ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

Р. Э. МКРТЧЯН

О ЯДРЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ЛЕБЕГОВОСТИ ИЛИ СИНГУЛЯРНОСТИ ЕГО СПЕКТРА

0°. Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля в гильбертовом пространстве $L^2(0, +\infty)$

$$Ly \equiv q(x)y - \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{1}$$

где функция $q(x)$ непрерывна на каждом конечном интервале. Возьмем класс M финитных функций, которые определены в интервале $[0, +\infty)$, их производные первого и второго порядка принадлежат $L^2[0, +\infty)$ и удовлетворяют следующему краевому условию:

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0. \tag{2}$$

Хорошо известно, что оператор L симметричен в классе M финитных функций, и если он оказывается несамосопряженным, то допускает самосопряженное расширение, которое мы будем обозначать тем же символом L.

На основе теории, разработанной в работах [1], [2], [3], исследуем построение ядра спектра самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля и получим несколько критериев о лебеговости и сингулярности его спектра. Для этого, как известно ([2], [3]), нужно уметь построить резольвенту этого оператора. Как известно (см., например [4], стр. 56), значение резольвенты R_z на функции $f(x)$ (которое принято обозначать через $\Phi(x, z)$) имеет следующий вид:

$$\Phi(x, z) = \psi(x, z)\int_0^x \varphi(y, z) f(y)\,dy + \varphi(x, z)\int_x^\infty \psi(y, z) f(y)\,dy, \tag{3}$$

где при подходящем выборе функции $m(z)$, $\psi(x, z) = \theta(x, z) + m(z)\times$ $\times\varphi(x, z)$ принадлежит $L^2[0, +\infty)$, а функции $\theta(x, z)$, $\varphi(x, z)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \{z - q(x)\}y = 0 \tag{4}$$

и соответственно следующим краевым условиям:

$$\varphi(0) = \sin\alpha,\ \varphi'(0) = -\cos\alpha,$$
$$\theta(0) = \cos\alpha,\ \theta'(0) = \sin\alpha. \tag{4*}$$

Что касается функции $m(z)$, то она допускает, как хорошо известно (см., например, [5], стр. 181), следующее представление:

$$m(z) = -\operatorname{ctg}\alpha + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{z-t}, \tag{5}$$

где $\sigma(t)$ такая монотонно возрастающая функция, что $\sigma(-\infty)=0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+|t|^2} < +\infty$. Известно, далее ([4], [5]), что функция $\sigma(t)$ является в каком-то смысле спектральной функцией рассматриваемого оператора Штурма-Лиувилля.

П. 1, по существу, посвящен новому доказательству того факта, что мера σ эквивалентна спектральной мере $\rho(t) = \|E_t g\|^2$, где E_t так называемое разложение единицы оператора L, g— порождающий (циклический) элемент этого оператора.

1°. Принимая во внимание, что спектр оператора L простой, обозначим через V оператор, существующий в силу основной спектральной теоремы и осуществляющий изометрическое отображение пространства $L^2[0, +\infty)$ в пространство L^2_ρ так, что оператор L переходит в оператор умножения на независимую переменную.

Пусть $g(x)$—порождающий элемент оператора L и предположим, что функция $g(x)$ непрерывна. Построим функции $g_n(x)$ следующим образом:

$$g_n(x) = g(x), \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant n, \text{ и } g_n(x) = 0, \text{ если } n < x < +\infty.$$

Так как функции $g_n(x)$, очевидно, сходятся к функции $g(x)$ по метрике $L^2[0, +\infty)$, то в силу изометричности оператора V функции Vg_n сходятся к функции Vg (которую без ограничения общности можно считать тождественно равной единице) по метрике L^2_ρ.

Образуем выражение

$$\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}\, g_n\|^2 = \frac{1}{2\pi i}\left((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau})\, g_n,\ g_n\right).$$

Из представления резольвенты (3) легко видеть, что

$$(R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau})\, g_n =$$

$$= \theta(x, \lambda+i\tau)\int\limits_0^x \varphi(y, \lambda+i\tau)\, g_n(y)\, dy - \theta(x, \lambda-i\tau)\int\limits_0^x \varphi(y, \lambda-i\tau)\, g_n(y)\, dy +$$

$$+ \varphi(x, \lambda+i\tau)\int\limits_x^\infty \theta(y, \lambda+i\tau)\, g_n(y)\, dy - \varphi(x, \lambda-i\tau)\int\limits_x^\infty \theta(y, \lambda-i\tau)\, g_n(y)\, dy +$$

$$+ m(\lambda+i\tau)\,\varphi(x, \lambda+i\tau)\, G_n(\lambda+i\tau) - m(\lambda-i\tau)\cdot\varphi(x, \lambda-i\tau)\, G_n(\lambda-i\tau),$$

где

$$G_n(\lambda+i\tau) = \int\limits_0^\infty \varphi(x, \lambda+i\tau)\, g_n(x)\, dx = \int\limits_0^n \varphi(x, \lambda+i\tau)\, g(x)\, dx,$$

отсюда получается следующее равенство:

$$\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g_n\|^2=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g_n(x)\left\{\theta(x,\lambda+i\tau)\int_0^x\varphi(y,\lambda+i\tau)g_n(y)\,dy-\theta(x,\lambda-i\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^x\varphi(y,\lambda-i\tau)g_n(y)dy\right\}dx+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g_n(x)\left\{\varphi(x,\lambda+i\tau)\int_x^\infty\theta(y,\lambda+i\tau)g_n(y)dy-\right.$$

$$\left.-\varphi(x,\lambda-i\tau)\int_x^\infty\theta(y,\lambda-i\tau)g_n(y)\,dy\right\}dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}[m(\lambda+i\tau)G_n^2(\lambda+i\tau)-m(\lambda-i\tau)G_n^2(\lambda-i\tau)]. \tag{6}$$

Докажем, что для любого действительного числа λ предел как первого, так и второго слагаемого в (6) равен нулю. Как известно ([6], [4, 5]), при фиксированном x функции $\varphi(x, z)$, $\theta(x, z)$ — целые и непрерывны по совокупности аргументов, поэтому, согласно классическим теоремам теории функций (см., например, [7]), для каждого конечного интервала $(0, n)$

$$\int_0^n\varphi(x,z)\,dx \text{ и } \int_0^n\theta(x,z)\,dx \text{ суть целые функции } z,$$

а следовательно, в силу финитности функций $g_n(x)$ легко доказать, что

$$\int_0^\infty\left\{g_n(x)\,\theta(x,z)\int_0^x\varphi(y,z)\,g_n(y)\,dy\right\}dx$$

и

$$\int_0^\infty\left\{g_n(x)\,\varphi(x,z)\cdot\int_x^\infty\theta(y,z)\,g_n(y)\,dy\right\}dx$$

также будут целыми функциями z. Теперь уже нетрудно заключить, что предел как первого, так и второго члена в (6) действительно равен нулю.

Таким образом, мы получили, что для любого λ равенство (6) принимает следующий вид:

$$\lim_{\tau\to+0}\left\{\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g_n\|^2-\frac{1}{2\pi i}[m(\lambda+i\tau)G_n^2(\lambda+i\tau)-m(\lambda-i\tau)G_n^2(\lambda-i\tau)]\right\}=0. \tag{6*}$$

Введем следующие обозначения:

$$J_\tau(\lambda, f, \rho, a, b) = \frac{\tau}{\pi}\int_a^b \frac{f(t)\,d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}, \tag{7}$$

если $a=-\infty$ $b=+\infty$, то

$$J_\tau(\lambda, f, \rho, -\infty, +\infty) = J_\tau(\lambda, f, \rho), \tag{8}$$

если же $f(t)\equiv 1$, то

$$J_\tau(\lambda, 1, \rho, -\infty, +\infty) = J_\tau(\lambda, \rho),$$

благодаря которым выражения, входящие в последующие формулы, не будут громоздкими.

