ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

Э. А. МИРЗАХАНЯН

ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП

В этой статье строятся абсолютные бесконечномерные гомотопические группы индекса q подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H. Основой всех построений служит класс отображений K_0, построенный В. Г. Болтянским [1].

При этом определяются два подхода к определению гомотопических групп. Первый подход (для несколько другого класса отображений, в общих чертах описан в заметке [2]) связан с выбором ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве H. Второй подход не связан с выбором базиса. Установленная ниже эквивалентность обоих подходов показывает независимость, в первом подходе, построенных гомотопических групп от выбора базиса. Здесь дается подробное изложение результатов заметки [3].

Пусть $\sigma = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$—некоторый ортонормированный базис пространства H. Через S_σ, обозначим линейный оператор (с нормой 1), определяемый соотношениями

$$S_\sigma (e_1)=0, \; S_\sigma (e_n) = e_{n-1} \text{ при } n>1.$$

Таким образом, для любого элемента $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n + \cdots \in H$ мы имеем

$$S_\sigma (x) = \xi_1 S_\sigma (e_1) + \xi_2 S_\sigma (e_2) + \cdots + \xi_n S_\sigma (e_n) + \cdots =$$
$$= \xi_2 e_1 + \xi_3 e_2 + \cdots + \xi_{n+1} e_n + \cdots .$$

Мы будем также рассматривать степени оператора S_σ. Именно степень S_σ^k оператора S_σ представляет собой линейный оператор (с нормой 1), удовлетворяющий соотношениям $S_\sigma^k (e_i) = 0$ при $i=1, 2, \cdots, k$; $S_\sigma^k (e_n) = e_{n-k}$ при $n > k$. Таким образом, для любого элемента $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n + \cdots \in H$ мы имеем

$$S_\sigma^k (x) = \xi_1 S_\sigma^k (e_1) + \xi_2 S_\sigma^k (e_2) + \cdots + \xi_n S_\sigma^k (e_n) + \cdots =$$
$$= \xi_{k+1} e_1 + \xi_{k+2} e_2 + \cdots + \xi_{n+k} e_n = \cdots .$$

Далее, через T_σ мы обозначим линейный оператор (с нормой 1), определяемый соотношением $T_\sigma (e_n) = e_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$. Его k-ая степень T_σ^k удовлетворяет соотношению $T_\sigma^k (e_n) = e_{n+k}$ $(n=1, 2, \cdots)$. Таким образом, для любого элемента $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n + \cdots \in H$ имеем

$$T_a^k(x) = \xi_1 T_a^k(e_1) + \xi_2 T_a^k(e_2) + \cdots + \xi_n T_a^k(e_n) + \cdots =$$
$$= \xi_1 e_{k+1} + \xi_2 e_{k+2} + \cdots + \xi_n e_{n+k} + \cdots.$$

Из приведенных равенств непосредственно вытекает, что операторы T_a и S_a удовлетворяют следующим соотношениям:

$$S_a^k \circ T_a^k = E, \tag{1}$$

$$(T_a^k \circ S_a^k)(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leqslant k; \\ e_n & \text{при } n > k. \end{cases}$$

Иными словами, $S_a^k \circ T_a^k$ есть тождественный оператор, но $T_a^k \circ S_a^k$ тождественным оператором не является, а представляет собой ортогональную проекцию пространства H на ортогональное дополнение подпространства L_k (натянутого на векторы $e_1, \cdots, e_k$). Из этого ясно, что отображение $T_a^k \circ S_a^k \colon H \to H$ принадлежит классу K_0. Мы видим, что T_a^k является правым обратным оператором для S_a^k, но левым обратным не является.

Пусть теперь G — произвольное открытое множество пространства H. Условимся говорить, что отображение $f \colon G \to H$ принадлежит классу $K_a^{(q)}$ $(q \geqslant 0)$, если его можно представить в виде $f = \varphi \circ T_a^q$, где отображение φ определено на $T_a^q(G)$ и принадлежит классу K_0. Далее условимся говорить, что отображение $f \colon G \to H$ принадлежит классу $K_a^{(-q)}$ $(q \geqslant 0)$, если его можно представить в виде $f \colon S_a^q \circ \varphi$, где $\varphi \colon G \to H$ принадлежит классу K_0. Таким образом, класс отображений $K_a^{(q)}$ определен для любого целого q.

П р е д л о ж е н и е 1. *При $q > 0$ отображение f в том и только том случае принадлежит классу $K_a^{(q)}$, если $f \circ S_a^q \in K_0$. При $q \leqslant 0$ отображение f в том и только том случае принадлежит классу $K_a^{(q)}$, если $T_a^{-q} \circ f \in K_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $q \geqslant 0$. Пусть $f \in K_a^{(q)}$, т. е. $f = \varphi \circ T_a^q$, где отображение φ определено на $T_a^q(G)$ и принадлежит классу K_0. Тогда

$$f \circ S_a^q = (\varphi \circ T_a^q) \circ S_a^q = \varphi \circ (T_a^q \circ S_a^q).$$

Но отображение φ и $T_a^q \circ S_a^q$ оба принадлежат классу K_0, а потому и их композиция, т. е. отображение $f \circ S_a^q$ принадлежит классу K_0.

Обратно, пусть отображение f обладает тем свойством, что $f \circ S_a^q \in K_0$ (где по-прежнему, $q \geqslant 0$). Обозначим это отображение через φ, т. е. $\varphi = f \circ S_a^q \in K_0$.

