_Φ совпадает с наименьшим элементом п.т. Φ_V и псевдообъединение элементов в Φ совпадает с псевдообъединением тех же элементов в Φ_V.

Таким образом, полуподтопология п. т. Φ_V — это любое семейство открытых фильтров пространства (X, V), замкнутое относительно операции пересечения, дополненное одним элементом — множеством V.

Обозначим через K_V семейство всех п.т.п. $\{\dot{P}, \Phi\}$, где Φ — полуподтопология п. т. Φ_V, а P различает элементы Φ.

Пусть $f: U\to V$ — некоторый элемент из M_V и Φ — семейство всех $f(u)$, когда u пробегает все U, тогда f порождает однозначное отображение

$$\hat{f}: U\to\Phi,$$

где $\forall u\in U$ $\hat{f}(u)=f(u)$.

Предложение 3. *Множество Φ является полуподтопологией п.т. Φ_V.*

Доказательство. Так как $f\in M_V$, то $\hat{f}(\varnothing)=V\in\Phi_V$. Исходя из свойств сильных морфизмов, легко проверить, что если $u\in U$ и $u\neq\varnothing$, то $\hat{f}(u)$ — открытый фильтр пространства (X, V). В самом деле, так как из $\varnothing\in f(u)$ следует $u=\varnothing$, то $\varnothing\,\bar{\in}\,\hat{f}(u)$. Из (M_2) вытекает, что если $v_j\in\hat{f}(u)$ $\forall j\in J$, где J — конечное множество, то $\cap\{v_j;\ j\in J\}\in\hat{f}(u)$.

* Фильтры топологии V мы называем также открытыми фильтрами пространства (X, V).

Пусть $v \in \hat{f}(u)$, $v_1 \in V$ и $v \subset v_1$, тогда учитывая, что $v_1 \in \hat{f}(\varnothing)$, из (M_3) получаем $v_1 \in \hat{f}(u)$. Таким образом, $\forall u \neq \varnothing$ $\hat{f}(u)$ — открытый фильтр пространства (X, V), следовательно, Ф— подмножество п.т. Φ_V. Покажем, что $\hat{f}$ — возрастающее отображение. Пусть $u_1 \supset u_2 \neq \varnothing$ и $v_1 \in \varphi_1 = \hat{f}(u_1)$, тогда $\forall v_2^* \in \varphi_2 = \hat{f}(u_2)$ согласно (M_3) имеем $v_2 = v_1 \cap$ $\cap v_2^* \in \varphi_2$. Так как $v_2 \subset v_1 \in V$ и φ_2—открытый фильтр пространства (X, V), то $v_1 \in \varphi_2$, т. е. $\varphi_1 \subset \varphi_2$ или, что то же самое, $\varphi_1 > \varphi_2$. Далее, для произвольного семейства $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из U справедливо равенство

$$\hat{f}(\bigcup_{\alpha \in A} u_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} \hat{f}(u_\alpha). \tag{3}$$

В самом деле, пусть $u = \bigcup\limits_{\alpha \in A} u_\alpha$, $\varphi = \hat{f}(u)$ и $\varphi_\alpha = \hat{f}(u_\alpha)$, тогда так как $\hat{f}$— возрастающее отображение $\forall \alpha \in A$ $\varphi > \varphi_\alpha$, следовательно $\varphi \subset$ $\subset \bigcap\limits_{\alpha \in A} \varphi_\alpha$. Обратно, если $v \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} \varphi_\alpha$, то $\forall \alpha \in A$ $v \in \varphi_\alpha$, и в силу (M_3) $v \in \varphi$, т. е. равенство (3) верно. Из этого равенства следует, что Ф замкнуто относительно операции пересечения, и так как $\hat{f}(\varnothing) = V \in \Phi$, то Ф — полуподтопология п.т. Φ_V.

Пусть U_y — система всех открытых окрестностей точки y в пространстве (Y, U), где Y—пространство топологии U. Обозначим, для краткости, $\hat{f}(U_y)$ через p_y, и пусть P — множество всех p_y, когда y пробегает все Y. Итак, имеем однозначное отображение

$$h_f : Y \to P,$$

где $\forall y \in Y$ $h_f(y) = p_y \in P$.

Предложение 4. *Каждый элемент* p *множества* P *представляет собой фильтр п.т.* Ф, *и* P *различает элементы* Ф.

Доказательство. Мы видели, что если $u \in U$ и $u \neq \varnothing$, то $\hat{f}(u) \neq \hat{f}(\varnothing) = \theta_\Phi$, следовательно $\theta_\Phi \overline{\in} p$ $\forall p \in P$, т. е. p удовлетворяет условию (F_1). Пусть $\varphi \in p = h_f(y)$, $\varphi_1 \in \Phi$ и $\varphi_1 > \varphi$, т. е. $\varphi_1 \subset \varphi$, тогда существуют $u \in U_y$ и $u_1 \in U$ такие, что $\hat{f}(u) = \varphi$ и $\hat{f}(u_1) = \varphi_1$, и поскольку $u \cup u_1 \in U_y$, то $\hat{f}(u \cup u_1) \in p$. С другой стороны, в силу (3) $\hat{f}(u \cup a_1) = \varphi \cap \varphi_1 = \varphi_1$, т. е. $\varphi_1 \in p$, следовательно p удовлетворяет условию (F_3).

Пусть $\varphi_j \in p$ $\forall j$ из конечного множества J, тогда существует $u_j \in U_y$ такое, что $\varphi_j = \hat{f}(u_j)$. Пусть $u = \cap \{u_j;\ j \in J\}$, тогда $\varphi = \hat{f}(u) \in p$, и так как $\hat{f}$—возрастающее, то $\varphi_j > \varphi$ $\forall j \in J$, следовательно $\varphi^* =$ $= \mathring{\cap} \{\varphi_j;\ j \in J\} > \varphi$, и так как p удовлетворяет условию (F_3), то $\varphi^* \in p$, т. е. p—фильтр п.т. Ф. Покажем теперь, что P различает элементы Ф. Пусть $u_\varphi = \cup \{u;\ \hat{f}(u) = \varphi\}$ и $\hat{U}$ — множество всех u_φ, когда φ пробегает все Φ. В силу равенства (3) имеем $\hat{f}(u_\varphi)=\varphi$ и так как $\hat{f}$ — однозначное отображение, то легко видеть, что сужение $\hat{f}$ на $\hat{U}$ (которое снова обозначим через $\hat{f}$) — биекция между $\hat{U}$ и Φ. Пусть φ_1 и φ_2 — различные элементы из Φ, тогда $u_{\varphi_1}\neq u_{\varphi_2}$, т. е. существует точка y_0, принадлежащая только одному из них. Обозначим $\hat{U}_y=U_y\cap\hat{U}$ и заметим, что $\forall y\in Y\ \hat{f}(\hat{U}_y)=\hat{f}(U_y)$, и так как только одно из u_{φ_1} и u_{φ_2} принадлежит $\hat{U}_{y_0}$, а $\hat{f}$ — биекция на $\hat{U}$, то $p_0=h_f(y_0)$ содержит только одно из φ_1 и φ_2, т. е. P различает элементы Φ.