Докажем, что

$$\lim_{\tau\to+0}\left\{\frac{1}{2\pi i}[G_n^2(\lambda+i\tau)\,m(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)\,m(\lambda-i\tau)]-\right.$$

$$\left.-G_n^2(\lambda+i\tau)\,J_\tau(\lambda, \sigma)\right\}=0 \tag{9}$$

при всех тех λ, при которых функция $\sigma(t)$ непрерывна.

В самом деле, имея в виду (5), (7) и (8), можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}[G_n^2(\lambda+i\tau)\,m(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)\,m(\lambda-i\tau)]=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\,G_n^2(\lambda+i\tau)\,[m(\lambda+i\tau)-m(\lambda-i\tau)]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\,m(\lambda-i\tau)\,[G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)]=$$

$$=G_n^2(\lambda+i\tau)\cdot J_\tau(\lambda, \sigma)+\frac{1}{2\pi i}\left\{-\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\pi}{\tau}\cdot J_\tau(\lambda, \lambda-t, \sigma)+\right.$$

$$\left.+i\pi\cdot J_\tau(\lambda, \sigma)\right\}\cdot[G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)]=G_n^2(\lambda+i\tau)\cdot J_\tau(\lambda, \sigma)+$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\,[G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)]\cdot\left[\frac{\pi}{\tau}J_\tau(\lambda, \lambda-t, \sigma)-\operatorname{ctg}\alpha\right]+$$

$$+\frac{G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)}{2}\cdot J_\tau(\lambda, \sigma). \tag{9*}$$

По лемме 3 ([1]) из непрерывности $\sigma(t)$ в точке λ следует, что $\frac{1}{2}J_\tau(\lambda, \sigma)=o\left(\frac{1}{\tau}\right)$ при $\tau\to+0$. С другой стороны, из того факта, что выражение $G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)$ стремится к нулю не медленнее, чем τ, следует, что третье слагаемое правой части (9*) стремится к нулю.

В силу теоремы Радона-Никодима можем написать

$$J_\tau(\lambda, \lambda - t, \sigma) = J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}_\lambda),$$

где $\tilde{\sigma}_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{t} (\lambda - x)\, d\sigma(x)$. В силу того, что функция $\sigma(t)$ непрерывна в точке λ, легко доказать, что производная $\tilde{\sigma}_\lambda(t)$ в точке λ равна нулю.

В самом деле

$$\left| \frac{\tilde{\sigma}_\lambda(\lambda + \delta) - \tilde{\sigma}_\lambda(\lambda)}{\delta} \right| = \frac{\left| \int_{\lambda}^{\lambda+\delta} (\lambda - t)\, d\sigma(t) \right|}{|\delta|} \leqslant |\sigma(\lambda + \delta) - \sigma(\lambda)|.$$

Следовательно, по лемме 2 ([2]) второе слагаемое правой части (9*) стремится к нулю. Итак, справедливость равенства (9) установлена.

Если даже в точке λ функция $\sigma(t)$ имеет разрыв, тем же менее в точке λ функция $\tilde{\sigma}_\lambda(t)$ непрерывна и все ее производные числа ограничены. Следовательно, из анализа доказательства леммы 1 ([1]) следует, что второй член правой части равенства (9*) ограничен по абсолютной величине, а в силу того, что $G_n^2(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)$ стремится к нулю не медленнее, чем τ, при τ стремящемся к нулю, то по лемме 3 ([1]) третий член правой части (9*) тоже ограничен по абсолютной величине. Таким образом, мы доказали, что для любого τ имеет место неравенство

$$\left| \frac{1}{2\pi i} [G_n^2(\lambda + i\tau)\, m(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)\, m(\lambda - i\tau)] - \right.$$
$$\left. - G_n^2(\lambda + i\tau) \cdot J_\tau(\lambda, \sigma) \right| \leqslant O(1) \qquad (10)$$

для каждого λ.

Теперь докажем, что для тех λ для которых предел

$$G_n^2(\lambda + i\tau)\, m(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)\, m(\lambda - i\tau)$$

по любой последовательности τ_n не равен нулю, имеет место равенство

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{G_n^2(\lambda + i\tau)\, m(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)\, m(\lambda - i\tau)}{2\pi i\, G_n^2(\lambda + i\tau)\, J_\tau(\lambda, \sigma)} = 1. \qquad (11)$$

В самом деле, из (9*) можем написать

$$\frac{G_n^2(\lambda + i\tau)\, m(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)\, m(\lambda - i\tau)}{2\pi i\, G_n^2(\lambda + i\tau) \cdot J_\tau(\lambda, \sigma)} =$$

$$= 1 + \frac{[G_n^2(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)] \cdot \left[\frac{\pi}{\tau} J_\tau(\lambda, \lambda - t, \sigma) - \operatorname{ctg} \alpha \right]}{2\pi i\, G_n^2(\lambda + i\tau) \cdot J_\tau(\lambda, \sigma)} +$$

$$+ \frac{G_n^2(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)}{2 G_n^2(\lambda + i\tau)}. \qquad (12)$$

Из (9^*) видно, что для таких λ $J_\tau(\lambda, \sigma)$ не стремятся к нулю по любой последовательности $\tau_n \to +0$.

Из того, что $G_n(z)$ — целая функция, следует, что

$$\frac{G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)}{G_n^2(\lambda+i\tau)}=O(\tau).$$

Отсюда и из того, что $|J_\tau(\lambda, \lambda-t, \sigma)|=o(J_\tau(\lambda, \sigma))$ при $\tau\to+0$ вытекает, что второй и третий члены правой части равенства (12) стремятся к нулю. Таким образом, равенство (11) доказано.

Введем теперь обозначение

$$\rho_n(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}|Vg_n|^2\,d\rho(t), \tag{13}$$

тогда, в силу теоремы Радона-Никодима и соотношения (9), равенству (6^*) можно придать удобный для дальнейшего вид

$$\lim_{\tau\to+0}\left[J_\tau(\lambda, \rho_n)-G_n^2(\lambda+i\tau)\,J_\tau(\lambda, \sigma)\right]=0 \tag{14}$$

при тех λ, при которых $\sigma(t)$ непрерывна.

Теперь из равенства (6^*) легко заключаем, что

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}\,g_n\|^2}{\frac{1}{2\pi i}\left[m(\lambda+i\tau)\,G_n^2(\lambda+i\tau)-m(\lambda-i\tau)\,G_n^2(\lambda-i\tau)\right]}=1 \tag{15}$$

при тех λ, при которых пределы знаменателя и числителя левой части равенства (15) по любой последовательности τ_n не равны нулю. Отсюда и из (11), (8), в свою очередь, заключаем, что для таких λ имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{J_\tau(\lambda, \rho_n)}{G_n^2(\lambda+i\tau)\,J_\tau(\lambda,\sigma)}=1. \tag{15*}$$

Из (6^*), (10) и (13) вытекает, что для любого τ

$$|J_\tau(\lambda, \rho_n)-G_n^2(\lambda+i\tau)\,J_\tau(\lambda, \sigma)|\leqslant O(1) \tag{16}$$

для каждого λ.