Пусть G—область определения отображения f. Тогда для любой точки $x \in T_a^q(G)$ мы имеем (в силу (1))

$$S_a^q(x) \in S_a^q(T_a^q(G)) = E(G) = G,$$

и потому определена точка $f(S^q_\sigma(x)) = (f \circ S^q_\sigma)(x) = \varphi(x)$, т. е. точка x принадлежит области определения отображения φ. Мы видим, что отображение φ определено на множестве $T^q_\sigma(G)$. Далее, $\varphi \circ T^q_\sigma = (f \circ S^q_\sigma) \circ T^q_\sigma = f \circ (S^q_\sigma \circ T^q_\sigma) = f$ (см. (1)), а это и означает, что $f \in K^{(q)}_\sigma$.

Рассмотрим теперь случай $q \leqslant 0$. Пусть $f \in K^{(q)}_\sigma$, т. е. $f = S^{-q}_\sigma \circ \varphi$, где $\varphi : G \to H$ принадлежит классу K_0. Тогда имеем

$$T^{-q}_\sigma \circ f = T^{-q}_\sigma (S^{-q}_\sigma \circ \varphi) = (T^{-q}_\sigma \circ S^{-q}_\sigma) \circ \varphi.$$

Но отображения $T^{-q}_\sigma \circ S^{-q}_\sigma$ и φ оба принадлежат классу K_0, а потому и их композиция, т. е. отображение $T^{-q}_\sigma \circ f$ принадлежит классу K_0.

Обратно, пусть отображение f обладает тем свойством, что $T^{-q}_\sigma \circ f \in K_0$ (где, по-прежнему, $q \leqslant 0$). Обозначим это отображение через φ, т. е. $\varphi = T^{-q}_\sigma \circ f \in K_0$. Тогда область определения отображения φ совпадает с областью определения G отображения f. Далее

$$S^{-q}_\sigma \circ \varphi = S^{-q}_\sigma \circ (T^{-q}_\sigma \circ f) = (S^{-q}_\sigma \circ T^{-q}_\sigma) \circ f = E \circ f = f \quad \text{(см. (1))},$$

а это и означает, что $f \in K^{(q)}_\sigma$.

Предложение 1 доказано полностью.

Отметим, что при $q \neq 0$ указание базиса σ в обозначении класса отображений $K^{(q)}_\sigma$ существенно: для разных базисов σ эти классы отображений (при одном и том же $q \neq 0$) могут не совпадать. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Прежде всего заметим, что, согласно определению, мы имеем: $T^q_\sigma \in K^{(q)}_\sigma$ при $q > 0$ и $S^{-q}_\sigma \in K^{(q)}_\sigma$ при $q < 0$. Следовательно, для того чтобы классы $K^{(q)}_\sigma$ и $K^{(q)}_{\sigma'}$ совпадали, необходимо чтобы при $q > 0$ были выполнены включения $T^q_\sigma \in K^{(q)}_{\sigma'}$, $T^q_{\sigma'} \in K^{(q)}_\sigma$, а при $q < 0$ были выполнены включения $S^{-q}_\sigma \in K^{(q)}_{\sigma'}$, $S^{-q}_{\sigma'} \in K^{(q)}_\sigma$. В силу предложения 1 эти необходимые условия можно записать в виде

$$T^q_\sigma \circ S^q_{\sigma'} \in K_0, \quad T^q_{\sigma'} \circ S^q_\sigma \in K_0 \quad \text{при } q > 0;$$

$$T^{-q}_{\sigma'} \circ S^{-q}_\sigma \in K_0, \quad T^{-q}_\sigma \circ S^{-q}_{\sigma'} \in K_0 \quad \text{при } q < 0.$$

Иными словами, для того чтобы классы отображений $K^{(q)}_\sigma$ и $K^{(q)}_{\sigma'}$ совпадали, необходимо выполнение условия

$$T^n_\sigma \circ S^n_{\sigma'} \in K_0, \quad T^n_{\sigma'} \circ S^n_\sigma \in K_0, \quad \text{где } n = |q|. \tag{2}$$

Легко видеть, что это необходимое условие является и достаточным. Действительно, рассмотрим для примера случай $q > 0$ (случай $q < 0$ аналогичен). Если $f \in K^{(q)}_\sigma$, то, согласно предложению 1, $f \circ S^q_\sigma \in K_0$. Учитывая соотношение (2), получаем, что отображение

$$(f \circ S^q_\sigma) \circ (T^q_\sigma \circ S^q_{\sigma'}) = f \circ (S^q_\sigma \circ T^q_\sigma) \circ S^q_{\sigma'} = f \circ S^q_{\sigma'}$$

(см. (1)) также принадлежит классу K_0. Но это означает, в силу предложения 1, что $f \in K^{(q)}_{\sigma'}$. Итак, если $f \in K^{(q)}_\sigma$, то, при выполнении условия (2), $f \in K_{\sigma}^{(q)}$, т. е. $K_{\sigma}^{(q)} \subset K_{\sigma'}^{(q)}$. Аналогично устанавливается и обратное включение $K_{\sigma'}^{(q)} \subset K_{\sigma}^{(q)}$. (Заметим, что условие (2) симметрично относительно σ и σ'). Таким образом, при выполнении условия (2) классы $K_{\sigma}^{(q)}$ и $K_{\sigma'}^{(q)}$ совпадают.

Тем самым доказано

Предложение 2. *Для совпадения классов $K_{\sigma}^{(q)}$ и $K_{\sigma'}^{(q)}$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* (2).