Согласно предложению 3 и 4, пара $\{P, \Phi\}$, порожденная морфизмом $f\in M_V$, является п.т.п., принадлежащим K_V. Следовательно, имеем отображение

$$\nu: M_V\to K_V,$$

которое каждому $f: U\to V$ из M_V сопоставляет $\nu(f)=\{P, \Phi\}$, где $\Phi=\hat{f}(U)$, а $P=h_f(Y)$.

Легко показать, что эквивалентные морфизмы из M_V ν переводит в один и тот же элемент, однако простые примеры показывают, что образы неэквивалентных элементов из M_V при отображении ν могут совпадать. Ясно, что аналогичными свойствами будет обладать и отображение

$$T=\nu\circ\mu: R_V\to K_V.$$

Пусть R_V^* — множество всех классов эквивалентных между собой расширений из R_V, тогда T порождает, вообще говоря, неинъективное отображение

$$T^*: R_V^*\to K_V,$$

которое каждому $\xi^*\in R_V^*$ сопоставляет $T^*(\xi^*)=T(\xi)$, где ξ — произвольный представитель из класса ξ^*.

Пусть $\{P, \Phi\}\in K_V$ и $F\{P, \Phi\}=(P, S)$, тогда, как было показано в § 1, семейство $\hat{S}$ подмножеств вида $s_\varphi=\{p;\ p\in P,\ \varphi\in p\}$ образует базу топологии S. Множество $\hat{S}$ частично упорядочим отношением обратного включения. Пусть $l:\Phi\to\hat{S}$ — отображение, определенное следующим образом: $\forall\varphi\in\Phi\ l(\varphi)=s_\varphi$.

Предложение 5. *Отображение l является биекцией, причем как l, так и l^{-1} возрастающие.*

Доказательство. Так как по определению K_V, P различает элементы Φ, то для любых различных φ_1 и φ_2 из Φ существует точка $p\in P$, принадлежащая только одному из множеств s_{φ_1} и s_{φ_2}, следовательно $l(\varphi_1)\neq l(\varphi_2)$. Пусть $\varphi_1>\varphi_2$, т. е. $\varphi_1\subset\varphi_2$ и $p\in l(\varphi_2)$, тогда $\varphi_2\in p$ и в силу (F_3) $\varphi_1\in p$, следовательно $p\in l(\varphi_1)$, и, стало быть, $l(\varphi_1)>l(\varphi_2)$. Обратно, пусть $s_1\supset s_2$ и $l^{-1}(s_i)=\varphi_i$ $(i=1, 2)$, тогда согласно (1) $l(\varphi_1 \mathring{\cap} \varphi_2) = s_2$ и так как l — биекция, то $\varphi_2 = \varphi_1 \mathring{\cap} \varphi_2$, следовательно $\varphi_1 > \varphi_2$.

Следствие 1. Для любого семейства $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из $\hat{S}$ если $s = \cup\{s_\alpha;\ \alpha \in A\} \in \hat{S}$, то

$$l^{-1}(s) = \mathring{\cup}\ \{l^{-1}(s_\alpha);\ \alpha \in A\}.$$

Следствие 2. Если подсемейства $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{s_\beta\}_{\beta \in B}$ семейства $\hat{S}$ такие, что

$$\cup\ \{s_\alpha;\ \alpha \in A\} = \cup\ \{s_\beta;\ \beta \in B\} = s,$$

то

$$\mathring{\cup}\ \{l^{-1}(s_\alpha);\ \alpha \in A\} = \mathring{\cup}\ \{l^{-1}(s_\beta);\ \beta \in B\}. \tag{4}$$

В самом деле, пусть $s_{\alpha\beta} = s_\alpha \cap s_\beta$, тогда имеем

$s = \cup\{s_{\alpha\beta};\ \alpha \in A,\ \beta \in B\}$, $s_\alpha = \cup\{s_{\alpha\beta};\ \beta \in B\}$ и $s_\beta = \cup\{s_{\alpha\beta};\ \alpha \in A\}$.

Согласно следствию 1, так как $\forall \alpha \in A$ и $\forall \beta \in B$ $s_{\alpha\beta} \in \hat{S}$, имеем

$$l^{-1}(s_\alpha) = \mathring{\cup}\ \{l^{-1}(s_{\alpha\beta});\ \beta \in B\},$$

$$l^{-1}(s_\beta) = \mathring{\cup}\ \{l^{-1}(s_{\alpha\beta});\ \alpha \in A\},$$

откуда легко следует равенство (4).

Именно следствия 1 и 2 предложения 5 и позволяют распространить отображение l^{-1} из $\hat{S}$ на все S. В самом деле, пусть $s \in S$ и $s = \cup\{s_\alpha;\ \alpha \in A\}$, где $s_\alpha \in \hat{S}$. Положим

$$\hat{f}_{-1}(s) = \mathring{\cup}\ \{l^{-1}(s_\alpha);\ \alpha \in A\}.$$

В силу следствия 2 $\hat{f}_{-1}$ является отображением S на Φ, а в силу следствия 1 сужение $\hat{f}_{-1}$ на $\hat{S}$ совпадает с l^{-1}. Из самого определения $\hat{f}_{-1}$ следует, что если $s_1 \supset s_2$, то $\hat{f}_{-1}(s_1) > \hat{f}_{-1}(s_2)$, т. е. $\hat{f}_{-1}$ — возрастающее отображение.

Покажем, что для любого конечного множества J справедливо неравенство

$$\mathring{\bigcap_{j \in J}} \hat{f}_{-1}(s_j) > \hat{f}_{-1}(\bigcap_{j \in J} s_j). \tag{5}$$

В самом деле, пусть $s_j = \cup\{s_{\alpha_j};\ \alpha_j \in A_j\}$, где $s_{\alpha_j} \in \hat{S}$ и пусть $\hat{f}_{-1}(s_{\alpha_j}) = \varphi_{\alpha_j}$, тогда $l(\varphi_{\alpha_j}) = s_{\alpha_j}$ и в силу (2) имеем

$$s_j \subset l(\mathring{\bigcup_{\alpha_j \in A_j}} \varphi_{\alpha_j}) = \hat{s}_j \in \hat{S},$$

и так как $\hat{f}_{-1}$ — возрастающее, то

$$\hat{f}_{-1}(\bigcap_{j\in J} s_j) > \hat{f}_{-1}(\bigcap_{j\in J} s_j).$$

Согласно (1), так как $\hat{f}_{-1}$ на $\hat{S}$ совпадает с l^{-1}, имеем

$$\dot{\bigcap_{j\in J}} \hat{f}_{-1}(\hat{s}_j) = \hat{f}_{-1}(\bigcap_{j\in J} \hat{s}_j),$$

поэтому остается учесть, что $\hat{f}_{-1}(\hat{s}_j) = \hat{f}_{-1}(s_j)\ \forall j\in J$.