Обозначим через $K_n=\{\lambda_p^{(n)}\in R^1;\ G_n(\lambda_p^{(n)})=0,\ p=\pm 1;\ \pm 2;\cdots\}$ множество тех точек вещественной оси, где целая функция $G_n(z)$ равняется нулю (можно предполагать, что $\lambda_p^{(n)}<\lambda_q^{(n)}$, если $p<q$). Обозначим $K=\bigcup_{(n)}K_n$, ясно, что множество K счетно.

Легко видеть, что в каждой точке $\lambda\in K_n$ функция ρ_n непрерывна. В самом деле, так как в точке $\lambda\in K_n$ функция $G_n^2(\lambda+i\tau)$ стремится к нулю со скоростью τ^2 при $\tau\to+0$, то второй член левой части

(16) должен стремиться к нулю, тогда из (16) и леммы 3 ([1]) следует, что функция ρ_n непрерывна в этой точке.

Докажем, что для любой точки непрерывности функции $\sigma(t)$ из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon) = (\lambda_p^{(n)} + \varepsilon;\ \lambda_{p+1}^{(n)} - \varepsilon)$, где ε — произвольное число, меньшее чем $\lambda_{p+1}^{(n)} - \lambda_p^{(n)}$, имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to+0} [G_n^2(\lambda + i\tau)\, J_\tau(\lambda, \sigma) - J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)] = 0. \tag{17}$$

В самом деле, согласно теореме Радона-Никодима, имеем

$$\lim_{\tau\to+0} J_\tau(\lambda,\ G_n^2(\lambda) - G_n^2(t);\ \sigma(t)) \leqslant \lim_{\tau\to+0} J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}),$$

где

$$\bar{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^{t} |G_n^2(\lambda) - G_n^2(x)|\, d\sigma(x).$$

Так как разность $G_n^2(\lambda) - G_n^2(x)$ стремится к нулю со скоростью $\lambda - x$ при x стремящемся к точке λ, то легко видеть, что производная $\bar{\sigma}'(t)$ в точке λ равна нулю, следовательно по лемме 1 ([1]) и из того, что $\lim\limits_{\tau\to+0} [G_n^2(\lambda) - G_n^2(\lambda + i\tau]\cdot J_\tau(\lambda, \sigma) = 0$, верно (17).

Легко доказать, что для каждой точки из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{G_n^2(\lambda+i\tau)\cdot J_\tau(\lambda, \sigma)}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)} = 1. \tag{18}$$

В самом деле

$$\frac{G_n^2(\lambda)\, J_\tau(\lambda, \sigma)}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)} = 1 + \frac{J_\tau(\lambda, G_n^2(\lambda) - G_n^2(t), \sigma(t))}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)}. \tag{18*}$$

Так как $|G_n^2(\lambda) - G_n^2(t)| < \delta_2$, если $|t - \lambda| < \delta_1$, то

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{J_\tau(\lambda, G_n^2(\lambda) - G_n^2(t), \sigma(t))}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\tau\to+0} \frac{J_\tau(\lambda, |G_n^2(\lambda) - G_n^2(t)|, \sigma(t), \lambda - \delta_1, \lambda + \delta_1)}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma, \lambda - \delta_1, \lambda + \delta_1)} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\tau\to+0} \frac{\delta_2\cdot J_\tau(\lambda, 1, \sigma, \lambda - \delta_1, \lambda + \delta_1)}{J_\tau(\lambda, 1, \sigma, \lambda - \delta_1, \lambda + \delta_1)\cdot \min\limits_{t\in(\lambda-\delta_1, \lambda+\delta_1)} G_n^2(t)} = \frac{\delta_2}{\min\limits_{t\in(\lambda-\delta_1, \lambda+\delta_1)} G_n^2(t)}.$$

В силу произвольности δ_1 получается, что второй член правой части (18*) стремится к нулю, если $\tau \to +0$; следовательно верно (18).

Из (18) и (15*) получаем

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{J_\tau(\lambda, \rho_n)}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)} = 1$$

для тех λ из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$, $p=\pm 1, \pm 2, \cdots$, при которых пределы знаменателя и числителя левой части (19) по каждой последовательности τ_n не равны нулю.

Из (17) и (14) получаем, что для любой точки непрерывности функции $\sigma(t)$ из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ можно написать

$$\lim_{\tau\to+0}[J_\tau(\lambda, \rho_n)-J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)]=0. \tag{20}$$

Легко доказать, что на интервале $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$, где ε—произвольное число, точки непрерывности функций $\sigma(t)$ и $\rho_n(t)$ совпадают. В самом деле, пусть в точке $t_0\in\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ функция $\sigma(t)$ непрерывна. Применив теорему Радона-Никодима ко второму интегралу выражения (20) и принимая во внимание, что точка t_0 является точкой непрерывности для функции $\tilde{\sigma}_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} G_n^2(t)\,d\sigma(t)$, по лемме 3 ([1]) непосредственно следует, что в точке t_0 функция $\rho_n(t)$ непрерывна. Теперь предположим, что в точке $t_1\in\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ функция $\rho_n(t)$ непрерывна. Тогда из того, что функция $G_n^2(\lambda)$ отлична от нуля на всем интервале $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$, в силу леммы 3 ([1]) и (16) следует, что в точке t_1 функция $\sigma(t)$ непрерывна, что и требовалось доказать.

Обозначим через $\sigma_c(t)$ и $\sigma_d(t)$ (соответственно $\rho_{nc}(t)$ и $\rho_{nd}(t)$) непрерывную и разрывную части функции $\sigma(t)$ (соответственно $\rho_n(t)$). Тогда легко доказать, что для всех $\lambda\in R^1$ имеет место равенство

$$\rho_{nd}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\,d\sigma_d(t). \tag{21}$$

В самом деле, в силу теоремы Радона-Никодима равенство (19) можно переписать следующим образом:

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{J_\tau(\lambda, \rho_n)}{J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}_n)}=1 \tag{22}$$

при тех λ из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ $p=\pm 1, \pm 2, \cdots$, при которых пределы знаменателя и числителя левой части (22) по каждой последовательности τ_n не равны нулю. Выше мы доказали, что на интервале $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ функции $\rho_n(t)$ и $\tilde{\sigma}_n(t)$ имеют одинаковые точки непрерывности, следовательно эти функции имеют и одинаковые точки разрыва. Теперь докажем, что рост разрыва для обеих функций $\rho_n(t)$ и $\tilde{\sigma}_n(t)$ в точке $\lambda_0\in\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ (если существуют такие точки) один и тот же. Для этого введем в рассмотрение функции $\rho_{nd_0}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{nd_0}(t)$, определенные следующим образом:

$$\rho_{nd_0}(t)=[\rho_n(\lambda_0+0)-\rho_n(\lambda_0)]\cdot\theta(t-\lambda_0),$$

$$\tilde{\sigma}_{nd_0}(t)=[\tilde{\sigma}_n(\lambda_0+0)-\tilde{\sigma}_n(\lambda_0)]\cdot\theta(t-\lambda_0).$$

После этих обозначений, в силу аддитивности интеграла, равенство (22) можно переписать следующим образом:

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{J_\tau(\lambda,\rho_n-\rho_{nd_0})+J_\tau(\lambda,\rho_{nd_0})}{J_\tau(\lambda,\tilde{\sigma}_n-\tilde{\sigma}_{nd_0})+J_\tau(\lambda,\tilde{\sigma}_{nd_0})}=1. \tag{22*}$$

