ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

Н. Е. ТОВМАСЯН

НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Основные результаты и их доказательства

При решении краевых задач для дифференциальных уравнений возникает вопрос о гладкости решения, об условиях разрешимости в терминах сопряженной задачи и о подсчете индекса краевой задачи. Эти вопросы для конкретных классов краевых задач были рассмотрены многими авторами (см., например, [1]—[4]). В данной работе получены некоторые результаты для уравнений в банаховых пространствах, которые можно применять при выяснении этих же вопросов для широкого класса краевых задач.

В § 2 даются некоторые приложения полученных результатов к исследованию краевых задач для эллиптических уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями в классе аналитических функций со сдвигом.

Пусть A — оператор, действующий из банахового пространства B в банахово пространство F, а A^*—сопряженный оператор к оператору A. Обозначим через $R(A)$ область значений оператора A, $N(A)$ и $N(A^*)$—ядра или нуль-пространства операторов A и A^*. Оператор A называется Ф-оператором, если: 1) оператор A линеен и непрерывен в пространстве B, 2) $R(A)$ замкнуто, 3) размерности $N(A)$ и $N(A^*)$ ($\dim N(A)$ и $\dim N(A^*)$) конечны. Разность размерностей пространства $N(A)$ и $N(A^*)$ называется индексом оператора A и пишется $\operatorname{ind} A$.

Пусть M—линейное многообразие линейных функционалов, определенных в B. Через ${}^{\perp}M(B)$ обозначим множество элементов из B, ортогональных каждому функционалу из M, т. е.

$$^{\perp}M(B) = \{x,\ x \in B,\ x \perp M\}.$$

Отметим, что в работе под линейностью операторов и функционалов понимается только их аддитивность и однородность.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть M_1 и M_2—линейные многообразия линейных функционалов, определенных в банаховом пространстве B. Если $\dim M_2 < \infty$ и*

$$^{\perp}M_2(B) \subset {}^{\perp}M_1(B), \tag{1}$$

то $M_1 \subset M_2$.

Доказательство. Пусть $l_1, \cdots, l_k$ — базис в пространстве M_2, а $l \in M_1$. Рассмотрим подпространство $k+1$-мерных векторов

$$R = \{(l(x), l_1(x), \cdots, l_k(x)), x \in B\}.$$

Согласно условию (1), $k+1$-мерный вектор $(1, 0, \cdots, 0)$ не принадлежит пространству R. Поэтому R не совпадает с R^{k+1}. Следовательно существует отличный от нуля вектор $(\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, ортогональный R, т. е.

$$\alpha l(x) + \alpha_1 l_1(x) + \cdots + \alpha_k l_k(x) = 0, \ x \in B. \quad (2)$$

Отсюда получим, что $\alpha \neq 0$ и $l \in M_2$. Лемма доказана.

Пусть B, B_1, F и F_1 — банаховы пространства, $B_1 \subset B$, $F_1 \subset F$ и F_1 всюду плотно в F. Нормы этих пространств могут быть разными. Пусть A_1 — сужение оператора A на пространство B_1.

Теорема 1 (теорема о гладкости). *Если A и A_1 — Ф-операторы, действующие из B в F и из B_1 в F_1 соответственно и*

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} A_1, \quad (3)$$

то при $y \in F_1$ всякое решение уравнения $A(x) = y$, принадлежащее пространству B, принадлежит пространству B_1.

Доказательство. Так как A и A_1 — Ф-операторы, то [5]

$$R(A_1) = {}^{\perp}M_1(F_1), \ R(A) = {}^{\perp}M(F), \quad (4)$$

где

$$M_1 = N(A_1^*), \ M = N(A^*). \quad (5)$$

Имея ввиду, что $R(A_1) \subset R(A)$ и $R(A_1) \subset F_1$ из (4) получим

$${}^{\perp}M_1(F_1) \subset {}^{\perp}M(F_1). \quad (6)$$

Следовательно, согласно лемме 1, $M \subset M_1$ на F_1, то есть

$$N(A^*) \subset N(A_1^*), \quad (7)$$

если эти функционалы рассмотреть на пространстве F_1.