Рассмотрим пример. Пусть $\sigma = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ — некоторый ортонормированный базис в H. Определим последовательность векторов $\sigma' = \{e_1', e_2', \cdots, e_n', \cdots\}$ следующим образом:

$$e_l' = \begin{cases} e_{k(k-1)+1} & \text{при } l = k(k+1),\ k = 1, 2, \cdots; \\ e_{l+1} & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко проверить, что σ' также представляет собой ортонормированный базис, так как в последовательности σ' встречаются все векторы базиса σ (без повторения), только в другом порядке. Возьмем теперь произвольное целое $q \neq 0$. Тогда при любом $k > n$ (где $n = |q|$) мы имеем (учитывая, что $n \neq 0$)

$$(T_{\sigma}^{n} \circ S_{\sigma'}^{n})(e_{k(k+1)+n+1}) = (T_{\sigma}^{n} \circ S_{\sigma'}^{n})(e'_{k(k+1)+n}) =$$

$$= T_{\sigma}^{n}(e'_{k(k+1)}) = T_{\sigma}^{n}(e_{k(k-1)+1}) = e_{k(k-1)+n+1}.$$

Так как, очевидно, $k(k+1)+n+1 \neq k(k-1)+n+1$, то отображение $T_{\sigma}^{n} \circ S_{\sigma'}^{n}$, переводит вектор $e_{k(k+1)+n+1}$ в ортогональный ему вектор. Итак, как угодно далеко в последовательности σ найдутся единичные векторы, которые переводятся отображением $T_{\sigma}^{n} \circ S_{\sigma'}^{n}$ в ортогональные им единичные векторы, и потому $T_{\sigma}^{n} \circ S_{\sigma'}^{n} \overline{\in} K_0$. Иначе говоря, условие (2) не выполнено, и потому классы отображений $K_{\sigma}^{(q)}$ и $K_{\sigma'}^{(q)}$ для рассматриваемых базисов σ, σ' не совпадают (ни при каком $q \neq 0$).

Перейдем теперь к определению гомотопических групп. Через Σ всюду в дальнейшем будет обозначаться единичный шар пространства H (т. е. множество всех элементов $x \in H$, для которых $\|x\| \leqslant 1$)}
Пусть $x_0 \in H$. Отображение f: $H \to H$ мы условимся называть сфероидом индекса q в точке x_0, если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) отображение f принадлежит классу $K_{\sigma}^{(q)}$;

2) $f(H \setminus \Sigma) = x_0$.

Заметим, что при определении сфероидов базис $\sigma = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ предполагается фиксированным.

Введем теперь операцию сложения сфероидов. Пусть f, g — два сфероида индекса q в точке $x_0 \in H$.

Положим

$$h(x) = \begin{cases} f(2x + e_1) & \text{при} \quad xe_1 \leqslant 0 \\ g(2x - e_1) & \text{при} \quad xe_1 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Мы докажем сейчас, что отображение $h: H \to H$ также является сфероидом индекса q в точке x_0; этот сфероид h называется суммой сфероидов f и g и обозначается через $f + g$.

В самом деле, рассмотрим $q \geqslant 0$. В этом случае отображения $\varphi = f \circ S^q_0$, $\psi = g \circ S^q_0$ принадлежат классу K_0 (см. предложение 1). Обозначим через $\Gamma_{-1}, \Gamma_0, \Gamma_1$ гиперплоскости, определяемые соответственно уравнениями $xe_1 = -1$, $xe_1 = 0$, $xe_1 = 1$. Для точек $x \in \Gamma_0$ мы имеем: $(2x + e_1)\, e_1 = 1$, $(2x - e_1)\, e_1 = -1$, т. е. $2x + e_1 \in \Gamma_1$, $2x - e_1 \in \Gamma_{-1}$. Но в силу определения сфероидов выполнены соотношения $f(\Gamma_1) = x_0$, $g(\Gamma_{-1}) = x_0$ (поскольку внутренность шара Σ не пересекается с гиперплоскостями Γ_{-1} и Γ_1). Следовательно, при $x \in \Gamma_0$ мы имеем $f(2x + e_1) \in f(\Gamma_1) = x_0$, $g(2x - e_1) \in g(\Gamma_{-1}) = x_0$, т. е. $f(2x + e_1) = g(2x - e_1) = x_0$. Мы видим, что две строки определения (3) согласованы на гиперплоскости Γ_0, по обе стороны которой отображение $h(x)$ определяется по-разному. Следовательно, отображение $h: H \to H$ непрерывно. Далее

$$(h \circ S^q_0)(x) =$$

$$= \begin{cases} f(2S^q_0(x) + e_1) = f(S^q_0(2x + e_{q+1})) = \varphi(2x + e_{q+1}) & \text{при } S^q_0(x)\, e_1 \leqslant 0, \\ g(2S^q_0(x) - e_1) = g(S^q_0(2x - e_{q+1})) = \psi(2x - e_{q+1}) & \text{при } S^q_0(x)\, e_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Иначе говоря

$$(h \circ S^q_0)(x) = \begin{cases} \varphi(2x + e_{q+1}) & \text{при} \quad xe_{q+1} \leqslant 0, \\ \psi(2x - e_{1+q}) & \text{при} \quad xe_{q+1} \geqslant 0. \end{cases}$$