Так как точка λ_0 для функций $\rho_n(t)-\rho_{nd_0}(t)$ и $\tilde{\sigma}_n(t)-\tilde{\sigma}_{nd_0}(t)$ является точкой непрерывности, то в силу леммы 3 ([1]) первые слагаемые знаменателя и числителя левой части (22*) при $\lambda=\lambda_0$ имеют оценку $o\left(\frac{1}{\tau}\right)$, следовательно по этой лемме левую часть равенства (22*) при $\lambda=\lambda_0$ можно записать в виде

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{J_\tau(\lambda_0,\rho_{nd_0})}{J_\tau(\lambda_0,\tilde{\sigma}_{nd_0})}=\lim_{\tau\to+0}\frac{\dfrac{\tau}{\pi}\cdot\dfrac{\rho_{nd_0}(\lambda_0+0)-\rho_{nd_0}(\lambda_0)}{\tau^2}}{\dfrac{\tau}{\pi}\cdot\dfrac{\tilde{\sigma}_{nd_0}(\lambda_0+0)-\tilde{\sigma}_{nd_0}(\lambda_0)}{\tau^2}}=$$

$$=\frac{\rho_n(\lambda_0+0)-\rho_n(\lambda_0)}{\tilde{\sigma}_n(\lambda_0+0)-\tilde{\sigma}_n(\lambda_0)}=1.$$

Итак, $\rho_n(\lambda_0+0)-\rho_n(\lambda_0)=\tilde{\sigma}_n(\lambda_0+0)-\tilde{\sigma}_n(\lambda_0)$ для каждой точки разрыва из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$, следовательно

$$\rho_{nd}(\lambda)=\tilde{\sigma}_{nd}(\lambda)+c(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}G_n^2(t)\,d\sigma_d(t)+c(\lambda) \tag{23}$$

для любого $\lambda\in R^1-\bigcup_{(n)}\{\lambda_p^{(n)}\}$, где $c(\lambda)$ постоянна в каждом интервале $\Delta_p^{(n)}=(\lambda_p^{(n)};\ \lambda_{p+1}^{(n)})$. В силу того, что функция $G_n^2(t)$ стремится к нулю со скоростью $|\lambda_p^{(n)}-t|^2$, когда t стремится к $\lambda_p^{(n)}$, функция

$$\tilde{\sigma}_n(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}G_n^2(t)\,d\sigma(t)$$

непрерывна в точке $\lambda_p^{(n)}$, $p=\pm1;\ \pm2;\ \cdots$. Поскольку $\rho_n(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda_p^{(n)}$, то формула (23) показывает, что $c(\lambda)\equiv C$. С другой стороны, $\rho_n(-\infty)=0$, значит $C=0$. Далее, легко видеть, что равенство (23) имеет место для всех $\lambda\in R^1$, и поэтому формула (23) действительно принимает вид (21).

Теперь докажем, что для любого $\lambda\in R^1$ имеет место равенство

$$\rho_{nc}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_c(t). \tag{24}$$

В самом деле, если в равенстве (20) вместо $\rho_n(t)$ и $\sigma(t)$ подставим соответственно $\rho_{nc}(t) + \rho_{nd}(t)$ и $\sigma_c(t) + \sigma_d(t)$, то в силу аддитивности интеграла получим

$$\lim_{\varepsilon \to +0} [J_\varepsilon(\lambda, \rho_{nc}) - J_\varepsilon(\lambda, G_n^2, \sigma_c)] = 0 \tag{25}$$

для всех $\lambda \in R^1$, кроме счетного числа точек (поскольку множество точек разрыва функции $\sigma(t)$ счетно).

Если обозначим $\sigma_a(t)$ и $\sigma_s(t)$ (соответственно ρ_{na} и ρ_{ns}) абсолютно непрерывную и сингулярную части функции $\sigma(t)$ (соответственно $\rho_{nc}(t)$), то функции

$$\tilde{\sigma}_{na}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G_n^2(x)\, d\sigma_a(x),\ \tilde{\sigma}_{nc}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G_n^2(x)\, d\sigma_c(x) \text{ и } \tilde{\sigma}_{ns}(t) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} G_n^2(x)\, d\sigma_s(x),$$

очевидно, будет соответственно абсолютно непрерывной, непрерывной и сингулярной частями функции $\tilde{\sigma}_n(t)$.

Из равенства (25), в силу леммы 1 ([1]), можно заключить, что почти везде на интервале $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ производные функций $\rho_{na}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{na}(t)$ равны, следовательно, в силу произвольности ε, абсолютно непрерывные части этих функций отличаются лишь константой на интервале $\Delta_p^{(n)} = (\lambda_p^{(n)}; \lambda_{p+1}^{(n)})$, т. е.

$$\rho_{na}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_a(t) + c(\lambda), \tag{26}$$

где $\lambda \in \bigcup\limits_{(p)} (\lambda_p^{(n)}; \lambda_{p+1}^{(n)}) = R^1 - \bigcup\limits_{(p)} \{\lambda_p^{(n)}\}$ и $c(\lambda)$ постоянна в каждом интервале $\Delta_p^{(n)}$.

Так как непрерывная функция $\rho_{na}(\lambda)$ удовлетворяет условию $\rho_{na}(-\infty) = 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_a(t)$ — непрерывная функция на R^1, то из (26) следует, что $c(\lambda) \equiv 0$ и для любого $\lambda \in R^1$ имеет место равенство

$$\rho_{na}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_a(t). \tag{26*}$$

Из (25), (26*) и аддитивности интеграла вытекает, что имеет место равенство

$$\lim_{\tau \to +0} [J_\tau(\lambda, \rho_{ns}) - J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}_{ns})] = 0 \tag{27}$$

для любой точки $\lambda \in \Delta_p^{(n)}$, кроме счетного числа точек.

Теперь уже из условия (27) и из того, что монотонно возрастающие функции $\rho_{ns}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{ns}(t)$ сингулярны по мере Лебега, можно заключить, что в интервале $\Delta_p^{(n)}$ функции $\rho_{ns}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{ns}(t)$ отличаются друг от друга постоянной величиной. Доказательство этого факта будем проводить от противного. Пусть мера $\tilde{\sigma}_{ns}$ не является абсолютно непрерывной относительно меры ρ_{ns}, тогда (см., например, [8], стр. 56) будем иметь

$$\tilde{\sigma}_{ns} = \tilde{\sigma}_{ns_1} + \tilde{\sigma}_{ns_2}, \tag{28}$$

где монотонно возрастающие функции $\tilde{\sigma}_{ns_1}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{ns_2}(t)$ соответственно абсолютно непрерывная и сингулярная составляющие меры $\tilde{\sigma}_{ns}$ относительно меры ρ_{ns}. Очевидно, что

$$\tilde{\sigma}_{ns_1}(\lambda) = \int_{\lambda_p^{(n)}}^{\lambda} \varphi(t)\, d\rho_{ns}(t) + c, \quad \text{где } \lambda \in \Delta_p^{(n)}, \tag{29}$$

и функция $\tilde{\sigma}_{ns_2}$ сингулярна относительно меры

$$\tilde{\rho}_{ns} = \rho_{ns} - \tilde{\sigma}_{ns_1}. \tag{30}$$

Тогда по теореме Лебега-Витали ([9], стр. 200) производная по системе Витали* [9]

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ns}}{d\tilde{\sigma}_{ns_2}} = 0 \tag{31}$$

на множестве F, полном по мере $\tilde{\sigma}_{ns_2}$.

Так как функция $\tilde{\sigma}_{ns_2}$ сингулярна относительно меры Лебега, то в силу леммы 4 ([1]), не нарушая общности, можем сказать, что в любой точке F производная $\tilde{\sigma}'_{ns_2} = +\infty$. Тогда из условия (31) сразу следует, что в любой точке множества F производная $(\tilde{\sigma}_{ns_2} - \tilde{\rho}_{ns})' = +\infty$.