Пусть $f_{-1}: S\to V$ определено следующим образом: $\forall s\in S\ f_{-1}(s)= =\hat{f}_{-1}(s)\subset V$. Покажем, что $f_{-1}\in M_V$, т. е. f_{-1} — сильный морфизм топологии S на топологию V и $f_{-1}(\varnothing)=V$.

В самом деле, так как $\hat{f}_{-1}$ на $\hat{S}$ совпадает с l^{-1} и при $\varphi=\theta_\Phi$ $s_\varphi=\varnothing$, то $f_{-1}(\varnothing)=\theta_\Phi=V$. Поскольку, очевидно, f_{-1} удовлетворяет условию (M_1), то перейдем к проверке выполнения условий (M_2) и (M_3). Пусть $v_j\in f_{-1}(s_j)\forall j$ из конечного множества J, тогда, так как $\hat{f}_{-1}(s_i)\subset \dot{\bigcap_{j\in J}} \hat{f}_{-1}(s_j)$ для каждого i из J, то $\bigcap_{j\in J} v_j\in \dot{\bigcap_{j\in J}} \hat{f}_{-1}(s_j)$ и в силу (5) $\bigcap_{j\in J} v_j\in f_{-1}(\bigcap_{j\in J} s_j)$, т. е. f_{-1} удовлетворяет условию (M_2). Пусть $s_\alpha\in S\ \forall\alpha$ из произвольного индексного множества A и $v_\alpha\in f_{-1}(s_\alpha)$, тогда в силу (F_3) $\forall\beta\in A\ v=\bigcup_{\alpha\in A} v_\alpha\in f_{-1}(s_\beta)$, следовательно $v\in\bigcap_{\alpha\in A} f_{-1}(s_\alpha)$. Так как в Φ псевдообъединение элементов совпадает с их пересечением, то

$$\bigcap_{\alpha\in A} f_{-1}(s_\alpha) = \dot{\bigcup_{\alpha\in A}} \hat{f}_{-1}(s_\alpha) = \hat{f}_{-1}(\bigcup_{\alpha\in A} s_\alpha),$$

следовательно $v\in f_{-1}(\bigcup_{\alpha\in A} s_\alpha)$, т. е. f_{-1} удовлетворяет условию (M_3), и остается показать, что f_{-1} — сильный морфизм. Пусть $s\in S$ и $s\neq\varnothing$, тогда существует $s_\varphi\in\hat{S}$ такое, что $s_\varphi\neq\varnothing$ и $s_\varphi\subset s$. Так как l — биекция, то $l^{-1}(s_\varphi)=\varphi\neq\theta_\Phi$, следовательно φ — открытый фильтр пространства (X, V), и так как $\hat{f}_{-1}$ — возрастающее, то $\theta_V=\varnothing\,\overline{\in}\, f_{-1}(s)$, т. е. f_{-1} — сильный морфизм.

Таким образом, каждому $\{P, \Phi\}\in K_V$ указанным выше способом сопоставляется определенный элемент $f_{-1}: S\to V$ из M_V, т. е. имеем отображение

$$\nu_{-1}: K_V\to M_V.$$

Нетрудно убедиться, что $\nu\circ\nu_{-1}$ — тождественное отображение множества K_V.

В самом деле, пусть $\nu_{-1}\{P, \Phi\}=f_{-1}: S\to V$, тогда по построению $\hat{f}_{-1}(S)=\Phi$. Кроме того, так как $\hat{S}$ — база топологии S, то $\hat{S}_p=\{s_\varphi;\ \varphi\in p\}$ — базис системы окрестностей точки p в пространстве (P, S). Пусть S_p — система всех открытых окрестностей точки p в пространстве (P, S), тогда, так как $\hat{f}_{-1}$ возрастающее и $\hat{f}_{-1}(\hat{S}_p) = p$, то в силу (F_3) $\hat{f}_{-1}(s) \in p$ $\forall s \in S_p$, т. е. $\hat{f}_{-1}(S_p) = p$, следовательно $h_{f_{-1}}(P) = P$ и $\nu(\hat{f}_{-1}) = \{P, \Phi\}$.

Следствие. Отображение ν сюръективно.

Рассмотрим теперь отображения

$$T_{-1} = \mu_{-1} \circ \nu_{-1} : K_V \to R_V$$

и

$$T^*_{-1} = \rho \circ T_{-1} : K_V \to R^*_V,$$

где $\rho : R_V \to R^*_V$ — каноническая проекция. Из доказанных свойств отображений μ, μ_{-1}, ν, ν_{-1} следует, что отображения $T \circ T_{-1}$ и $T^* \circ T^*_{-1}$ совпадают с тождественным отображением множества K_V, следовательно T и T^*—сюръективные отображения.

Предложение 6. *Для любого расширения* $\xi = [(Z, W); \beta] \in R_V$ *существует непрерывное отображение* H *пространства* (Z, W) *на пространство* $(Z_1, W_1) = T_{-1} \circ T(\xi)$ *такое, что* $H \circ \beta$ — *тождественное отображение.*

Доказательство. Пусть $\mu(\xi) = f : U \to V$, $\nu(f) = \{P, \Phi\}$ и $F\{P, \Phi\} = (P, S)$, тогда очевидно h_f является сюръективным отображением пространства (Y, U) на пространство (P, S). Покажем, что $\forall s_\varphi \in \hat{S}$ $h_f^{-1}(s_\varphi) = u_\varphi \in \hat{U}$, (напомним, что $u_\varphi = \bigcup \{u;\ u \in U,\ f(u) = \varphi\}$, а $\hat{U}$ — семейство всех u_φ, когда φ пробегает все Φ).