Так как F_1 всюду плотно в F и элементы $N(A^*)$ — непрерывные функционалы в F, то из (7) получим

$$\dim N(A^*) \leqslant \dim N(A_1^*). \quad (8)$$

Ясно, что

$$N(A_1) \subset N(A). \quad (9)$$

Следовательно

$$\dim N(A_1) \leqslant \dim N(A). \quad (10)$$

Из (3), (8) и (10) получим

$$\dim N(A) = \dim N(A_1), \ \dim N(A^*) = \dim N(A_1^*). \quad (11)$$

Из (7), (9) и (11) имеем

$$N(A) = N(A_1), \ N(A_1^*) = N(A^*). \quad (12)$$

Пусть $y \in F_1$ и уравнение $A(x) = y$ имеет решение в пространстве B, т. е. $y \in R(A)$. Тогда согласно (4) и (12) $y \in R(A_1)$.

Следовательно, уравнение $A_1(x) = y$ имеет решение $x_0 \in B_1$, и общее решение этого уравнения дается формулой $x = x_0 + z$, где z — произвольный элемент из $N(A_1)$. Из (12) следует, что $x = x_0 + z$ будет общим решением и уравнения $A(x) = y$ в пространстве B. Следовательно, при $y \in F_1$ любое решение уравнения $A(x) = y$ принадлежит пространству B_1.

Пусть B_j, G_j и F_j — банаховы пространства, G_j^* — сопряженное пространство к пространству G_j ($j = 1, 2$).

Рассмотрим уравнения

$$A_1(x) = T_1(\alpha), \tag{13}$$

$$A_2(y) = T_2(\beta), \tag{14}$$

где A_j — Ф-оператор, действующий из B_j в F_j; T_j — линейный оператор, действующий из G_j в F_j ($j=1, 2$), α и β — заданные элементы из G_1 и G_2, а x и y — искомые элементы из B_1 и B_2 соответственно.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{ind} A_1 + \operatorname{ind} A_2 = 0$ *и для разрешимости уравнения* (13) *и* (14) *необходимы условия*

$$\alpha \perp v_j \ (j=1, \cdots, k_2;\ k_2 = \dim N(A_2)), \tag{15}$$

$$\beta \perp w_j \ (j=1, \cdots, k_1;\ k_1 = \dim N(A_1)), \tag{16}$$

где $v_1, \cdots, v_{k_2}$ *и* $w_1, \cdots, w_{k_1}$ — *некоторые линейно независимые элементы из* G_1^* *и* G_2^* *соответственно, то эти условия достаточны для разрешимости уравнения* (13) *и* (14) *и имеют место равенства*

$$\dim N(A_1) = \dim N(A_2^*), \quad \dim N(A_2) = \dim N(A_1^*). \tag{17}$$

Доказательство. Примем следующие обозначения:

$$M_1 = \{lT_1,\ l \in N(A_1^*)\}, \quad M_2 = \{c_1 v_1 + \cdots + c_{k_2} v_{k_2},\ (c_1, \cdots, c_{k_2}) \in R^{k_2}\}. \tag{18}$$

Так как оператор A_1 является Ф-оператором, то [5] для разрешимости уравнения (13) необходимо и достаточно, чтобы α удовлетворяла условию

$$\alpha \perp M_1(G_1). \tag{19}$$

Из (15) и (19) получим

$${}^{\perp}M_1(G_1) \subset {}^{\perp}M_2(G_1). \tag{20}$$

Следовательно, согласно лемме 1, имеем

$$M_2 \subset M_1, \tag{21}$$

$$\dim M_2 \leqslant \dim M_1. \tag{22}$$

Из (18) следует

$$\dim M_1 \leqslant \dim N(A_1^*), \ \dim M_2 = \dim N(A_2). \tag{23}$$

Из (22) и (23) получим

$$\dim N(A_2) \leqslant \dim N(A_1^*). \tag{24}$$

Аналогично, рассматривая уравнение (14), имеем

$$\dim N(A_1) \leqslant \dim N(A_2^*). \tag{25}$$

Из условия теоремы $\operatorname{ind} A_1 + \operatorname{ind} A_2 = 0$ и из неравенств (24) и (25) следуют равенства (17).

Из соотношений (21), (23) и (17) получим, что $M_1 = M_2$.

Следовательно, условия $\alpha \perp M_1$ и $\alpha \perp M_2$ эквивалентны. Но так как условие $\alpha \perp M_2$ совпадает с условием (15), а условие $\alpha \perp M_1$ достаточно для разрешимости уравнения (13), то условие (15) также достаточно для разрешимости уравнения (13). Аналогично доказывается, что условие (16) достаточно для разрешимости уравнения (14).