Из (27), (28), (30) и аддитивности интеграла заключаем, что

$$\lim_{\tau \to +0} J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}_{ns_2} - \tilde{\rho}_{ns}) = 0 \tag{32}$$

в любой точке, кроме счетного числа точек из R^1.

Теперь нам нужна следующая лемма, доказательство которой приведено в конце этого пункта.

---

* состоящей из всевозможных замкнутых интервалов из R^1.

Лемма 1. *Если $\rho(t)$ является функцией ограниченной вариации и в точке λ производная $\rho'(\lambda)=+\infty$, то существует последовательность $\tau_n \to +0$ такая, что*

$$\lim_{\tau_n \to +0} J_{\tau_n}(\lambda, \rho) = +\infty.$$

Так как функция $\tilde{\sigma}_{ns_s} - \tilde{\rho}_{ns}$ имеет ограниченную вариацию и производная $(\tilde{\sigma}_{ns_s} - \tilde{\rho}_{ns})' = +\infty$ на несчетном множестве F, то в силу леммы 1 получается противоречие с (32), откуда и следует, что в каждом интервале $\Delta_p^{(n)}$ мера $\tilde{\sigma}_{ns}$ является абсолютно непрерывной относительно меры ρ_{ns}, т. е.

$$\tilde{\sigma}_{ns}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi(t)\, d\rho_{ns}(t) + c(\lambda), \tag{33}$$

где $c(\lambda)$ постоянна в каждом интервале $\Delta_p^{(n)}$.

Из (27), (33), в силу теоремы Радона-Никодима, получаем

$$\lim_{\tau \to +0} J_\tau(\lambda, \rho_{ns}) \left[1 - \frac{J_\tau(\lambda, \varphi, \rho_{ns})}{J_\tau(\lambda, \rho_{ns})}\right] = 0 \tag{34}$$

для любой точки (кроме счетного числа).

Так как функции $\rho_{ns}(t)$ сингулярны относительно меры Лебега, то в силу леммы 3 ([2]) заключаем, что первый сомножитель левой части равенства (34) стремится к $+\infty$ на множестве F_1 полной ρ_{ns} меры, следовательно второй множитель левой части равенства (34) стремится к нулю на множестве F_1 (кроме, может быть, счетного числа точек), поэтому из равенства (15) ([10]) заключаем, что $\varphi(t) \equiv 1$ почти везде по мере ρ_{ns}. Теперь уже, в силу (33), получаем

$$\rho_{ns}(\lambda) = \tilde{\sigma}_{ns}(\lambda) + c(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_s(t) + c(\lambda), \tag{35}$$

где $\lambda \in R^1 - \bigcup_{(p)} \{\lambda_p^{(n)}\}$ и $c(\lambda)$ постоянна в каждом интервале $(\lambda_p^{(n)}, \lambda_{p+1}^{(n)})$.

Наконец, из непрерывности функции $\rho_{ns}(t)$ и $\sigma_s(t)$ следует, что функция $c(\lambda)$ не зависит от λ, а из условия $\rho_{ns}(-\infty)=0$ вытекает, что $c(\lambda)\equiv 0$. Итак, для любого $\lambda \in R^1$ имеет место равенство

$$\rho_{ns}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_s(t), \tag{35*}$$

сопоставление которого с (26*) доказывает справедливость равенства (24).

Теперь докажем, что мера ρ и мера σ эквивалентны. В самом деле, так как для любого n функция $G_n^2(t)$ отлична от нуля на каждом множестве положительной σ_c-меры, то из (24) видно, что меры ρ_{nc} и σ_c эквивалентны. Докажем, что меры ρ_c и σ_c тоже эквивалентны. Пусть множество E имеет положительную σ_c меру, т. е. $\sigma_c(E)>0$, тогда $\rho_{nc}(E)>0$ для любого n, следовательно из того, что мера ρ_c не слабее, чем мера ρ_{nc} (т. е. из $\rho_{nc}(E)>0 \to \rho_c(E)>0$), легко заключаем, что мера ρ_c не слабее σ_c. Для доказательства того, что σ_c, в свою очередь, не слабее ρ_c, прежде всего заметим, что из сходимости Vg_n к $Vg\equiv 1$ в метрике $L^2\rho$ легко заключить, что для любого измеримого подмножества F $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(F)=\rho(F)$, а также $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{nc}(F)=\rho_c(F)$, поэтому из $\rho_c(F)>0$ будет следовать, что $\rho_{nc}(F)>0$ для достаточно больших n, но поскольку σ_c и ρ_{nc} эквивалентны при всех n, будем иметь $\sigma_c(F)>0$, т. е. σ_c не слабее ρ_c.

Теперь уже из эквивалентности мер ρ_c и σ_c заключаем, что существует положительная на полной σ_c-мере функция $f_1(t)$ такая, что

$$\rho_c(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\lambda} f_1(t)\, d\sigma_c(t). \tag{36}$$

Докажем, наконец, что меры ρ_d и σ_d тоже эквивалентны. Заменяя целое n произвольным неотрицательным l как при доказательстве формулы (21), так и в фигурирующих в ней обозначениях, будем иметь формулу

$$\rho_{ld}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\lambda} G_l^2(t)\, d\sigma_d(t). \tag{37}$$

Предположим теперь, что функция σ_d имеет разрыв в точке λ_0, тогда из $G_{l_0}^2(\lambda_0)\neq 0$ и формулы (37) получаем, что функция ρ_{l_0d} имеет разрыв в той же точке λ_0, но поскольку мера ρ_d, очевидно, не слабее меры ρ_{l_0d}, заключаем, что функция ρ_d также имеет разрыв в точке λ_0, а это означает, что ρ_d не слабее σ_d. Мы утверждаем, что найдется $l_0>0$ такое, что $G_{l_0}^2(\lambda_0)\neq 0$, ибо в противном случае имело бы место тождество $\varphi(x,\lambda_0)\, g(x)\equiv 0$, которое очевидно невозможно.

Теперь предположим, что в точке λ_0 $\rho_d(\lambda_0+0)-\rho_d(\lambda_0-0)>0$; так как меры ρ_{nd} сходятся к мере ρ_d, то существует n_0 такое, что $\rho_{n_0d}(\lambda_0+0)-\rho_{n_0d}(\lambda_0-0)>0$, поэтому, принимая во внимание (21), заключаем, что $\sigma_d(\lambda_0+0)-\sigma_d(\lambda_0-0)>0$, т. е. σ_d не слабее ρ_d, а значит они эквивалентны. Далее, аналогично предыдущему, существует положительная на полной σ_d-мере функция $f_2(t)$ такая, что имеет место равенство

$$\rho_d(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\lambda} f_2(t)\, d\sigma_d(t). \tag{38}$$

Введем функцию $f(t)$, определенную на множестве полной σ-меры, которая совпадает с $f_2(t)$ в точках разрыва $\sigma(t)$ и с $f_1(t)$ в точках ее непрерывности. Тогда из формул (36) и (38) следует, что для любого $\lambda\in R^1$

$$\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(t)\, d\sigma(t), \tag{39}$$

где функция $f(t)$ отлична от нуля на множестве полной σ-меры.

Далее, из (39), применяя теорему Радона-Никодима, будем иметь

$$\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{f(t)}\, d\rho(t), \tag{39*}$$

что и доказывает эквивалентность мер σ и ρ.