Пусть $p \in s_\varphi$ и $y \in h_f^{-1}(p)$, тогда $\varphi \in p$ и, поскольку $p = \hat{f}(U_y)$, где U_y — система всех открытых окрестностей точки y в пространстве (Y, U), то существует $u \in U_y$ такое, что $\hat{f}(u) = \varphi$, и так как $u \subset u_\varphi$, то $y \in u_\varphi$. Обратно, пусть $y \in u_\varphi$, тогда $u_\varphi \in U_y$, следовательно $\hat{f}(u_\varphi) = \varphi \in \in h_f(y) = p$, т. е. $p \in s_\varphi$. Рассмотрим теперь отображение H множества $Z = \beta(X) \cup Y$ на множество $Z_1 = X \cup P$, совпадающее на Y с h_f, а на $\beta(X)$ с β^{-1}. Очевидно, что $H \circ \beta$ — тождественное отображение. Пусть $\nu_{-1}\{P, \Phi\} = f_{-1} : S \to V$, тогда $w \in W_1$ равносильно тому, что $w = s \cup v$, где $s \in S$ и $v \in f_{-1}(s)$. Пусть $\hat{W}_1$—подсемейство топологии W_1, состоящее из всех $\hat{w} \in W_1$, имеющих вид $\hat{w} = s_\varphi \cup v$, где $s_\varphi \in \hat{S}$ и $v \in f_{-1}(s_\varphi) = \varphi$. Легко убедиться, что $\hat{W}_1$ — база топологии W_1. В самом деле, пусть $w \in W_1$, тогда $w = s \cup v$, где $s \in S$ и $v \in \hat{f}_{-1}(s)$, и так как $\hat{S}$ — база топологии S, то $w = \bigcup_{\alpha \in A} (s_\alpha \cup v)$, где $s_\alpha \in \hat{S}$. Поскольку $\hat{f}_{-1}$ — возрастающее, то из $s \supset s_\alpha$ следует, что $\hat{f}_{-1}(s) \subset \hat{f}_{-1}(s_\alpha)$ $\forall \alpha \in A$, следовательно $v \in \hat{f}_{-1}(s_\alpha) = \varphi_\alpha$, т. е. $\forall \alpha \in A$ $s_\alpha \cup v \in \hat{W}_1$.

Замечание. Если ξ такое расширение из R_V, что $\hat{U}$ образует базу топологии U, то аналогично убеждаемся, что подсемейство

$\hat{W}$ топологии W, состоящее из всех $\hat{w} \in W$, имеющих вид $\hat{w} = u_\varphi \cup v'$, где $u_\varphi \in \hat{U}$ и $v' \in f'(u_\varphi)$, или $\beta^{-1}(v') \in f(u_\varphi) = \varphi$, образует базу топологии W.

Пусть $\hat{w} \in \hat{W}_1$, тогда $\hat{w} = s_\varphi \cup v$, где $s_\varphi \in \hat{S}$ и $v \in f_{-1}(s_\varphi) = \varphi$, следовательно $H^{-1}(\hat{w}) = h_f^{-1}(s_\varphi) \cup \beta(v) = u_\varphi \cup \beta(v)$. Но если $v \in \varphi$, то $\beta(v) \in \in \beta_*(\varphi) = f'(u_\varphi)$, где $f' = J_{V'}^{W} \circ J_{W'}^{U}$ т. е. $u_\varphi \cup \beta(v) \in W$, следовательно H—непрерывное отображение.

Следствие 1. Если расширение $\xi \in R_V$ такое, что соответствующее ему семейство $\hat{U}$ образует базу топологии U, то, согласно сделанному замечанию, отображение H к тому же и открыто, следовательно $(Z_1, W_1) = T_{-1} \circ T(\xi)$ гомеоморфно фактор пространству пространства (Z, W).

Следствие 2. Если соответствующее расширению $\xi \in R_V$ отображение h_f инъективно, и семейство $\hat{U}$ образует базу топологии U, то отображение H — гомеоморфизм, и так как $H \circ \beta$—тождественное отображение, то расширение $T_{-1} \circ T(\xi)$ эквивалентно расширению ξ.

Предложение 7. *Пусть* $\xi = [(Z, W); \beta] \in R_V$ — *полурегулярное расширение пространства* (X, V) *и* $T_{-1} \circ T(\xi) = (Z_1, W_1)$, *тогда существует непрерывное и открытое отображение* H *пространства* (Z, W) *на пространство* (Z_1, W_1) *такое, что* $H \circ \beta$ — *тождественное отображение.*

Доказательство. В силу следствия 1 предложения 6, достаточно показать, что семейство $\hat{U}$ образует базу топологии U. Пусть w — канонически открытое множество пространства (Z, W) и пусть $w \cap \beta(X) = v'$, $w \cap Y = u$, тогда $v' \in f'(u)$ и так как $f = \beta^{-1} \circ f'$, то $v = = \beta^{-1}(v') \in f(u)$. Пусть далее $f(u) = \varphi$, тогда $v \in f(u_\varphi) = \varphi$, следовательно $v' \in f'(u_\varphi)$, т. е. $w_\varphi = u_\varphi \cup v' \in W$. Так как $\beta(X)$ плотно в (Z, W), то $\overline{v'} = \overline{w} = \overline{w_\varphi}$ (замыкания производятся в пространстве (Z, W)), поэтому $w_\varphi \subset w$, т. е. $u_\varphi \subset u$ и поскольку $u \subset u_\varphi$, то $u = u_\varphi \in \in \hat{U}$. Таким образом, следы на Y канонически открытых множеств пространства (Z, W) принадлежат $\hat{U}$, и так как эти следы образуют базис в пространстве (Y, U), то $\hat{U}$—базис топологии U. Таким образом, если $\xi = [(Z, W); \beta] \in R_V$—полурегулярное расширение пространства (X, V), то расширение $T_{-1} \circ T(\xi)$ гомеоморфно фактор пространству пространства (Z, W).

Теорема 2. *Для любого хаусдорфова полурегулярного расширения* $\xi \in R_V$ *пространства* (X, V) *расширение* $T_{-1} \circ T(\xi)$ *эквивалентно расширению* ξ.

Доказательство. В силу предложения 7 и следствия 2 предложения 6 достаточно показать, что для хаусдорфова расширения $\xi = [(Z, W); \beta] \in R_V$ соответствующее отображение h_f инъективно.

Пусть $\mu(\xi)=f:U\to V$, $h_f: Y\to P$ (напомним, что $\forall y\in Y\ h_f(y)=\hat{f}(U_y)=p\in P$). Заметим, что если $p^*=\cup\{\varphi;\ \varphi\in p\}$, то $\beta_*(p^*)$ является следом на $X'=\beta(X)$ системы W_y всех открытых окрестностей точки y в пространстве (Z, W). Пусть $y_1, y_2\in Y\subset Z$ и $y_1\neq y_2$, тогда, так как (Z, W)—хаусдорфово пространство, то $p_1^*\neq p_2^*$, следовательно $h_f(y_1)\neq h_f(y_2)$, т. е. h_f— инъективное отображение.