Отображение $x \to 2x + e_{q+1}$ пространства H на себя, очевидно, принадлежит классу K_0 (и имеем в любой точке терминальную производную, равную 2). Так как $\varphi \in K_0$, то отображение $x \to \varphi(2x + e_{q+1})$ также принадлежит классу K_0. Точно так же, принадлежит классу K_0 и отображение $x \to \psi(2x - e_{q+1})$. Из этого следует, что в каждой точке x, удовлетворяющей условию $xe_{q+1} \neq 0$, отображение $h \circ S^q_0$ удовлетворяет условиям, указанным в определении класса K_0 (см. [1]). Если же $xe_{q+1} = 0$, то оба отображения $x \to \varphi(2x + e_{q+1})$, $x \to \psi(2x - e_{q+1})$ имеют в точке x терминальную производную, равную нулю. Следовательно, и в точках x, удовлетворяющих условию $xe_{q+1} = 0$, отображение $h \circ S^q_0$ удовлетворяет условиям, указанным в определении класса K_0, причем в этих точках отображение $h \circ S^q_0$ имеет терминальную производную, равную нулю. Тем самым доказано, что $h \circ S^q_0 \in K_0$ и потому, в силу предложения 1, отображение h принадлежит классу $K^{(q)}_0$. (Мы провели доказательство этого факта для $q \geqslant 0$, в случае $q < 0$ рассуждения аналогичны).

Итак, $h \in K_{\sigma}^{(q)}$, т. е. отображение h удовлетворяет условию 1), указанному в определении сфероида. Второе условие, т. е. $h(H \setminus \Sigma) = x_0$ проверяется непосредственно. Таким образом, h есть сфероид индекса q в точке x_0, чем и завершается обоснование определения сложения сфероидов.

Пусть X — произвольное подмножество гильбертова пространства H и x_0 — фиксированная точка множества X. Если сфероид f: $H \to H$ индекса q в точке x_0 обладает тем свойством, что $f(H) \subset X$, то мы будем его называть сфероидом индекса q множества X в точке x_0. Ясно, что сумма двух сфероидов индекса q множества X в точке x_0 снова является сфероидом индекса q множества X в точке x_0.

Для завершения построения бесконечномерных гомотопических групп остается определить понятие гомотопности двух сфероидов индекса q множества X в точке x_0. Обозначим через R числовую прямую, а через I—отрезок $[0, 1]$. Прямое произведение $H^* = R \times H$ будем рассматривать как гильбертово пространство, считая для двух элементов (t, x), (t', x') пространства $H^* = R \times H$ их скалярное произведение равным $tt' + xx'$. Если обозначить вектор $(1,0) \in H^*$ через e_0, то (при указанном определении скалярного произведения) последовательность $\sigma^* = (e_0, e_1, \cdots, e_n, \cdots)$ будет ортонормированным базисом пространства H^* (где $\sigma = (e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots)$—тот фиксированный базис, который использовался при рассмотрении сфероидов). По отношению к пространству H^* исходное пространство H является гиперплоскостью (ортогональной вектору e_0). Мы будем рассматривать полосу $(I \times H) \subset H^*$.

Отображение Φ: $I \times H \to H$ мы будем называть гомотопией сфероидов индекса q в точке x_0, если оно, во-первых, принадлежит классу $K_{\sigma^*}^{(q)}$ и, во-вторых, для любого $t \in I$ отображение $\Phi_t : H \to H$, определяемое равенством $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$, $x \in H$ является сфероидом индекса q в точке $x_0 \in H$. Если при этом $\Phi_0 = f$ и $\Phi_1 = g$, то мы будем говорить, что гомотопия Φ соединяет сфероиды f и g. Два сфероида f, g индекса q множества X в точке x_0 называются гомотопными между собой в X, если существует такая гомотопия Φ: $I \times H \to H$, индекса q в точке x_0, соединяющая f и g, что $\Phi(I \times H) \subset X$. Гомотопность сфероидов будем отмечать записью $f \sim g$.

Предложение 3. *Пусть X — произвольное множество пространства H и $x_0 \in X$. Отношение гомотопности сфероидов индекса q множества X в точке x_0 (рассматриваются гомотопии во множестве X) рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если θ означает постоянный сфероид (т. е. $\theta(H) = x_0$), то $f + \theta \sim f$ для любого сфероида f. Далее, $f + g \sim g + f$ для любых двух сфероидов f, g. Наконец, если сфероиды f и g симметричны относительно гиперплоскости Γ_0, определяемой уравнением $xe_1 = 0$ (т. е. $f(x) = g(y)$) при выполнении условий $x + y \in \Gamma_0$, $x - y \perp \Gamma_0$), то $f + g \sim \theta$.*

Доказательство. Установим последнее утверждение. Пусть сфероиды f и g симметричны. Положим

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} f(2x + (1-2t)\, e_1) & \text{при } xe_1 \leqslant 0, \\ g(2x - (1-2t)\, e_1) & \text{при } xe_1 \geqslant 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $x \in H$, $t \in I$. Мы получаем по этой формуле отображение $\Phi\colon I \times H \to H$. В силу симметричности сфероидов f и g обе строки определения (4) согласованы при $x \in \Gamma_0$ (т. е. при $xe_1 = 0$), и потому отображение Φ непрерывно. Далее, определив отображение $\Phi_t\colon H \to H$ формулой $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$, мы легко найдем, что $\Phi_t(H \setminus \Sigma) = x_0$, т. е. Φ_t есть сфероид при любом $t \in I$ (причем из того, что f и g сфероиды индекса q, легко вытекает, так же как и при рассмотрении формулы (3), что $\Phi \in K_{\sigma}^{(q)}$, $\Phi_t \in K_{\sigma}^{(q)}$). Остается заметить, что $\Phi_0 = f + g$, $\Phi_1 = \theta$. Этим гомотопия $f + g \sim \theta$ установлена.

