ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

Б. Г. АРАРКЦЯН

ПОВЕДЕНИЕ ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа посвящена поведению при $t \to \infty$ решений некоторых нестационарных краевых задач.

Основные результаты этой работы были анонсированы в заметке [1].

§ 1. Абстрактные почти-периодические и асимптотические почти-периодические функции

Пусть B—некоторое банахово пространство. Через J_a обозначим полупрямую $(a < t < +\infty)$, при некотором $a \geqslant -\infty$, $J_{-\infty} \equiv J$.

Пусть $x = f(t)$ — непрерывная функция из J со значениями в B. Непрерывность понимается в сильном смысле, а именно, $\|f(t+\tau) - f(t)\|_B \to 0$. Далее обозначим через $C(J_a; B)$ банахово пространство непрерывных функций $f(t)$: $J_a \to B$ с нормой

$$\|f(t)\|_{C(J_a;\, B)} = \sup_{t \in J_a} \|f(t)\|_B .$$

Определение 1. Функция $f(t) \in C(J; B)$ называется почти-периодической (п.-п.) в B, если множество $\{f(t+h)\}$ компактно в $C(J; B)$, $h \in J$.

Это определение является обобщением классического определения Бохнера на абстрактные функции. Подробно абстрактные п.-п. функции изучены в [2].

Определение 2. Функция $f(t) \in C(J_a; B)$ называется почти-периодической на J_a, если она является сужением на J_a некоторой п.-п. функции $F(t) \in C(J; B)$.

Определение 3. Функция $f(t) \in C(J_a; B)$ называется асимптотически почти-периодической (а.п.-п.) в B, если

$$f(t) = p(t) + q(t),$$

где $p(t)$ — п.-п. функция на J_a, а $\lim\limits_{t \to \infty} \|q(t)\|_B = 0$. А.п.-п. функция в случае $B = R^1$ были введены и изучены М. Фреше в [3].

Теорема 1. Для того чтобы $f(t) \in C(J_a; B)$ являлась а.п.-п. функцией в B необходимо и достаточно, чтобы любая числовая последовательность $\{h_k\}$, $\lim\limits_{k \to \infty} h_k = +\infty$ содержала подпоследовательность $\{h_{k_i}\}$, для которой $\{f(t+h_k)\}$ сходится в $C(J_a; B)$.

В [3] эта теорема доказана для $B = R^1$. Доказательство в случае произвольного банахова пространства проводится без изменений.

Определение 4. Множество $E \subseteq J_a$ называется относительно плотным в J_a, если существует некоторое число $l > 0$ такое, что в любом интервале длины l, принадлежащем J_a, содержится по крайней мере одна точка из E.

Теорема 2. Для того чтобы функция $f(t) \in C(J_a; B)$ была а.п.-п., необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ соответствовали два числа $l > 0$ и $c \geqslant a$, таких, что в произвольном интервале длины l из J_a содержалось число τ, для которого

$$\|f(t+\tau) - f(t)\|_B \leqslant \varepsilon \text{ для } t \in J_c.$$

Доказательство этой теоремы также можно найти в [3]. В дальнейшем нам понадобится следующий критерий асимптотической почти-периодичности.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $f(t) \in C(J_a; B)$ являлась а.п.-п. функцией в B, необходимо и достаточно, чтобы существовала относительно плотная в J_a последовательность $\{h_k\}$, $\lim\limits_{k \to \infty} h_k = +\infty$ такая, что множество $\{f(t+h_k)\}$ компактно в $C(J_a; B)$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.

Докажем достаточность.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно; так как множество $\{f(t+h_k)\}$ компактно в $C(J_a; B)$, то в этом множестве существует конечная ε-сеть. Это означает, что существуют n чисел $h_{1,0}, h_{2,0}, \cdots, h_{n,0} \in \{h_k\}$, такие что для любого k

$$f(t+h_k) \in \bigcup_{i=1}^{n} S(f(t+h_{i,0}), \varepsilon).$$

Здесь $S(x, \varepsilon)$ означает открытый шар в пространстве $C(J_a; B)$ радиуса ε с центром в точке x. Это, в свою очередь, означает, что любому $k=1, 2, \cdots$, соответствует некоторое $i=1, 2, \cdots, n$, такое что

$$\sup_{t \in J_a} \|f(t+h_k) - f(t+h_{i,0})\|_B \leqslant \varepsilon.$$

Разобьем последовательность $\{f(t+h_k)\}$ на n подпоследовательностей $\{f(t+h_{i,p})\}$ следующим образом:

$$f(t+h_{i,p}) \in S(f(t+h_{i,0}), \varepsilon), \; i = 1, 2, \cdots, n.$$

Тогда имеем

$$\sup_{t \in J_a} \|f(t+h_{i,p}) - f(t+h_{i,0})\|_B \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $m_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{h_{i,0}\}$. Тогда для $c > a + m_0$ имеет место

$$\sup_{t \in J_c} \|f(t+h_{i,p} - h_{i,0}) - f(t)\|_B \leqslant \varepsilon,$$

т. е. числа $\tau_{i,p}=h_{i,p}-h_{i,0}$ для любого i и p являются асимптотически ε-почти-периодами для функции $f(t)$. Для завершения доказательства достаточно показать, что множество $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\tau_{i,p}\}$ относительно плотно в J_a. По условию существует некоторое $d>0$ такое, что произвольный интервал длины d, принадлежащий J_a, содержит некоторое h_k.

Положим $m_1=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{h_{i,0}\}$, $l=m_0-m_1+d$. Очевидно, что $l>0$. Рассмотрим произвольный интервал длины l, принадлежащий J_a.

В интервале $[b-m_1,\ b-m_1+d]$, если $b-m_1>a$, содержится по крайней мере одно число вида h_{i_1,p_1} из последовательности $\{h_k\}$. Тогда, в силу выбора чисел m_0 и m_1

$$b\leqslant h_{i_1,p_1}-h_{i_1,0}\leqslant b-m_1+m_0+d.$$

Теперь теорема 3 следует из теоремы 2.

§ 2. Постановки задач и основные результаты

Пусть H_1 и H_2 — два комплексных гильбертовых пространства, причем $H_1\subseteq H_2$ и оператор вложения H_1 в H_2 вполне непрерывен.

Обозначим через M банахово пространство линейных ограниченных операторов A, действующих из H_1 в H_2, с обычной нормой

$$\|A\|_M=\sup_{\|x\|_{H_1}=1}\|Ax\|_{H_2}.$$

Обозначим через $D(J_a;\ H_1)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных в J_a функций $\varphi(t)$, таких что

$$\varphi(t)\in C(J_a;\ H_1),\quad \varphi'(t)\in C(J_a;\ H_2).$$

Рассмотрим уравнение

$$\int\limits_{J_a}\{(u(t),\ \varphi'(t))_{H_2}+(A(t)\,u(t)+f(t),\ \varphi(t))_{H_1}\}\,dt=0, \tag{1}$$

где $A(t)\in C(J_a;\ M)$ и $f(t)\in C(J_a;\ H_1)$ при некотором $a>-\infty$.

Определение 5. Функция $u(t)\in C(J_a;\ H_1)$ называется решением уравнения (1), если (1) имеет место для всех $\varphi(t)\in D(J_a;\ H_1)$. Мы будем предполагать, что $A(t)=-A_1(t)+iA_2(t)$, где $A_1(t)$, $A_2(t)$ — самосопряженные операторы, причем $A_1(t)$ — положительно определенный, т. е.

$$(A_1(t)\,x,\ x)_{H_1}\geqslant\gamma\,\|x\|^2_{H_1}\ \text{для всех}\ x\in H_1,\ \gamma>0. \tag{2}$$

При этих предположениях вопросы существования и единственности решения уравнения (1) рассматривались, например, в [4].

Пусть теперь $A(t)=B(t)+C(t)$ и $f(t)=h(t)+g(t)$, где $B(t)$ и $h(t)$ — периодические функции, соответственно, в M и H_1 с соизмеримыми периодами T_1 и T_2. Не ограничивая общности, можно полагать $T_1=T_2=1$.

Нас интересует поведение решения $u(t)$ уравнения (1) при $t \to \infty$ в зависимости от поведения при $t \to \infty$ функций $C(t)$ и $g(t)$.

А именно, справедливы

Теорема 4. *Если*

$$\|C(t)\|_M \in L_1(a, \infty), \ \|g(t)\|_{H_1} \in L_1(a, \infty), \tag{3}$$

то ограниченное в H_1 решение $u(t)$ уравнения (1) является а.п.-п. функцией в H_2.