Следствие. Сужение отображения T^* на множество всех классов эквивалентных между собой хаусдорфовых полурегулярных расширений является инъективным отображением, причем композиция $T^*_{-1}\circ T^*$—тождественное отображение.

§ 3. Некоторые классы расширений топологических пространств

Пусть σ_V—семейство всех открытых множеств пространства (X, V), дополнения которых бикомпактны.

Теорема 3. *Для любого бикомпактного расширения* $\xi\in R_V$ *пространства* (X, V) $T(\xi)=\{P, \Phi\}$ *является бикомпактным п.т.п. таким, что наибольший элемент* $\hat{\varphi}$ *п.т.* Φ *содержится в* σ_V.

Обратно, если $\{P, \Phi\}$*—бикомпактное п.т.п. из* K_V *такое, что* $\hat{\varphi}\subset\sigma_V$, *то* $T_{-1}\{P, \Phi\}$ *является бикомпактным расширением пространства* (X, V).

Доказательство. Пусть $\xi=[(Z, W);\ \beta]\in R_V$— бикомпактное расширение пространства (X, V), $T(\xi)=\{P, \Phi\}$ и Φ' — произвольное подмножество множества Φ, обладающее тем свойством, что $\forall p\in P$ $\exists\varphi\in\Phi'$ такое, что $\varphi\in p$. Нетрудно проверить, что $U'=\hat{f}^{-1}(\Phi')$—открытое покрытие подпространства (Y, U) пространства (Z, W), где $Y=Z\setminus\beta(X)$ и $\mu(\xi)=f:U\to V$. В самом деле, пусть $y\in Y$, $h_f(y)=p$ и $\varphi\in\Phi'$ такое, что $\varphi\in p$, тогда существует $u\in U_y$ такое, что $\hat{f}(u)=\varphi$, т. е. U'—открытое покрытие пространства (Y, U). Поскольку расширение ξ сохраняет V и следовательно Y замкнуто в бикомпактном пространстве (Z, W), то U' содержит конечное подпокрытие U''. Пусть $\hat{f}(U'')=\Phi''\subset\Phi'$ и p—произвольный элемент из P, тогда существует $y\in Y$ такое, что $h_f(y)=p$ и так как U''—покрытие пространства (Y, U), то для некоторого $u\in U''$ $\hat{f}(u)=\varphi\in p$, т. е. $\{P, \Phi\}$--бикомпактное п.т.п.

Пусть $\hat{\varphi}$—наибольший элемент п.т. Φ, тогда так как $\hat{f}:U\to\Phi$—возрастающее, то $\hat{\varphi}=\hat{f}(Y)$, следовательно $\forall v\in\hat{\varphi}$ существует открытая окрестность w множества Y в пространстве (Z, W) такая, что $v=\beta^{-1}(w\cap\beta(X))$. Имеем $X\setminus v=\beta^{-1}(Z\setminus w)$, и так как $Z\setminus w$ замкнуто в бикомпактном пространстве (Z, W), то $v\in\sigma_V$, т. е. $\hat{\varphi}\subset\sigma_V$.

Обратно, пусть $\{P, \Phi\}$— бикомпактное п.т.п. из K_V, $\hat{\varphi} \subset \mathfrak{c}_V$ и $F\{P, \Phi\}=(P, S)$, тогда, поскольку $\hat{S}$ образует базу топологии S, а отображение $l: \Phi \to \hat{S}$ является биекцией (см. предложение 5), то легко видеть, что (P, S)—бикомпактное пространство. В самом деле, пусть S'—произвольное подмножество множества $\hat{S}$, покрывающее пространство (P, S) и $l^{-1}(S') = \Phi'$, тогда $\forall p \in P\ \exists s_\varphi \in S'$ такое, что $p \in s_\varphi$, т. е. $\varphi \in p$ и $\varphi \in \Phi'$ и, так как $\{P, \Phi\}$—бикомпактное п.т.п., то существует конечное подсемейство Φ'' семейства Φ', обладающее тем свойством, что $\forall p \in P\ \exists \varphi \in \Phi''$ такое, что $\varphi \in p$. Отсюда легко заключить, что $l(\Phi'')$—конечное подпокрытие покрытия S'', т. е. (P, S) бикомпактно. Пусть $T_{-1}\{P, \Phi\}=(Z_1, W_1)$ и W' некоторое открытое покрытие пространства (Z_1, W_1), тогда так как (P, S)—его бикомпактное подпространство, то из W' можно подобрать конечное подпокрытие W'' множества $P \subset Z_1$. Пусть далее $w_0 = \bigcup\{w;\ w \in W''\}$, тогда учитывая, что $\hat{f}_{-1}(P) = \hat{\varphi}$ ($\hat{f}_{-1}$—возрастающее) и то, что $w \in W_1$ равносильно $w = s \cup v$, где $s \in S$ и $v \in \hat{f}_{-1}(s)$, легко заключить, что $v = w_0 \cap X \in \hat{\varphi}$. Но по условию $\hat{\varphi} \subset \mathfrak{z}_V$, следовательно $X \setminus v$ бикомпактно, и так как $Z_1 \setminus w_0 = X \setminus v$, то W' содержит конечное подпокрытие множества Z_1.

Пусть δ_V — семейство открытых множеств T_1 пространства (X, V), состоящее из дополнений до всевозможных конечных подмножеств множества X.

Теорема 4. *Пусть (X, V) — T_1-пространство и $\{P, \Phi\} \in K_V$, тогда $T_{-1}\{P, \Phi\}$ является T_1-расширением пространства (X, V) в том и только в том случае, когда $\{P, \Phi\}$ — T_1 п.т.п. и δ_V содержится в наибольшем элементе $\hat{\varphi}$ п.т. Φ.*

Доказательство. Пусть $\{P, \Phi\} \in K_V$ T_1 п.т.п., $\delta_V \subset \hat{\varphi}$ и z_1, z_2 различные точки пространства $(Z_1, W_1) = T_{-1}\{P, \Phi\}$, где $Z_1 = P \cup X$. Рассмотрим случай, когда $z_i = p_i \in P$ $(i=1, 2)$. По определению T_1 п.т.п. существуют $\varphi_1 \in p_1$ и $\varphi_2 \in p_2$ такие, что $\varphi_1 \overline{\in} p_2$ и $\varphi_2 \overline{\in} p_1$, следовательно $p_1 \overline{\in} l(\varphi_2) = s_2$ и $p_2 \overline{\in} l(\varphi_1) = s_1$. Пусть $\gamma_{-1}\{P, \Phi\} = f_{-1}$, $v_1 \in \hat{f}_{-1}(s_1)$ и $v_2 \in \hat{f}_{-1}(s_2)$, тогда $w_1 = s_1 \cup v_1$ и $w_2 = s_2 \cup v_2$ соответственно открытые окрестности точек p_1 и p_2 в пространстве (Z_1, W_1) такие, что $p_1 \overline{\in} w_2$ и $p_2 \overline{\in} w_1$.