Докажем предпоследнее утверждение предложения 3. С этой целью для любых двух сфероидов f, g положим

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} f(2x + e_1 \cos \pi t + e_2 \sin \pi t) & \text{при } x(e_1 \cos \pi t + e_2 \sin \pi t) \leqslant 0, \\ g(2x - e_1 \cos \pi t - e_2 \sin \pi t) & \text{при } x(e_1 \cos \pi t + e_2 \sin \pi t) \geqslant 0. \end{cases}$$

Как и прежде, это отображение является гомотопией сфероидов. Далее, определив сфероиды $\Phi_t\colon H \to H$ формулой $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$, мы найдем, что сфероид Φ_0 определяется формулой

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} f(2x + e_1) & \text{при } xe_1 \leqslant 0, \\ g(2x - e_1) & \text{при } xe_1 \geqslant 0, \end{cases}$$

а сфероид Φ_1—формулой

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} f(2x - e_1) & \text{при } xe_1 \geqslant 0, \\ g(2x + e_1) & \text{при } xe_1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Иначе говоря, $\Phi_0 = f + g$, $\Phi_1 = g + f$, и потому построенное отображение $\Phi\colon I \times H \to H$ устанавливает гомотопию $f + g \sim g + f$.

Докажем второе утверждение предложения. Пусть f—произвольный сфероид. Положим

$$\Phi(t, x) = f((1 + t)\, x + te_1), \quad t \in I, \quad x \in H.$$

Непосредственно проверяется, что это отображение $\Phi\colon I \times H \to H$ устанавливает гомотопность $f \sim f + \theta$ предложения.

Наконец, первое утверждение устанавливается дословно так же как и в случае „конечномерных“ (т. е. обычных) гомотопических групп. Итак, предложение 3 доказано.

В силу предложения 3 все сфероиды индекса q множества X в точке x_0 разбиваются на классы гомотопности. Множество всех этих классов мы обозначим через $\Pi_q^{\sigma}(X;\ x_0)$. Введенное выше сложение сфероидов определяет сложение гомотопических классов (по представителям). Относительно определенной таким образом операции сложения множество $\Pi_q^\sigma(X; x_0)$ оказывается коммутативной группой. В самом деле, коммутативность сложения вытекает из предпоследнего утверждения предложения 3. Ассоциативность устанавливается аналогично тому, как это делается в случае „конечномерных" групп (т. е. построением гомотопии Φ, как это несколько раз мы делали при доказательстве предложения 3). Далее, из второго утверждения предложения 3 вытекает, что гомотопический класс, содержащий сфероид θ, является нулевым элементом (для сложения в множестве $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$). Наконец, если α—произвольный элемент множества $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ и f—произвольный сфероид класса α, то обозначив через g симметричный ему сфероид, а через β—гомотопический класс сфероида g, мы найдем (в силу последнего утверждения предложения 3), что $\alpha+\beta=0$, т. е. β—противоположный элемент для α. Тем самым доказано, что $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ есть (относительно введенной операции сложения) коммутативная группа. Эту группу мы и назовем бесконечномерной гомотопической группой индекса q множества X в точке x_0. Группа $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ определена для любого целого q (положительного, отрицательного или равного нулю). Заметим, что в процессе всего построения группы $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ базис $\sigma=\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ пространства H предполагался фиксированным. Независимость группы $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ от выбора базиса σ требует специального доказательства, которое мы проведем ниже (при описании второго подхода к определению бесконечномерных гомотопических групп). Таков первый подход к построению бесконечномерных групп.

Перейдем к описанию второго подхода. Подпространство A гильбертова пространства H будем называть подпространством дефекта q, если ортогональное дополнение к A (в пространстве H) имеет размерность q. Здесь q может быть нулем или любым натуральным числом. Нам, однако, понадобится ввести понятие подпространства дефекта q и в том случае, если q будет отрицательным числом. Именно, если $q=-n$, где n—натуральное число, то A мы будем называть (по отношению к H) подпространством дефекта q, если A является гильбертовым пространством, содержащим H в качестве своего подпространства дефекта $n=-q$.

Дадим теперь определение класса отображений K_q^*, где q—произвольное целое число. При $q=0$ мы определим K_0^* как множество всех отображений $f\colon H\to H$, принадлежащих классу K_0. Если $q>0$, то под K_q^* мы будем понимать множество всех отображений $f\colon A\to H$, принадлежащих классу K_0, где $A\subset H$—некоторое подпространство дефекта q. Наконец, при $q<0$ под K_q^* мы будем понимать множество всех отображений $f\colon A\to H$, принадлежащих в гильбертовом пространстве A классу K_0, где $A\supset H$—некоторое подпространство дефекта q

Пусть A —подпространство гильбертова пространства H, имеющее конечный дефект q (положительный, отрицательный или равный нулю). Пусть, далее, Σ_A—единичный шар подпространства A и x_0—

некоторая точка пространства H. Отображение $f: A \to H$ класса K_q^* мы будем называть сфероидом индекса q в точке x_0, если $f(A \setminus \Sigma_A) = x_0$.