Пусть функции $A(t)$ и $f(t)$ являются асимптотически периодическими, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \|C(t)\|_M = 0, \ \lim_{t\to\infty} \|g(t)\|_{H_1} = 0,$$

Теорема 5. *Равномерно непрерывное и ограниченное в H_1 решение $u(t)$ уравнения (1) является а.п.-п. функцией в H_1, если выполнены условия (3) теоремы 4, а функции $A(t)$ и $f(t)$ являются асимптотически периодическими.*

Замечание. В приложениях важную роль играет случай $A_1 \geqslant 0$. В этом случае теоремы 4, 5 остаются справедливыми, если существует и ограничен A^{-1}. При выполнении условия (2) A^{-1} существует и ограничен. Прежде чем перейти к доказательству теорем 4, 5 приведем примеры краевых задач для уравнений с частными производными, которые приводятся к уравнению вида (1).

Пример 1. Уравнение Шредингера. Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с границей Γ; $G_\tau = J_\tau \times \Omega$, $\Sigma = J_\tau \times \Gamma$. Рассмотрим в G_τ смешанную задачу для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = iLu + F(t, x),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \ u|\Sigma = 0,$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a_0(t, x)\, u.$$

Предполагается, что L — равномерно эллиптический оператор, т. е.

$$\gamma_1 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant (Lu, u)_{L_2(\Omega)} \leqslant \gamma \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \ (\gamma_1 > 0).$$

В качестве пространств H_1 и H_2 берутся, соответственно, пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, причем

$$(A(t)\, u, \varphi)_{H_1} = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} + a_0(t, x)\, u\, \bar{\varphi} \right\} d\Omega.$$

Тогда, если обычным образом определить обобщенное решение, то получим уравнение вида (1) с $A_1 = 0$, решение которого должно удовлетворять начальному условию $u(0, x) = \varphi(x)$.

§ 3. Доказательство теорем 4, 5

Для доказательства теоремы 4 нам понадобится следующая

Лемма 1. *Если $A_1 \geqslant 0$, $u(t)$ — решение уравнения* (1), *то $\|u(t)\|^2_{H_2}$ — абсолютно непрерывная функция, причем справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{H_2} \leqslant 2\,\mathrm{Re}\,(f(t),\, u(t))_{H_1}. \tag{4}$$

Доказательство. Положим в (1) $\varphi(t) = h(t)\,v$, где $h(t) \in D(J_a;\, R^1)$ (т. е. $h(t)$—обычная бесконечно дифференцируемая финитная в J_a функция), $v \in H_1$ произвольно. Тогда из (1) получим

$$\int_{J_a} (u(t),\, v)_{H_2}\, h'(t)\, dt = -\int_{J_a} (A(t)\, u(t) + f(t),\, v)_{H_1}\, h(t)\, dt$$

для произвольной $h(t) \in D(J_a;\, R^1)$. Отсюда следует, что $(u(t),\, v)_{H_2}$— абсолютно непрерывна (см., например, [5]) и

$$\frac{d}{dt}(u(t),\, v)_{H_2} = (A(t)\, u(t) + f(t),\, v)_{H_1}. \tag{5}$$

Проинтегрируем (5) от t до $t+\sigma$ $(t,\ t+\sigma \in J_a)$, получим

$$\left(\frac{u(t+\sigma) - u(t)}{\sigma},\, v\right)_{H_2} = \frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma} (A(\tau)\, u(\tau) + f(\tau),\, v)_{H_1}\, d\tau =$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma} [A(\tau)\, u(\tau) + f(\tau)]\, d\tau,\ v\right)_{H_1}. \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$u_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma} u(\tau)\, d\tau,$$

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma} f(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma} (A(\tau) - A(t))\, u(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Тогда $u_\sigma \underset{\sigma\to 0}{\to} u$ и $f_\sigma \underset{\sigma\to 0}{\to} f$ в слабом смысле в пространстве H_1, функция $u_\sigma(t)$ имеет в H_2 непрерывную производную, причем

$$u'_\sigma(t) = \frac{u(t+\sigma) - u(t)}{\sigma}.$$

Так как (6) имеет место для всех $v \in H_1$, в частности для $u_\rho(t)$, то используя обозначения (7), имеем

$$(u_\sigma'(t),\ u_\rho(t))_{H_2} = (A(t)\,u_\sigma(t) + f_\sigma(t),\ u_\rho(t))_{H_1}. \tag{8}$$

Аналогично

$$(u_\rho'(t),\ u_\sigma(t))_{H_2} = (u_\sigma(t),\ A(t)\,u_\rho(t) + f_\rho(t))_{H_1}. \tag{9}$$