Пусть теперь $z_1, z_2 \in X$, тогда так как (X, V) T_1-пространство и $V \subset W_1$, то в пространстве (Z_1, W_1) существуют окрестность w_1 точки z_1 и окрестность w_2 точки z_2 такие, что $z_1 \overline{\in} w_2$ и $z_2 \overline{\in} w_1$.

Пусть, наконец, $z_1 = x \in X$ и $z_2 = p \in P$. Так как p — фильтр п.т. Φ, то $\hat{\varphi} \in p$ и, поскольку по условию $\delta_V \subset \hat{\varphi}$, то $\bigcap\{v;\ v \in p^*\} = \varnothing$, где $p^* = \bigcup\{\varphi;\ \varphi \in p\}$. Таким образом, для некоторого $\varphi \in p$ существует $v \in \varphi$ такое, что $x \overline{\in} v$, и так как $\varphi = \hat{f}_{-1}(s_\varphi)$, то $w = s_\varphi \cup v$ является окрестностью точки p в пространстве (Z_1, W_1), не содержащей точку x. Кроме того из $V \subset W_1$ следует, что любая окрестность $v \in V$ точки x не содержит точку p. Итак, (Z_1, W_1) есть T_1-расширение пространства (X, V).

Обратно, пусть $(Z_1, W_1) = T_1\{P, \Phi\}$ — T_1-расширение пространства (X, V). Тогда, поскольку (P, S)—подпространство пространства (Z_1, W_1) и $\hat{S}$—база топологии S, то для любых двух различных p_1 и p_2 из P существуют s_{φ_1} и s_{φ_2} из $\hat{S}$ такие, что $p_i \in s_{\varphi_i}$ и $p_i \overline{\in} s_{\varphi_j}$, следовательно $\varphi_i \in p_i$ и $\varphi_i \overline{\in} p_j$ $(i, j=1, 2, i \neq j)$ т. е. $\{P, \Phi\}$ — T_1 п.т.п. Пусть $v \in \delta_V$, т. е. $X \setminus v = B$—конечное подмножество множества X, тогда так как $P \cup v = Z_1 \setminus B$ и (Z_1, W_1) является T_1-пространством, то $w = P \cup v \in W_1$, которое означает, что $v \in \hat{f}_{-1}(P) = \hat{\varphi}$, т. е. $\delta_V \subset \hat{\varphi}$.

Следствие. T_1-пространство (X, V) допускает бикомпактное T_1-расширение тогда и только тогда, когда X-бесконечное множество.

В самом деле, так как конечное подмножество T_1- пространства замкнуто, то условие необходимо. Обратно, если X бесконечно, то δ_V—открытый фильтр пространства (X, V), следовательно п.т.п. $\{P, \Phi\}$, где Φ состоит из двух элементов $\hat{\varphi} = \delta_V$ и $\Theta_\Phi = V$, а P состоит из единственного фильтра $\{\delta_V\}$ п.т. Φ, удовлетворяет всем условиям теорем 3 и 4, т. е. (X, V) допускает бикомпактное T_1-расширение.

Перейдем теперь к рассмотрению хаусдорфовых расширений.

Пусть $\{P, \Phi\} \in K_V$, тогда $\forall p \in P$ семейство $p^* = \cup\{\varphi; \varphi \in p\}$ образует открытый фильтр пространства (X, V). В самом деле, так как каждый элемент $\varphi \in p$ представляет собой открытый фильтр пространства (X, V), то $\varnothing \overline{\in} p^*$. Пусть $v_j \in p^*$ $\forall j$ из конечного множества J, тогда $\exists \varphi_j \in p$ такое, что $v_j \in \varphi_j$, и так как p—фильтр п.т. Φ, то $\dot{\cap}\{\varphi_j; j \in J\} = \varphi \in p$. Отсюда, так как $\forall j \in J$ $\varphi_j \subset \varphi$, следует, что $\cap\{v_j; j \in J\} \in p^*$. Пусть $v \in p^*$, $v_1 \in V$ и $v \subset v_1$, тогда $\exists \varphi \in p$ такое, что $v \in \varphi$ и, так как φ—открытый фильтр пространства (X, V), то $v_1 \in \varphi$, т. е. $v_1 \in p^*$.

Таким образом, имеем отображение $E: P \to \Phi_V$, которое каждому $p \in P$ сопоставляет $E(p) = p^*$.

Пусть $P^* = E(P)$, а γ — отображение, которое каждому $\{P, \Phi\} \in K_V$ сопоставляет п.т.г. $\{P^*, V\}$.

Теорема 5. *Пусть* $\xi \in R_V$—*хаусдорфово расширение пространства* (X, V) *и* $T(\xi) = \{P, \Phi\}$, *тогда наибольший элемент* $\hat{\varphi}$ *п.т.* Φ *содержит* σ_V *и выполнены следующие условия:*

(*i*) *Отображение* $E: P \to \Phi_V$ *инъективно.*

(*ii*) $\cap\{\overline{v}; v \in p^*\} = \varnothing$ $\forall p^* \in P^*$, *т. е. базис фильтра* p^* *пространства* (X, V) *не имеет точек прикосновения.*

(*iii*) $\gamma\{P, \Phi\} = \{P^*, V\}$—*хаусдорфово п.т.п.*

Обратно, пусть (X, V) — *хаусдорфово пространство и* $\{P, \Phi\} \in K_V$ *такое, что выполнены условия* (i)—(iii), *тогда* $T_{-1}\{P, \Phi\}$ — *хаусдорфово расширение пространства* (X, V).

Доказательство. Пусть $v \in \sigma_V$ и $B = X \setminus v$, тогда $\beta(B)$ замкнуто в хаусдорфовом пространстве (Z, W), и поскольку $Z \setminus \beta(B) = Y \cup \beta(v)$, то $v \in f(Y) = \hat{\varphi}$, т. е. $\sigma_V \subset \hat{\varphi}$. Пусть $p_i \in P$ и $E(p_i) = p_i^*$, тогда $\exists y_i \in Y$ такое, что $h_f(y_i) = p_i$ $(i=1, 2)$. Из определения h_f следует, что $\beta_*(p_i^*)$—след на $\beta(X)$ системы открытых окрестностей точки y_i в пространстве (Z, W). Поэтому так как (Z, W) хаусдорфово, из $p_1 \neq p_2$ следует, что существуют $v_1 \in p_1^*$ и $v_2 \in p_2^*$ такие, что $v_1 \cap v_2 = \varnothing$, следовательно E—инъективно, а $\{P^*, V\}$ хаусдорфово п.т.п. Теперь пусть $p^* \in P^*$, тогда $\exists y \in Y$ такое, что $h_f(y) = p$ и $E(p) = p^*$, причем $\beta_*(p^*)$—след на $\beta(X)$ системы W_y открытых окрестностей точки y в пространстве (Z, W). Так как $\cap\{\overline{w};\ w \in W_y\} = \{y\}$, то $\cap\{\overline{v};\ v \in p^*\} = \varnothing$, где $\overline{v}$ — замыкание множества v в пространстве (X, V).