Определим теперь сумму двух сфероидов f, g индекса q, определенных на одном и том же подпространстве A пространства H (имеющем дефект q). С этой целью выберем в A произвольный единичный вектор a и положим

$$h(x) = \begin{cases} f(2x+a) & \text{при } xa \leqslant 0, \ x \in A, \\ g(2x-a) & \text{при } xa \geqslant 0, \ x \in A \end{cases} \tag{5}$$

(ср. (3)). Так же как и при первом подходе к определению бесконечномерных гомотопических групп доказывается, что отображение $h: A \to H$, определенное этой формулой, является сфероидом индекса q в точке x_0. Этот сфероид мы будем называть суммой сфероидов f и g и будем обозначать его через $f+g$. Заметим, что это определение суммы сфероидов предполагает, что фиксировано подпространство A дефекта q (на котором заданы оба сфероида f, g) и, кроме того, фиксирован единичный вектор $a \in A$. Вопрос о независимости наших построений от выбора этих элементов мы рассмотрим ниже.

Определим теперь понятие гомотопности двух сфероидов. Пусть $f, g: A \to H$—два сфероида индекса q в точке $x_0 \in H$, определенные на одном и том же подпространстве A дефекта q. Обозначим, как и выше, через R числовую прямую, а через I—отрезок $[0,1]$. Прямое произведение $A' = R \times A$ можно рассматривать как гильбертово пространство, для которого A является подпространством дефекта 1. По отношению к исходному пространству H пространство A' можно рассматривать как подпространство дефекта $q-1$ (для этого в случае $q>0$ следует за R принять любую содержащуюся в H прямую, проходящую через нуль и ортогональную подпространству $A \subset H$). Отображение $\Phi: I \times A \to H$ мы будем называть гомотопией сфероидов, если оно принадлежит классу K_0 (в гильбертовом пространстве $A' \cup H$) и, кроме того, для любого $t \in I$ отображение $\Phi_t: A \to H$, определяемое равенством $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$, $x \in A$ является сфероидом индекса q в точке $x_0 \in H$. Если при этом $\Phi_0 = f$ и $\Phi_1 = g$, то мы будем говорить, что гомотопия Φ соединяет сфероиды f и g. Два сфероида, которые можно соединить гомотопией, называются гомотопными между собой.

Теперь мы можем доказать, что, с точностью до гомотопности, сумма сфероидов не зависит от выбора единичного вектора $a \in A$. В самом деле, пусть $f, g: A \to H$— два сфероида индекса q в точке x_0, определенные на одном и том же подпространстве A дефекта q. Пусть, далее, a и b—два произвольных единичных вектора подпространства A. Обозначим через φ угол между этими векторами $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$. Далее, через $c \in A$ обозначим такой единичный вектор, лежащий с векторами a и b в одной (двумерной) плоскости, что $a \perp c$

и угол между векторами b и c не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Тогда поворот вектора a на угол φ в направлении от вектора a к c переводит a в вектор b. Положим теперь

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} f(2x + a\cos\varphi t + c\sin\varphi t) & \text{при } x(a\cos\varphi t + c\sin\varphi t) \leqslant 0, \\ g(2x - a\cos\varphi t - c\sin\varphi t) & \text{при } x(a\cos\varphi t + c\sin\varphi t) \geqslant 0. \end{cases}$$

Мы получаем непрерывное отображение $\Phi: I \times A \to H$, являющееся гомотопией сфероидов (ср. конец доказательства предложения 3). Определим сфероиды Φ_t: $A \to H$ формулой $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$. Тогда построенная гомотопия Φ соединяет сфероиды Φ_0 и Φ_1, причем как легко видеть, Φ_0 есть сумма $f+g$, вычисленная с использованием вектора $a \in A$, а сфероид Φ_1 есть сумма $f+g$, вычисленная с использованием вектора $b \in A$. Тем самым независимость, с точностью до гомотопности, суммы $f+g$ от выбора вектора $a \in A$ установлена. Если сфероид $f: A \to H$ индекса q в точке x_0 обладает тем свойством, что $f(A) \subset X$, где X — некоторое подмножество пространства H, то мы будем его называть сфероидом индекса q множества X в точке x_0.

Предложение 4. *Пусть X—произвольное множество пространства H и $x_0 \in X$. Пусть, далее, A — фиксированное подпространство дефекта q пространства H. Отношение гомотопности сфероидов f: $A \to H$ индекса q множества X в точке x_0 (рассматриваются гомотопии в множестве X, т. е. такие, что $\Phi(I \times A) \subset X$) рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если θ означает постоянный сфероид (т. е. $\theta(A) = x_0$), то $f + \theta \sim f$ для любого сфероида f. Далее, $f+g \sim g+f$ для любых сфероидов f, g. Наконец, если сфероиды f и g симметричны относительно гиперплоскости Γ_0 подпространства A, определяемой уравнением $xa = 0$, то $f+g \sim \theta$.*

Доказательство полностью повторяет доказательство предложения 3 (с очевидными изменениями), и мы его не приводим.

Наконец, перейдем к определению бесконечномерных гомотопических групп. Пусть X—произвольное подмножество гильбертова пространства H и x_0—фиксированная точка множества X. Пусть далее A—фиксированное подпространство дефекта q пространства H. Согласно предложению 4, отношение гомотопности сфероидов индекса q множества X в точке x_0 рефлексивно, симметрично и транзитивно, благодаря чему все сфероиды индекса q множества X в точке x_0 разбиваются на классы гомотопности. Множество всех этих классов мы обозначим через $\Pi_q^A(X, x_0)$. Введенное выше сложение сфероидов определяет сложение гомотопических классов (по представителям). Относительно определяемой таким образом операции сложения множество $\Pi_q^A(X, x_0)$ оказывается коммутативной группой—это устанавливается на основании предложения 4 так же, как и при первом подходе (на основании предложения 3) построена группа $\Pi_q^c(X, x_0)$.