Из (8) и (9), используя (2), самосопряженность A_1 и A_2, получим

$$\frac{d}{dt}(u_\sigma(t),\ u_\rho(t))_{H_2} \leqslant (f_\sigma,\ u_\rho)_{H_1} + (u_\sigma,\ f_\rho)_{H_1}. \tag{10}$$

Проинтегрировав (10) от t_0 до t, получим

$$(u_\sigma(t),\ u_\rho(t))_{H_2} - (u_\sigma(t_0),\ u_\rho(t_0))_{H_2} \leqslant \int_{t_0}^{t} \{(f_\sigma(\tau),\ u_\rho(\tau))_{H_1} + (u_\sigma,\ f_\rho)_{H_1}\}\,d\tau. \tag{11}$$

Тогда (4) следует из (11), если устремить σ и ρ последовательно к нулю.

Доказательство теоремы 4. Запишем уравнение (1) в виде

$$\int_{J_a} \{(u(t),\ \varphi'(t))_{H_2} + (B(t)\,u(t) + h(t),\ \varphi(t))_{H_1} +$$

$$+ (C(t)\,u(t) + g(t),\ \varphi(t))_{H_1}\}\,dt = 0.$$

Пусть m и n—произвольные целые числа $(m > n)$. Тогда функция $w(t) = u(t+m) - u(t+n)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{J_c} \{(w(t),\ \varphi'(t))_{H_2} + (B(t)\,w(t),\ \varphi(t))_{H_1} +$$

$$+ (F(t),\ \varphi(t))_{H_1}\}\,dt = 0,$$

где

$$F(t) = B(t+m)\,u(t+m) - B(t+n)\,u(t+n) + g(t+m) - g(t+n)$$

При получении этого соотношения мы воспользовались линейностью уравнения (1) и периодичностью функций $B(t)$ и $h(t)$.

Из (4) имеем

$$\|w(t)\|_{H_2}^2 \leqslant \|w(t_0)\|_{H_2}^2 + 2\,\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t} (F(\tau),\ w(\tau))_{H_1}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|w(t_0)\|_{H_2}^2 + 2\int_{t_0} |(F(\tau),\ w(\tau))_{H_1}|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|w(t_0)\|_{H_2}^2 + 2\int_{t_0} \|F(\tau)\|_{H_1}\,\|w(\tau)\|_{H_1}\,d\tau = \tag{12}$$

$$= \|w(t_0)\|^2_{H_2} + 2\int_{t_0}^{t} \|B(\tau+m)\,u(\tau+m) - B(\tau+n)\,u(\tau+n) +$$

$$+ \alpha(\tau+m) - \alpha(\tau+n)\|_{H_1} \|w(\tau)\|_{H_1}\, d\tau.$$

По условию теоремы $\|w(t)\|_{H_1} \leqslant C$. Тогда из (12) следует

$$\|w(t)\|^2_{H_2} \leqslant \|w(t_0)\|^2_{H_2} + 2C\Big[\int_{t_0}^{t} \|B(\tau+m)\,u(\tau+m)\|_{H_1}\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|B(\tau+n)\,u(\tau+n)\|_{H_1}\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \|\alpha(\tau+m)\|_{H_1}\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \|\alpha(\tau+n)\|_{H_1}\, d\tau. \tag{13}$$

Но

$$\|B(t+m)\,u(t+m)\|_{H_1} \leqslant \|B(t+m)\|_M \|u(t+m)\|_{H_1},$$

$$\|B(t+n)\,u(t+n)\|_{H_1} \leqslant \|B(t+n)\|_M \|u(t+n)\|_{H_1}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) получим окончательно

$$\|w(t)\|^2_{H_2} \leqslant \|w(t_0)\|^2_{H_2} + C\int_{t_0}^{t} \{\|B(\tau+m)\|_M +$$

$$+ \|B(\tau+n)\|_M + \|\alpha(\tau+m)\|_{H_1} + \|\alpha(\tau+n)\|_{H_1}\}\, d\tau \leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant \|w(t_0)\|^2_{H_2} + C\int_{t_0+n}^{\infty} \{\|B(\tau)\|_M + \|\alpha(\tau)\|_{H_1}\}\, d\tau.$$

Так как $\|B(t)\|_M$ и $\|\alpha(t)\|_{H_1} \in L_1(a, \infty)$, то слагаемые, стоящие в скобках в правой части (15), можно сделать меньше произвольного $\varepsilon > 0$ за счет выбора n.