Обратно, пусть $\{P, \Phi\} \in K_V$ такое, что выполнены условия (i)—(iii). Докажем, что $(Z_1, W_1) = T_{-1}\{P, \Phi\}$ — хаусдорфово расширение пространства (X, V). Пусть z_1 и z_2— различные точки множества $Z_1 = X \cup P$. Рассмотрим случай, когда $z_i = p_i \in P$ $(i=1, 2)$, тогда согласно (i) $p_1^* \neq p_2^*$ и в силу (iii) существуют $v_1 \in p_1^*$ и $v_2 \in p_2^*$ такие, что $v_1 \cap v_2 = \varnothing$. Пусть $v_i \in \varphi_i \in p_i$, тогда $w_i = s_{\varphi_i} \cup v_i$ — открытая окрестность точки p_i в пространстве (Z_1, W_1) $(i=1, 2)$ и так как X плотно в (Z_1, W_1), то $w_1 \cap w_2 = \varnothing$.

В случае, когда z_1 и z_2 принадлежат множеству X, учитывая, что (X, V)—хаусдорфово пространство и $V \subset W_1$ заключаем, что z_1 и z_2 в пространстве (Z_1, W_1) обладают непересекающимися окрестностями.

Наконец, пусть $z_1 = x \in X$, а $z_2 = p \in P$. В силу условия (ii) существует $v \in p^*$ такое, что $x \overline{\in} \overline{v}$, следовательно существует окрестность $v_x \in V$ точки x такая, что $v_x \cap v = \varnothing$. Пусть $v \in \varphi \in p$, тогда $p \in s_\varphi$ и $v \in \hat{f}_{-1}(s_\varphi) = \varphi$, следовательно, $w = s_\varphi \cup v$ является окрестностью точки p в пространстве (Z_1, W_1) такой, что $w \cap v_x = \varnothing$, т. е. (Z_1, W_1) — хаусдорфово пространство. Теорема доказана.

Пусть $\overline{R}_V$ — множество всех классов эквивалентных между собой хаусдорфовых бикомпактных расширений локально бикомпактного хаусдорфова пространства (X, V), а $\widetilde{K}_V$—множество всех бикомпактных п.т.п. $\{P, \Phi\}$ из K_V таких, что $\hat{\varphi} = \sigma_V$, отображение $E: P \to \Phi_V$ инъективно и $\{P^*, V\}$ хаусдорфово п.т.п.

Так как для локально бикомпактного пространства (X, V) выполняется условие $\cap\{\overline{v};\ v \in \sigma_V\} = \varnothing$, а $\hat{\varphi}$ как наибольший элемент п.т.

Φ принадлежит любому $p \in P$, то каждое п.т.п. $\{P, \Phi\}$ из $\bar{K}_V$ удовлетворяет условию (*ii*) теоремы 5. Сопоставляя теоремы 3, 5 и следствие теоремы 2, приходим к следующему основному утверждению.

Теорема 6. *Отображение T^* является биекцией между множествами $\bar{R}_V$ и $\bar{K}_V$, причем $(T^*)^{-1} = \overset{*}{T}_{-1}$.*

Перейдем теперь к рассмотрению H-замкнутых расширений.

Пусть H_V—семейство всех открытых множеств хаусдорфова пространства (X, V), дополнения которых H-замкнуты.

Теорема 7. *Пусть $\xi \in R_V$ — H-замкнутое расширение пространства (X, V) и $T(\xi) = \{P, \Phi\}$, тогда $H_V \subset \hat{\varphi}$, и кроме условий (i)—(iii) теоремы 5 выполняется также следующее условие:*

(IV) *Для каждого максимального открытого фильтра F пространства (X, V), не имеющего точек прикосновения, существует $p^* \in P^*$ такое, что $p^* \subset F$.*

Обратно, пусть (X, V)—хаусдорфово пространство и $\{P, \Phi\} \in K_V$ такое, что выполнены условия (i) — (IV), тогда $T_{-1}\{P, \Phi\}$ — H-замкнутое расширение пространства (X, V).

Доказательство. Пусть $\xi = [(Z, W); \beta]$, $v \in H_V$ и $B = X \setminus v$, тогда $\beta(B)$ замкнуто в хаусдорфовом пространстве (Z, W), и поскольку $Z \setminus \beta(B) = Y \cup \beta(v)$, то $v \in \hat{f}(Y) = \hat{\varphi}$, т. е. $H_V \subset \hat{\varphi}$. Так как ξ —хаусдорфово расширение пространства (X, V), то по теореме 5 п.т.п. $\{P, \Phi\} = T(\xi)$ удовлетворяет условиям (*i*)—(*iii*) этой теоремы. Пусть F — максимальный открытый фильтр пространства (X, V) без точек прикосновения, тогда так как $X' = \beta(X)$ открыто в пространстве (Z, W), то $\beta_*(F) = F'$—базис открытого фильтра пространства (Z, W). В силу критерия П. С. Александрова о H-замкнутости хаусдорфова пространства [8], F' имеет точку прикосновения в пространстве (Z, W), т. е. существует точка $y \in Y \subset Z$ такая, что $\forall w \in W_y$ и $\forall v' \in F'$ $w \cap v' \neq \varnothing$, где W_y—система открытых окрестностей точки y в пространстве (Z, W). Пусть $h_f(y) = p$ и $E(p) = p^*$, тогда $p^* = \beta^{-1}(\overset{*}{p}_1)$, где $\overset{*}{p}_1$—след системы W_y на X'. Имеем $\forall \overset{*}{v}_1 \in \overset{*}{p}_1$ и $\forall v' \in F'$ $\overset{*}{v}_1 \cap v' \neq \varnothing$ и так как F'—максимальный открытый фильтр пространства (X', V'), то $\overset{*}{p}_1 \subset F'$ и, стало быть, $p^* \subset F$.