Отметим, что во всех точках разрыва функции $\sigma(t)$ имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} G_n^2(\lambda) = f(\lambda) > 0. \tag{40}$$

В самом деле, из (21), (38) и из того, что для любого $\lambda \in R^1$

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{nd}(\lambda) = \rho_d(\lambda),$$

будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_d(t) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_2(t)\, d\sigma_d(t). \tag{41}$$

Так как в равенстве (41) число λ произвольно, то нетрудно видеть, что для любого борелевского множества E имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_E G_n^2(t)\, d\sigma_d(t) = \int_E f_2(t)\, d\sigma_d(t).$$

В частности, если вместо множества E взять точку λ, в которой функция σ_d имеет разрыв, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} G_n^2(\lambda)\,[\sigma_d(\lambda+0) - \sigma_d(\lambda-0)] = f_2(\lambda)\,[\sigma_d(\lambda+0) - \sigma_d(\lambda-0)] > 0.$$

Переходим к доказательству леммы 1. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ монотонно возрастает на интервале $[a, b]$ и на этом интервале функция $\rho(x)$, имеющая конечную вариацию, удовлетворяет условию $\rho(x) \leqslant \rho(b)$ (соответственно $\rho(b) \leqslant \rho(x)$), то имеет место неравенство*

$$\int_a^b f(x)\, d\rho(x) \geqslant f(a)\,[\rho(b) - \rho(a)]$$

$$\left(\textit{соответственно} \int_a^b f(x)\, d\rho(x) \leqslant f(a)\,[\rho(b) - \rho(a)]\right).$$

Доказательство. Используя формулу интегрирования по частям в интеграле Лебега-Стильтьеса и условия леммы, можем написать

$$\int_a^b f(x)d\rho(x) = f(x)\rho(x)\Big|_a^b - \int_a^b \rho(x)\,df(x) > f(b)\rho(b) - f(a)\cdot\rho(a) -$$

$$-\rho(b)[f(b)-f(a)] = f(a)[\rho(b)-\rho(a)].$$

Аналогичным способом можем доказать справедливость утверждения этой леммы, которое написано в скобках. Таким образом, лемма 2 полностью доказана.

Доказательство леммы 1 получается теперь следующим образом. Так как производная $\rho'(\lambda) = +\infty$, то существует такое число $\delta > 0$, что имеет место неравенство

$$\rho(t) < \rho(\lambda), \text{ если } t \in (\lambda-\delta, \lambda)$$

и

$$\rho(t) > \rho(\lambda), \text{ если } t \in (\lambda, \lambda+\delta). \tag{42}$$

Более того, легко показать, что существует последовательность $\tau_n \to +0$ такая, что для каждого n имеет место неравенство

$$\rho(\lambda-\tau_n) > \rho(t), \text{ если } t \in [\lambda-\sqrt{\tau_n}, \lambda-\tau_n), \tag{43}$$

где $\tau_n < \sqrt{\tau_n} < \delta$.

В силу аддитивности интеграла можем написать

$$J_{\tau_n}(\lambda, \rho) = J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, -\infty, \lambda-\sqrt{\tau_n}) + J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda-\sqrt{\tau_n}, \lambda-\tau_n) +$$

$$+ J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda-\tau_n, \lambda) + J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda, \lambda+\delta) + J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda+\delta, \infty). \tag{44}$$

Покажем, что первое слагаемое правой части (44) ограничено по τ. В самом деле, так как функция $\rho(x)$ имеет конечную вариацию, то $\rho(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x)$, где ρ_1 и ρ_2 — монотонно возрастающие функции. Следовательно для каждого τ можем написать следующее неравенство:

$$J_\tau(\lambda, 1, \rho, -\infty, \lambda-\sqrt{\tau}) \leqslant J_\tau(\lambda, 1, \rho_1, -\infty, \lambda-\sqrt{\tau}) +$$

$$+ J_\tau(\lambda, 1, \rho_2, -\infty, \lambda-\sqrt{\tau}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau}{\pi}\left(\frac{\rho_1(\lambda-\sqrt{\tau})}{\tau+\tau^2} + \frac{\rho_2(\lambda-\sqrt{\tau}}{\tau+\tau^2}\right) \leqslant \frac{\rho_1(\lambda)+\rho_2(\lambda)}{\pi}.$$

Таким же образом можно доказать, что ограничено и пятое слагаемое правой части (44); что же касается второго и четвертого слагаемых, то легко видеть, что они неотрицательны. В самом деле, так как подынтегральная функция $\dfrac{1}{(t-\lambda)^2+\tau_n^2}$ монотонно возрастает в интервале $[\lambda-\sqrt{\tau_n}, \lambda-\tau_n]$, то из условия (43) и леммы 2 будем иметь

$$J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda-\sqrt{\tau_n}, \lambda-\tau_n) > \frac{\tau_n}{\pi}\cdot\frac{1}{(\sqrt{\tau_n})^2+\tau_n^2}[\rho(\lambda-\tau_n)-\rho(\lambda-\sqrt{\tau_n})] > 0$$

для любого τ_n.

Далее, используя лемму 2 и (42), легко видеть, что

$$\frac{\pi}{\tau_n}\cdot J_{\tau_n}(\lambda,\ 1,\ \rho,\ \lambda+\delta,\ \lambda)<\frac{1}{\delta^2+\tau_n^2}\left[\rho(\lambda)-\rho(\lambda+\delta)\right]<0,$$

следовательно четвертый член правой части (44) больше нуля для любого τ_n.

Опять используя лемму 2 и (42), можем написать

$$J_{\tau_n}(\lambda,1,\rho,\lambda-\tau_n,\lambda)\geqslant\frac{\tau_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\tau_n^2+\tau_n^2}\left[\rho(\lambda)-\rho(\lambda-\tau_n)\right]=\frac{1}{2\pi}\frac{\rho(\lambda)-\rho(\lambda-\tau_n)}{\tau_n}.$$

Следовательно, в силу того, что производная $\rho'(\lambda)=+\infty$, получается, что третий член правой части (44) стремится к $+\infty$, когда $\tau_n\to+0$.

Наконец, в силу сказанного выше о каждом члене правой части равенства (44), следует справедливость леммы 1.

Замечание. Используя рассуждения этого пункта и формулу (1) ([10]), можно доказать следующее:

1) участвующая в формуле (39) функция $f(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda)=\lim_{n\to\infty}G_n^2(\lambda)=G^2(\lambda)$$

почти всюду по мере ρ;

2) для изометрического оператора V (соответствующего оператору Штурма-Лиувилля) имеет место равенство

$$Vh(x)=\frac{H(\lambda)}{G(\lambda)},$$

где

$$H(\lambda)=\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)\,h(x)\,dx.$$

2°. В этом пункте мы, опираясь на установленную выше эквивалентность ρ и σ, построим ядро спектра самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля и получим несколько признаков лебеговости, чистой точечности и сингулярности его спектра.

Прежде всего из (5) в силу леммы 5 ([1]) и леммы 4 ([2]) ясно, что функция

$$Q(\lambda)\overset{\text{опр.}}{=}\lim_{\tau\to+0}\{-\operatorname{Im}m(\lambda+i\tau)\}\tag{45}$$

определена и неотрицательна почти всюду как по мере Лебега, так и по мере σ.

Рассмотрим теперь множество

$$Q(L)=\{\lambda\in R^1,\ Q(\lambda)>0\}$$

и докажем следующее основное.

Предложение 1. *Множество $Q(L)$ является ядром спектра оператора Штурма-Лиувилля**.

В силу предложения 3 ([3]) достаточно доказать, что множество $Q(L)$ имеет полную ρ-меру и что множество $M=(Q(L)\setminus S^*(L))\cup \cup(S^*(L)\setminus Q(L))$ имеет нулевую лебеговскую меру.