Если краевая задача для дифференциальных уравнений и сопряженная краевая задача приводятся к уравнениям вида (13) и (14), где A_1 и A_2' — Ф-операторы, то эти уравнения, как правило, удовлетворяют всем условиям теоремы 2, где $w_1, \cdots, w_{k_1}$ и $v_1, \cdots, v_{k_2}$ явно выражаются через решения однородной задачи и сопряженной однородной задачи. Поэтому, применяя теорему 2, мы можем установить условия разрешимости этих задач и получить формулу для индекса. При помощи теоремы 1 мы можем выяснить гладкость решений рассмотренных краевых задач.

§ 2. Примеры

Пример 1. Пусть Γ — простой замкнутый гладкий контур, ограничивающий некоторую конечную связную открытую область D на плоскости комплексной переменной z. Положительным направлением на Γ мы считаем то, которое оставляет область D слева. Обозначим через B_n — класс аналитических в области D функций, n-ая производная которых непрерывна в замкнутой области $D+\Gamma$. Класс функций B_n является пространством Банаха с нормой

$$\|\varphi\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{z \in D+\Gamma} |\varphi^{(k)}(z)| \quad (\varphi^{(0)}(z) = \varphi(z)).$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$L_1(\varphi) \equiv A(z)\varphi^{(n)}(z) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}(z)\varphi^{(j)}(\alpha_k(z)) + \\ + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} b_{jk}(z)\varphi^{(j)}(\omega_k(z)) = f(z), \tag{26}$$

где $A(z)$, $a_{jk}(z)$, $b_{jk}(z)$, $\alpha_k(z)$, $\omega_k(z)$, $f(z)$ — заданные аналитические функции в области D, $\varphi(z)$ — искомая функция из класса B_n, $\varphi^{(j)}(\omega_k(z))$ и $\varphi^{(j)}(\alpha_k(z))$ j-ая производная функции φ в точках $\omega_k(z)$ и $\alpha_k(z)$ соответственно. Предполагается, что функции $A(z)$, $a_{jk}(z)$, $b_{jk}(z)$ и $\omega_k(z)$ — достаточно гладкие функции в замкнутой области $D+\Gamma$, $f(z)\in B_0$; $\alpha_j(z)$ — конформно отображает область D на область D; $A(z)\neq 0$ при $z\in\Gamma$; $\omega_j(z)\in D$ при $z\in D+\Gamma$. Нашей целью является получение необходимого и достаточного условия разрешимости уравнения (26) в терминах сопряженного уравнения. Теперь определим сопряженное уравнение.

Через S обозначим область, дополняющую $D+\Gamma$ до полной плоскости. Функцию $\psi(z)$, заданную на всей плоскости, кроме точек Γ, будем называть кусочно аналитической со скачком на линии Γ, если: 1) функция $\psi(z)$ аналитична в каждой из областей D и S; 2) при приближении z к любой точке t на Γ по любому пути, расположенному целиком в D (или соответственно в S), функция $\psi(z)$ стремится к определенному конечному пределу $\psi^+(t)$ (или соответственно $\psi^-(t)$).

Обозначим через $F_{n,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ класс кусочно аналитических функций $\psi(z)$ со скачком на линии Γ, исчезающих в бесконечности и удовлетворяющих условию

$$\|\psi\|\equiv\sup_{z\in D+S}|\psi(z)|+\sup_{\zeta,\,z\in D}\frac{|\psi(z)-\psi(\zeta)|}{|z-\zeta|^{\alpha}}+\sup_{z,\,\zeta\in S}\frac{|\psi^{(n)}(z)-\psi^{(n)}(\zeta)|}{|\zeta-z|^{\alpha}}<\infty.$$

Пространство $F_{n,\alpha}$ также является пространством Банаха.

Обозначим через $H_\alpha(\Gamma)$ класс функций на Γ, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α. Пространство $H_\alpha(\Gamma)$ с нормой

$$\|g\|=\max_{t\in\Gamma}|g(t)|+\sup_{t,\,\tau\in\Gamma}\frac{|g(t)-g(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}}$$

является банаховым пространством.

С о п р я ж е н н о е у р а в н е н и е к у р а в н е н и ю (26). Требуется найти функцию $\psi(z)$ из класса $F_{n,\alpha}$, удовлетворяющую уравнению

$$L_2(\psi)\equiv(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}(A(t)\,\psi^-(t))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}[\beta_k'(t)\,a_{jk}(\beta_k(t))\,\psi^-(\beta_k(t))]+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\frac{j!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b_{jk}(\tau)\,\psi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\omega_k(\tau))^{j+1}}-\psi^+(t)=g(t),\quad t\in\Gamma, \tag{27}$$

где $\beta_k(t)$ — обратная функция к функции $\alpha_k(z)$, $g(t)$ — заданная функция из класса $H_\alpha(\Gamma)$, $\beta_k'(t)=\dfrac{d\beta_k(t)}{dt}$.