С другой стороны, из полной непрерывности оператора вложения H_1 в H_2 и ограниченности $u(t)$ в H_1, следует, что множество значений $u(t)$ компактно в H_2. Поэтому из последовательности натуральных чисел $\{N\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{N_k\}$, такую что при $p, q > N_0$

$$\|u(N_p) - u(N_q)\|_{H_2} < \varepsilon,$$

а, следовательно, и

$$\|u(a+N_p) - u(a+N_q)\|_{H_2} \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Из (15) и (16) вытекает, что множество $\{u(t+N)\}$ компактно в $C(J_a; H_2)$, что и доказывает теорему, так как множество натуральных чисел относительно плотно в J.

Доказательство теоремы 5. Для произвольных $v_1, v_2 \in H_1$ имеет место

$$|(v_1, v_2)_{H_2}| \leqslant \|v_1\|_{H_2} \|v_2\|_{H_2} \leqslant \gamma \|v_1\|_{H_1} \|v_2\|_{H_2},$$

где γ—норма оператора вложения пространства H_1 в H_2.

Тогда по теореме Рисса

$$(v_1, v_2)_{H_2} = (Pv_1, v_2)_{H_1}, \tag{17}$$

где P — некоторый ограниченный оператор из H_2 в H_1. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$(u(t), v)_{H_2} = (u(t_0), v)_{H_2} + \left(\int_{t_0}^{t} [A(\tau) u(\tau) + f(\tau) d\tau, v\right)_{H_1}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) имеем

$$Pu(t) = Pu(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A(\tau) u(\tau) + f(\tau)] d\tau.$$

С другой стороны, так как $u(\tau)$—а.п.-п. функция в H_2 из оценки

$$\|Pu(t+\tau) - Pu(t)\|_{H_1} \leqslant \|P\| \|u(t+\tau) - u(t)\|_{H_2}$$

следует, что функция $Pu(t)$ является а.п.-п. функцией в H_1. Из (18) следует, что и функция

$$\int_{t_0}^{t} [A(\tau) u(\tau) + f(\tau)] d\tau$$

является а.п.-п. функцией в H_1. Функция $A(t) u(t) + f(t)$ является равномерно непрерывной. По теореме Фреше о производной а.п.-п. функции [3] вытекает, что и функция $A(t) u(t) + f(t)$ является а.п.-п., следовательно и функция $z(t) = A(t) u(t)$ есть а.п.-п. функция в H_1. Так как $A = -A_1 + iA_2$, где A_1 — положительно определенный самосопряженный оператор, то существует $A^{-1}(t)$ и

$$\|A^{-1}(t)\|_M \leqslant K.$$

Для завершения доказательства достаточно установить, что оператор $A^{-1}(t)$ является а.п.-п. в M. Это следует из теоремы 1 и оценки

$$\|A^{-1}(t+h_p) - A^{-1}(t+h_q)\|_M =$$
$$= \|A^{-1}(t+h_p)[A(t+h_p) - A(t+h_q)] A^{-1}(t+h_q)\|_M <$$
$$< K^2 \|A(t+h_p) - A(t+h_q)\|_M,$$

справедливой для любой последовательности $\{h_k\}$. Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.II.1973

Բ. Գ. ԱՐԱՐՔՑՅԱՆ. Որոշ օպերատորային հավասարումների լուծումների վարքը երբ $t \to \infty$ (ամ
փոփում)

Ուսումնասիրվում են հիլբերտյան տարածության մեջ որոշ օպերատորային հավասարում
ների ասիմպտոտորեն համարյա պարբերական լուծումները։ Դիտարկված խնդիրների դասի մեջ
մասնավորապես մտնում է առաջին եզրային խնդիրը Շրեդինգերի հավասարման համար։

B. G. ARARKTZIAN. *Asymptotic behavtour of the solutions of some operator equations* (summary)

Asymptotically almost-periodic solutions of some operator equations in Hilber space particularly, the first boundary problem for Shröedienger equation, are con sidered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Г. Араркцян.* Об асимптотической почти-периодичности решений некоторы нестационарных уравнений, ДАН СССР, 205, № 3, 1972, 511—512.
2. *L. Amerio, G. Prouse.* Almost periodic functions and functional equations, Nev York, 1971.
3. *M. Fréchet.* Les fonctions asymptotiement presque—periodiques, Revue Scientifi que, 79, 1941.
4. *М. И. Вишик.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и при ближенный метод их решения, Мат. сб., 39 (81), № 1, 1956.
5. *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, т. 5, Изд. физ.-мат. литературы, М., 1960.