Группу $\Pi_q^A(X, x_0)$ мы и назовем (при рассматриваемом втором подходе) бесконечномерной гомотопической группой индекса q множества X в точке x_0.

Из сказанного видно, что построение гомотопической группы $\Pi_q^A(X, x_0)$ зависит при таком подходе от одного элемента произвола, а именно, от выбора фиксированного подпространства A индекса q.

Предложение 5. *С точностью до изоморфизма, группа $\Pi_q^A(X, x_0)$ не зависит от выбора подпространства A дефекта q.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2—два подпространства дефекта q пространства H. Тогда существует линейное обратимое отображение $\varphi: A_1 \to A_2$, принадлежащее классу K_0. В самом деле, если $q \leqslant 0$, то мы построим произвольный ортонормированный базис $\sigma = (e_1, \cdots, e_n, \cdots)$ пространства H, а затем дополним его векторами $a_1, \cdots, a_{|q|}$ до ортонормированного базиса подпространства A_1—и векторами $b_1, \cdots, b_{|q|}$ до ортонормированного базиса подпространства A_2. Линейное отображение $\varphi: A_1 \to A_2$, определяемое соотношениями

$$\varphi(e_i) = e_i, \ i = 1, 2, \cdots; \ \varphi(a_j) = b_j, \ j = 1, 2, \cdots, |q|,$$

является в этом случае искомым. Если же $q > 0$, то пересечение $A_1 \cap A_2$ является в H подпространством конечного (положительного) дефекта $q + s$ (где $s > 0$). Выберем в $A_1 \cap A_2$ произвольный ортонормированный базис $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ и дополним его векторами $c_1, \cdots, c_s$ до ортонормированного базиса подпространства A_1—и векторами $d_1, \cdots, d_s$ до ортонормированного базиса подпространства A_2. Линейное отображение $\varphi: A_1 \to A_2$, определяемое соотношениями

$$\varphi(b_i) = b_i, \ i = 1, 2, \cdots; \ \varphi(c_j) = d_j, \ j = 1, 2, \cdots, s,$$

является искомым в рассматриваемом случае.

Итак, существует линейное обратимое отображение $\varphi: A_1 \to A_2$, принадлежащее классу K_0. Фиксируем такое отображение и условимся два сфероида $f_1: A_1 \to H$, $f_2: A_2 \to H$ считать эквивалентными, если $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Этим устанавливается (в силу обратимости отображения φ) взаимно однозначное соответствие между сфероидами $f_1: A_1 \to H$ и сфероидами $f_2: A_2 \to H$ (индекса q). Непосредственно проверяется, что при переходе к гомотопическим классам это соответствие превращается в изоморфизм бесконечномерных гомотопических групп $\Pi_q^{A_1}(X, x_0)$ и $\Pi_q^{A_2}(X, x_0)$, построенных с помощью подпространства A_1 и A_2. Таким образом, предложение 5 доказано.

Этим и завершается построение бесконечномерных гомотопических групп при втором подходе.

Рассмотрим теперь вопрос о связи первого и второго подходов к построению бесконечномерных гомотопических групп. Мы докажем, что оба рассмотренных подхода равносильны, т. е. приводят к изоморфным между собой группам $\Pi_q(X, x_0)$. В частности, из этих рассмотрений будет вытекать, что группы $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$, построенные при первом подходе, в действительности, не зависят (с точностью до изоморфизма) от выбора базиса σ. При обсуждении этих вопросов мы будем говорить о сфероидах первого или второго типа (в соответствии с тем, какой подход к построению гомотопических групп рассматривается), о гомотопических группах первого или второго типа и т. д.

Предложение 6. *Оба рассмотренных подхода к определению бесконечномерных гомотопических групп равносильны, т. е. группа $\Pi_q^A(X, x_0)$, построенная при втором подходе, изоморфна группе $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$, построенной при первом подходе (при любом выборе базиса σ и подпространства A дефекта q). Отсюда, в частности, следует, что группы $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$, построенные для различных базисов σ, изоморфны между собой.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $q \geqslant 0$. Пусть σ — произвольный ортонормированный базис пространства H. Обозначим через L_q подпространство, натянутое на первые q векторов этого базиса, а через A — ортогональное дополнение (в H) подпространства L_q. Тогда A есть подпространство дефекта q в H.

Докажем, что группы $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ и $\Pi_q^A(X, x_0)$ изоморфны (здесь $X \subset H$ — произвольное множество и x_0 — точка множества X). С этой целью мы рассмотрим произвольный сфероид $f: H \to H$ первого типа индекса q множества X в точке x_0 и обозначим через $A(f)$ отображение $A(f) = f \circ S_\sigma^q: A \to H$. Так как, по определению сфероидов первого типа, отображение f принадлежит классу $K_\sigma^{(q)}$, то, в силу предложения 1, отображение $A(f) = f \circ S_\sigma^q$ принадлежит классу K_0 и, следовательно (так как это отображение имеет вид $A \to H$) оно принадлежит классу K_q^*. Далее, так как отображение S_σ^q, очевидно, отображает изометрично единичный шар Σ_A подпространства A на единичный шар Σ пространства H, то

$$A(f)(A \setminus \Sigma_A) = f(S_\sigma^q(A \setminus \Sigma_A)) = f(H \setminus \Sigma) = x_0.$$

Таким образом, $A(f)$ есть сфероид второго типа индекса q множества X в точке x_0. Мы получаем таким образом соответствие $f \to A(f)$ между сфероидами первого и второго типов.