Обратно, пусть (X, V) — хаусдорфово пространство $\{P, \Phi\} \in K_V$ такое, что выполнены условия (*i*)—(IV) и $T_{-1}\{P, \Phi\} = (Z_1, W_1)$. Допустим, что (Z_1, W_1), которое по теореме 5 является хаусдорфовым расширением пространства (X, V), не является H-замкнутым пространством, тогда, в силу того же критерия П. С. Александрова, существует открытый фильтр Q этого пространства, не имеющий точек прикосновения. Пусть q — след Q на X, тогда так как X плотно в (Z_1, W_1), то q — открытый фильтр пространства (X, V) без точек прикосновения, следовательно q содержится в некотором максимальном открытом фильтре F без точек прикосновения. По условию существует $p^* \in P^*$ такое, что $p^* \subset F$. Пусть $p = E^{-1}(p^*)$ и W_p—система открытых окрестностей точки p в пространстве (Z_1, W_1), тогда из определения W_1 вытекает, что след системы W_p на X совпадает с p^*. Так как открытые фильтры q и p^* принадлежат F, то $\forall v^* \in p^*$ и $\forall v \in q$ имеем $v^* \cap v \neq \varnothing$, следовательно $\forall w \in Q$ и $\forall w_0 \in W_p$ $w_p \cap w \neq \varnothing$, т. е. p — точка прикосновения для Q. Противоречие показывает, что (Z_1, W_1)— H-замкнутое расширение пространства (X, V).

Следствие. Хаусдорфово пространство (X, V) допускает H-замкнутое расширение, принадлежащее R_V тогда и только тогда, когда существует непустое семейство P^* открытых фильтров пространства (X, V), не имеющих точек прикосновения, такое, что каждый максимальный открытый фильтр без точек прикосновения содержит некоторый $p^* \in P^*$, кроме того для любых двух различных элементов p_1^* и p_2^* из P^* существует $v_1 \in p_1^*$ и $v_2 \in p_2^*$ такие, что $v_1 \cap$ $\cap v_2 = \varnothing$, или что то же самое $\{P^*, V\}$—хаусдорфово п.т.п.

Пусть (X, V) допускает H-замкнутое расширение из R_V, тогда существование семейства P^* с указанными свойствами является непосредственным следствием первой части теоремы 7. Для обратного утверждения, согласно второй части теоремы 7, достаточно показать, что каждое семейство P^* с указанными свойствами порождает некоторое п.т.п. $\{P, \Phi\}$ из K_V, удовлетворяющее условиям (i)—(IV) теоремы 7. В самом деле, семейство Φ всевозможных пересечений элементов из p^*, дополненное одним элементом — множеством V, представляет собой полуподтопологию п.т. Φ_V. Каждому $p^* \in P^*$ сопоставим подмножество $p = \{\varphi;\ \varphi \in \Phi,\ \ \varphi \subset p^*\}$ множества Φ, представляющее собой фильтр п.т. Φ, и пусть P—множество всех p, когда p^* пробегает все P^*. Учитывая, что $E(p) = p^*$, следовательно $\gamma\{P, \Phi\} = \{P^*, V\}$, легко проверить, что п.т. п. $\{P, \Phi\}$ удовлетворяет условиям (i)—(IV) теоремы 7. Ясно также, что P различает элементы Φ и, стало быть, $\{P, \Phi\} \in K_V$.

Из этого следствия сразу получается известное утверждение (см. [13—15]) о том, что всякое хаусдорфово пространство, не являющееся H-замкнутым, допускает H-замкнутое расширение.

В самом деле, семейство M всех максимальных открытых фильтров без точек прикосновения такого пространства, согласно упомянутому выше критерию П. С. Александрова, непусто и, очевидно, обладает всеми требуемыми в следствии свойствами, поэтому всякое хаусдорфово пространство, не являющееся H-замкнутым, допускает H-замкнутое расширение, принадлежащее R_V.

Заметим, что если D—разбиение множества M на конечные подмножества, то семейство P^* всех открытых фильтров $p^* = \cap\{\varphi;\ \varphi \in d\}$, когда d пробегает все D, также обладает всеми свойствами, требуемыми в следствии теоремы 7.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21.V.1973

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Նոր մոտեցում տոպոլոգիական տարածությունների լայնացումների տեսության մեջ *(ամփոփում)*

Նախկինում մուծված պսևդոտոպոլոգիայի և պսևդոտոպոլոգիական տարածության գաղափարների միջոցով հոդվածում ուսումնասիրվում են տոպոլոգիական տարածությունների լայնացումների զանազան դասեր։ Ամեն մի տոպոլոգիական տարածության վերագրվում է պսևդոտոպոլոգիական տարածությունների որոշակի ընտանիք և անմիջական կապ է հաստատվում այդ ընտանիքի և տվյալ տարածության լայնացումների ընտանիքի միջև։

S. G. HOVSEPIAN. *A new approach in the theory of extensions of topological spaces* (summary)

Different classes of extensions of topological spaces are investigated with the aid of earlier introduced notions of pseudo-topology and pseudo-topological space.

To each topological space certain family of pseudotopological spaces is ascribed. Close interconnections between this family and the family of extensions of the given space is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Tychonoff.* Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann., 102, 1929, 544—561.
2. *E. Cech.* On bicompact spaces, Ann. of Math., 30, 1937, 823—845.
3. *M. H. Stone.* Application of Boolean algebras to topology, Trans. Amer. Math. Soc., 41, 3, 1937, 375—481.
4. *П. С. Александров.* О бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сб., 5 (47), 2, 1939, 403—423.
5. *S. Fomin.* Extensions of topological spaces, Ann. of Math., 44, 3, 1943, 471—480.
6. *Ю. М. Смирнов.* О пространствах близости, Матем. сб., 31, № 3, 1952, 543—574.
7. *П. С. Александров, В. И. Пономарев.* О бикомпактных расширениях топологических пространств, ДАН СССР, 121, № 4, 1958, 575—578.
8. *С. Илиадис, С. В. Фомин.* Метод центрированных систем в теории топологических пространств, УМН, 21, № 4, 1966, 47—76.
9. *В. И. Зайцев.* О бикомпактных полурегулярных и хаусдорфовых расширениях, ДАН СССР, 182, № 1, 1968, 27—30.
10. *В. И. Зайцев.* Бесконечные спектры топологических пространств и их предельные пространства, ДАН СССР, 185, № 1, 1969, 20—23.
11. *С. Г. Овсепян.* Об одном новом способе построения расширений топологических пространств, ДАН СССР, 206, № 4, 1972, 819—822.
12. *С. Г. Овсепян.* Псевдотопологии и псевдотопологические пространства, ДАН Арм.ССР, LV, № 5, 1972, 257—261.
13. *M. Katetov.* Über *H*-abgerschlossene und bikompakte Räume, Casopis math. fys., 69, 1940, 36—49.
14. *S. Fomin.* Extensions of topological spaces, Ann. math., 44, 1943, 471—480.
15. *M. Katetov.* On *H*-closed extensions of topological spaces, Casopis math. fys., 72, 1947, 17—32.