Из (5) и (45) получается, что

$$\frac{1}{\pi}Q(\lambda)=\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{46}$$

Согласно лемме 5 ([1]), множество $Q(L)$ имеет полную σ-меру, т. е. $\sigma(R^1\setminus Q(L))=0$. С другой стороны, из эквивалентности мер σ и ρ множество $Q(L)$ имеет полную ρ-меру, т. е. $\rho(Q(L))=\rho(R^1)$.

Теперь покажем, что множество M имеет нулевую лебеговскую меру. Предположив обратное, без нарушения общности, можем считать, что $\operatorname{mes}(Q(L)\setminus S^*(L))>0$. Тогда из предложения 5 ([3]) следует, что функция $\sigma(t)$ имеет абсолютно непрерывную часть, следовательно по лемме 2 ([2]) $\sigma(Q(L))\setminus S^*(L)>0$, но поскольку меры σ и ρ эквивалентны, то $\rho(Q(L)\setminus S^*(L))>0$. Далее, из определения множества $S^*(L)$ следует, что на множестве $Q(L)\setminus S^*(L)$ функция $\Phi(\lambda)$ или равна нулю или не определена, следовательно, учитывая лемму 5 ([1]), приходим к противоречию. Таким образом, мы доказали, что симметрическая разность множеств $Q(L)$ и $S^*(L)$ имеет нулевую лебеговскую меру.

Предложение 1 позволяет сделать некоторые заключения о характере спектра оператора Штурма-Лиувилля в терминах функции $m(z)$ и в терминах множества $Q(L)$, которые соответствуют общим критериям, приведенным в работах ([1], [2], [3]).

Предложение 2. *Чтобы непрерывный спектр оператора Штурма-Лиувилля был лебеговым на участке* $(\alpha,\beta)\subset R^1$, *достаточно, чтобы для любого* λ *из этого участка (кроме, быть может, счетного их числа) существовал конечный предел* $\lim\limits_{\tau\to+0}\{-\operatorname{Im} m(\lambda+i\tau)\}$.

Предложение 3. *Для того чтобы на участке* $(\alpha,\beta)\subset R^1$ *не было ни одного собственного значения оператора* L, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\lambda\in(\alpha,\beta)$

$$\operatorname{Im} m(\lambda+i\tau)=o\left(\frac{1}{\tau}\right) \text{ при } \tau\to+0.$$

Предложение 4. *Для того чтобы спектр оператора Штурма-Лиувилля был чисто точечным на участке* $(\alpha,\beta)\subset R^1$, *достаточно, чтобы для любого* $\lambda\in(\alpha,\beta)$, *кроме, быть может, счетного их множества, имело место*

* Точнее говоря, $Q(L)$ отличается от ядра на множество нулевой спектральной и лебеговской меры.

$$\lim_{\tau \to +0} \operatorname{Im} \{-m(\lambda + i\tau)\} = 0.$$

Предложение 5. *Для того чтобы спектр оператора L не содержал лебеговской части, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{mes} Q(L) = 0$ *или, что то же самое, чтобы* $\lim\limits_{\tau \to +0} \operatorname{Im} \{-m(\lambda + i\tau)\} = 0$ *почти всюду по мере Лебега.*

Предложение 6. *Для отсутствия непрерывной части спектра оператора Штурма-Лиувилля достаточно, чтобы ядро спектра $Q(L)$ состояло из не более чем счетного множества точек.*

Предложение 7. *Для отсутствия сингулярной части спектра оператора Штурма-Лиувилля достаточно, чтобы предел* $\lim\limits_{\tau \to +0} \operatorname{Im} \{-m(\lambda + i\tau)\}$ *равнялся бесконечности в не более чем счетном числе точек.*

Доказательство предложения 2 проводится следующим образом. Предположим, что спектральная функция $\rho(t)$ имеет на участке (α, β) сингулярную часть. Тогда, в силу эквивалентности мер ρ и σ, функция $\sigma(t)$ также содержит сингулярную часть, следовательно, из (45), (46) и в силу леммы 3 ([2]) получается, что на множестве мощности континуум предел

$$\lim_{\tau \to +0} \operatorname{Im} \{-m(\lambda + i\tau)\} = +\infty.$$

Полученное противоречие означает, что на участке (α, β) спектральная мера ρ не может содержать сингулярную часть.

Доказательство предложения 3. Пусть $\rho(t)$ — непрерывная функция. Тогда, в силу эквивалентности мер ρ и σ, функция $\sigma(t)$ непрерывна, следовательно, из (45), (46) и леммы 3 ([1]) вытекает необходимость условия предложения 3. Предположим теперь, что функция $\rho(t)$ имеет точку разрыва $\lambda_0 \in (\alpha, \beta)$, тогда, в силу эквивалентности мер ρ и σ, функция $\sigma(t)$ также разрывна в точке λ_0, следовательно, по лемме 3 ([1]) получаем противоречие.

Доказательство предложения 4. Пусть спектральная функция $\rho(t)$ на участке (α, β) имеет непрерывную часть, тогда $\sigma(t)$ тоже имеет непрерывную часть, следовательно, по лемме 5 ([1]) предел $\lim\limits_{\tau \to +0} \operatorname{Im} \{-m(\lambda + i\tau)\}$ отличен от нуля на множестве мощности континуум. Полученное противоречие означает, что спектральная мера $\rho(t)$ чисто точечная в интервале (α, β).

Справедливость предложения 5 вытекает из предложения 1, предложения 3 ([3]), предложения 5 ([3]) и из эквивалентности мер σ и ρ.

Доказательство предложения 6. По условию имеем

$$Q(\lambda) = \lim_{\tau \to +0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = 0$$

при всех $\lambda \in R^1$, кроме счетного множества точек. Применяя предложение 4 ([3]) и леммы 2, 3 ([2]), получаем $\sigma_a(t) \equiv 0$ и $\sigma_s(t) \equiv 0$. Отсюда и из эквивалентности мер σ и ρ следует, что мера ρ чисто точечная.

Доказательство предложения 7. Предположим, что в спектре содержится сингулярная часть, тогда по эквивалентности мер ρ и σ функция $\sigma(t)$ тоже имеет сингулярную составляющую $\sigma_s(t)\neq 0$, следовательно, из (45), (46) и по лемме 3 ([2]) получаем, что предел $\lim\limits_{\tau\to+0} \operatorname{Im}\{-m(\lambda+i\tau)\}$ равняется бесконечности на множестве полной σ_s-меры, что противоречит условию доказываемого предложения.

Замечание. Совершенно ясно, что последние три предложения остаются справедливыми, если вместо R^1 рассмотреть какой-либо интервал $(\alpha, \beta)\subset R^1$.

3°. В этом пункте мы рассмотрим пример оператора Штурма-Лиувилля, показывающий в каких ситуациях применение предложения 4 может оказаться проще и эффективнее, чем построение самой спектральной меры.

Пусть функция $\sigma_0(t)$ определена на интервале $(-\infty, +1]$ по формуле

$$\sigma_0(t) = \sum_{x_p^k < t} \frac{1}{3^k}\,\theta(t - x_p^k),$$

где θ—функция Хевисайда, а точки $x_p^k\in(0, 1)$ выбраны следующим образом:

$$x_p^k = \frac{2p-1}{2^k} \quad (k=1, 2, 3,\cdots;\ p=1, 2, 3,\cdots, 2^{k-1}),$$

а затем продолжены на всю ось R^1 с сохранением монотонности и так, чтобы функция

$$F(x) = \int\limits_1^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\,x)}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)$$

имела бы непрерывные производные до четвертого порядка.