Обратно, пусть $g: A \to H$ — произвольный сфероид второго типа индекса q множества X в точке x_0. Обозначим через $B(g)$ отображение $B(g) = g \circ T_\sigma^q: H \to H$. Так как $g \in K_0$, то в силу определения класса $K_\sigma^{(q)}$ отображение $B(g) = g \circ T_\sigma^q$ принадлежит этому классу. Далее

$$B(g)(H \setminus \Sigma) = g(T_\sigma^q(H \setminus \Sigma)) = g(A \setminus \Sigma_A) = x_0.$$

Таким образом, $B(g)$ есть сфероид первого типа индекса q множества X в точке x_0. Мы получаем таким образом соответствие $g \to B(g)$ между сфероидами второго и первого типа.

Непосредственно проверяется (в силу формул (1)), что отображения A и B взаимно обратны, т. е. $A(B(g)) = g$ для любого сфероида g второго типа и $B(A(f)) = f$ для любого сфероида f первого типа. Непосредственно проверяется также, что если за вектор a в определении суммы сфероидов второго типа принять вектор $e_{q+1} \in A$, то будут справедливы соотношения

$$A(f_1 + f_2) = A(f_1) + A(f_2),\ B(g_1 + g_2) = B(g_1) + B(g_2),$$

где f_1, f_2—произвольные сфероиды первого типа индекса q множества X в точке x_0, а g_1, g_2—сфероиды второго типа (ср. формулы (3) и (5)).

Наконец, отметим, что при отображениях A и B сохраняются гомотопии сфероидов, т. е. если $f_1 \sim f_2$, то $A(f_1) \sim A(f_2)$ и если $g_1 \sim g_2$, то $B(g_1) \sim B(g_2)$. Это также непосредственно вытекает из определения отображений A и B.

Из сформулированных фактов непосредственно следует, что отображения A и B порождают при переходе к гомотопическим классам отображения

$$A^* : \Pi_q^\sigma(X, x_0) \to \Pi_q^A(X, x_0),$$

$$B^* : \Pi_q^A(X, x_0) \to \Pi_q^\sigma(X, x_0),$$

которые являются взаимно обратными (т. е. отображения $A^* \circ B^*$ и $B^* \circ A^*$ являются тождественными) и сохраняют операцию сложения. Следовательно, отображения A^* и B^* являются взаимно обратными изоморфизмами групп $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ и $\Pi_q^A(X, x_0)$. Остается заметить, что в силу предложения 5 группа $\Pi_q^A(X, x_0)$ не зависит с точностью до изоморфизма, от выбора подпространства A дефекта q. Таким образом, при $q \geqslant 0$ предложение 6 доказано.

В случае $q < 0$ рассуждения аналогичны, и мы лишь кратко наметим их. Пусть A—подпространство дефекта $q < 0$. Выберем и фиксируем векторы $a_1, \cdots, a_{-q}$, дополняющие базис $\sigma = \{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ пространства H до ортонормированного базиса $\sigma^* = \{a_1, \cdots, a_{-q}, e_1, \cdots$ $\cdots, e_n, \cdots\}$ подпространства A. Пусть теперь $f: H \to H$—произвольный сфероид первого типа индекса q множества X в точке x_0. Обозначим через $A(f)$ отображение $A(f) = f \circ T_{\sigma^*}^{-q}: A \to H$. Тогда $A(f)$ есть сфероид второго типа. Далее, пусть $g: A \to H$—произвольный сфероид второго типа индекса q множества X в точке x_0. Обозначим через $B(g)$ отображение $B(g) = g \circ S_{\sigma^*}^{-q} : H \to H$. Тогда $B(g)$ есть сфероид первого типа. Эти отображения A и B и порождают (как и при $q \geqslant 0$) взаимно обратные изоморфизмы

$$A^* : \Pi_q^{(\sigma)}(X, x_0) \to \Pi_q^A(X, x_0); \quad B^* : \Pi_q^A(X, x_0) \to \Pi_q^{(\sigma)}(X, x_0).$$

Таким образом, предложение 6 полностью доказано.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27.IV.1973

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ. Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբեր կառուցումը *(ամփոփում)*

Հոդվածում կառուցվում են իրական սեպարաբել Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափանի բացարձակ հոմոտոպիկ խմբերը։

Բերվում է այդ խմբերի կառուցման երկու եղանակ և ապացուցվում նրանց համարժեքությունը։

Բոլոր կառուցումների հիմքում ընկած է Վ. Գ. Բոլտյանսկու կողմից կառուցված անընդհատ արտապատկերումների K_0 *դասը։*

E. A. MIRSAKCHANIAN. *The construction of infinite-dimensional homotopic groups for subsets of Hilbert space* (summary)

The construction in the heading is carried out for real separabel Hilbert spaces. Two ways for constructing the groups are proposed and their equivalence is shown. Boltjanski's class K_0 of continuous mappings is utilized.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Болтянский*. Об одном классе отображений гильбертова пространства, ДАН Арм.ССР, 51, № 3, 1970, 129—131.
2. *Э. А. Мирзаханян*. Бесконечномерные гомотопические группы, ДАН Арм.ССР, 43, № 1, 1966, 3—5.
3. *Э. А. Мирзаханян*. Два подхода к определению бесконечномерных гомотопических групп, ДАН Арм.ССР, 51, № 5, 1970, 257—260.