Легко доказать, что $\sigma_0'(t)=0$, когда $t\in(0, 1)$ и $t\neq x_p^k$. В интервале $(t-h, t+h)\subset(0, 1)$ существует не более чем $[2h\cdot 2^{k-1}]+1$ точек вида x_p^k, где $p=1, 2,\cdots, 2^{k-1}$. Обозначим через $k(h)$ наименьшее целое число k такое, что в интервале $(t-h, t+h)$ находится хотя бы одна из точек вида x_p^k. Очевидно, что $k(h)\to+\infty$, если $h\to+0$. В силу того, что на интервале $[0, 1]$ функция $\sigma(t)$, очевидно, чисто точечная, а в точках вида x_p^k $(p=1, 2,\cdots, 2^{k-1})$ имеет один и тот же разрыв, равный $\frac{1}{3^k}$, легко видеть, что имеет место неравенство

$$\frac{\sigma(t+h)-\sigma(t-h)}{2h} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=k(h)}^{\infty} \frac{1}{3^k}\{[2h\cdot 2^{k-1}]+1\}}{2h} \leqslant$$

$$< \frac{\sum\limits_{k=k(h)}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot 2h \cdot 2^k}{2h} = \sum_{k=k(h)}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k,$$

из которого непосредственно следует наше утверждение.

Пусть теперь оператор Штурма-Лиувилля L_0 таков, что ему соответствует именно построенная нами функция $\sigma = \sigma_0(t)$, тогда легко проверить, что в этом случае выполняется достаточное условие предложения 4. В самом деле, из (45), (46) и по лемме 1 ([1]) получается, что

$$\lim_{\tau \to +0} \operatorname{Im} [-m(\lambda + i\tau)] = \lim_{\tau \to +0} \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = 0,$$

если только λ отлична от всех точек вида x_p^k, которых очевидно лишь счетное множество.

Таким образом, в тех случаях, когда оператору L соответствует такая функция $\sigma(t)$, разрывы которой расположены всюду плотно на некотором интервале Δ, а предел $\lim\limits_{\tau \to +0} \operatorname{Im}\{-m(\lambda + i\tau)\}$ равен нулю везде в Δ, кроме счетного множества точек, то из предложения 4 непосредственно следует полнота системы собственных функций в подпространстве, соответствующем рассматриваемому интервалу Δ. Вместе с тем построение спектральной меры, например, по известной ([4], стр. 56) формуле

$$K(\lambda) = \lim_{\tau \to +0} \int_0^{\lambda} \{-\operatorname{Im} m(u + i\tau)\}\, du, \tag{47}$$

может представить значительные трудности.

Что же касается тех случаев, когда потенциал $q(x)$ таков, что функция $\sigma(t)$, соответствующая оператору L, не обладает абсолютно непрерывной составляющей в интервале Δ, то обнаружение этого обстоятельства посредством предложения 5 также может быть проще и эффективнее, чем построение самой спектральной меры, например, по формуле (47).

В самом деле, в таких случаях для подынтегрального выражения этой формулы очевидно не существует суммируемой мажоранты, что исключает возможность предельного перехода под знаком интеграла, тогда как из предложения 5 следует, что в этих случаях соответствующее заключение о характере спектра может быть сделано на основании лишь поведения функции $\operatorname{Im} m(\lambda + i\tau)$ при $\tau \to +0$.

Наконец, обратимся к тем случаям, когда соответствующий оператор L функции $\sigma(t)$ не имеет сингулярных составляющих в интервале Δ (например, $\sigma(t) = \sigma_0(t) + \bar{\sigma}(t)$, где $\bar{\sigma}(t)$ обладает конечной производной в каждой точке $t \in \Delta=[0, 1]$). Здесь тоже обнаружение характера спектра посредством предложения 7 может оказаться проще и эффективнее, чем построение самой спектральной меры по формуле (47). Дело в том, что из-за наличия составляющей $\sigma_0(t)$ подынтегральные выражения в этой формуле опять-таки не могут иметь суммируемой мажоранты, и поэтому для соответствующего заключения о характере спектра по формуле (47) необходимо построение самой спектральной меры, т. е. произвести интегрирование, а затем совершить предельный переход, тогда как в рассмотренном случае условия предложения 7 очевидным образом выполняются.

В заключение считаю приятным долгом выразить признательность своему научному руководителю Р. А. Александряну за постоянное внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27.IV.1973

Ռ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Շտուրմ-Լիուվիլի տիպի օպերատորի սպեկտրի կորիզի մասին, և մի շարք հայտանիշներ նրա սպեկտրի լեբեգյան կամ սինգուլյար լինելու վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Այս աշխատանքում դիտարկվում է

$$Ly \equiv q(x)\,y - \frac{d^2y}{dx^2},\quad 0 \leqslant x < +\infty$$

$$y(0) = \sin\alpha,\quad y'(0) = -\cos\alpha$$

Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի սպեկտրի կորիզը, որը նկարագրված է

$$m(z) = -\operatorname{ctg}\alpha + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{z-t}$$

ֆունկցիայի տերմիններով։ Տրված է մի նոր ապացույց $\sigma(t)$ *և* $\rho(t) = \|E_t g\|^2$ *ֆունկցիաներով ծնված չափերի էկվիվալենտության մասին, որտեղ* E_t*-ն* L *օպերատորի միավորի վերլուծությունն է, իսկ g-ն՝ նրա որևէ ծնիչ էլեմենտ է։*

$m(z)$ *ֆունկցիայի տերմիններով ստացված է մի շարք թեորեմներ* L *օպերատորի սպեկտրի լեբեգյան, սինգուլյար և զուտ կետային լինելու վերաբերյալ։*

R. Z. MKRTCHIAN. *On the nucleus of the Sturm-Liuville type operator, and some criterions of lebesqueness or singularity of its spectrum* (summary)

The nucleus of the spectrum of Sturm-Liuville operator

$$Ly \equiv q(x)\,y - \frac{d^2y}{dx^2}\quad 0 \leqslant x < +\infty$$

$$y(0) = \sin\alpha,\quad y'(0) = -\cos\alpha$$

is considered. The nucleus is described in terms of the function

$$m(z) = -\operatorname{ctg}\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{z-t}.$$

A new proof of equivalence of measures generated by the functions $\sigma(t)$ and $\rho(t) = \|E_t g\|^2$ where E_t is the decomposition of unity with respect to L, g is a certain generator is given.

In terms of the function $m(z)$ some new theorems on lebesqueness, singularity and pure pointwiseness of the spectrum of the operator L are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1, № 1, 1966, 25—34.
2. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О ядре спектра самосопряженного оператора с простым спектром, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 2, 1970, 97—108.
3. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О ядре спектра общего самосопряженного оператора, и о некоторых признаках лебеговости или сингулярности его спектра, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 1, 1972, 3—13.
4. *Э. Ч. Титчмарш.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, I, М., 1960.
5. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию, Изд. „Наука", М., 1970.
6. *Б. М. Левитан.* Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения, М., 1962.
7. *М. А. Евграфов.* Аналитические функции, Изд. „Наука", М., 1968, стр. 79.
8. *С. Сакс.* Теория интеграла, ИИЛ, М., 1949.
9. *Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич.* Интеграл, мера и производная, Изд. „Наука", М., 1967.
10. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О построении полной системы собственных функционалов произвольного самосопряженного оператора и об исследовании их структуры, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, №№ 4—5, 1968, 358—368.