Докажем, что уравнения (26) и (27) удовлетворяют всем условиям теоремы 2.

Операторы $L_1(\varphi)$ и $L_2(\psi)$ можно записать в виде

$$L_1(\varphi)=A(z)\,\varphi^{(n)}(z)+K_1(\varphi),\quad z\in D,$$

$$L_2(\psi)=(-1)^n A(t)\frac{d^n\psi^-(t)}{dt^n}-\psi^+(t)+K_2(\psi),\ t\in\Gamma,$$

где $K_1(\varphi)$ и $K_2(\psi)$—вполне непрерывные операторы, действующие из B_n в B_0 и из $F_{n,\alpha}$ в $H_\alpha(\Gamma)$ соответственно.

В книге [6] доказано, что оператор $(-1)^n A(t)\frac{d^n\psi^-(t)}{dt^n}-\psi^+(t)$ является Ф-оператором из $H_{n,\alpha}$ в $H_\alpha(\Gamma)$ с индексом $m-n$, где m—полное число нулей функции $A(z)$ в области D. Ясно, что уравнение $A(z)\varphi^{(n)}(z)$ имеет n линейно независимых решений, а для разрешимости уравнения $A(z)\varphi^{(n)}(z)=f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f^{(j)}(z_k)=0\ (j=1,\cdots,m_k,\ k=1,\ \cdots,\ l),\tag{28}$$

где $z_1,\cdots,z_l$—нули в области D функции $A(z)$, а $m_1,\cdots,m_l$—их кратности.

Легко показать, что условия (28) являются линейно независимыми. Следовательно, оператор $A(z)\varphi^{(n)}(z)$ является Ф-оператором из B_n в B_0 и индекс равен $n-m$.

Значит, [5] операторы $L_1(\varphi)$ и $L_2(\psi)$ являются Ф-операторами и

$$\operatorname{ind} L_1=n-m,\ \operatorname{ind} L_2=m-n.\tag{29}$$

Легко проверить справедливость равенства

$$\int\limits_\Gamma L_1(\varphi)\,\psi^-(t)\,dt=\int\limits_\Gamma \varphi(t)\,L_2(\psi(t))\,dt,\ \varphi\in B_n,\ \psi\in F_{n,\alpha}.\tag{30}$$

Из (30) получим, что для разрешимости уравнений (26) и (27) необходимо выполнение условий

$$\int\limits_\Gamma f(t)\,\psi_j^-(t)\,dt=0\ (j=1,\cdots,k_2),\tag{31}$$

$$\int\limits_\Gamma g(t)\,\varphi_k(t)\,dt=0\ (j=1,\cdots,k_1),\tag{32}$$

где $\varphi_1,\cdots,\varphi_{k_1}$ и $\psi_1,\cdots,\psi_{k_2}$—полные системы линейно независимых решений однородных уравнений (26) и (27). Отметим, что правые части (31) и (32), как функционалы в пространствах B_0 и $H_\alpha(\Gamma)$, линейно независимы.

Из (29), (31) и (32) следует, что уравнения (26) и (27) удовлетворяют всем условиям теоремы 2. Применяя теорему 2 к этим уравнениям, получим

Следствие 1. *Для того чтобы уравнения* (26) *и* (27) *имели решения, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ и $g(t)$ удовлетворяли условиям* (31) *и* (32), *причем $k_1-k_2=n-m$, где m — полное число нулей функции $A(z)$ внутри области D.*

Пример 2. Пусть D—трехмерная область с гладкой границей S. Рассмотрим следующую задачу: найти в области D дважды непрерывное дифференцируемое решение уравнения

$$L(u) \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + \sum_{j=1}^{3} a_j(x)\, u_{x_j} + a_4(x)\, u = 0, \tag{33}$$

принадлежащее классу $C^1(D+S)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$A_1(u) \equiv \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} - \sum_{j=1}^{k} a_j(x)\, u(\beta_j(x))\right)\Bigg|_S = f(x), \tag{34}$$

где n—внешняя нормаль к границе S, $a_j(x)$ — заданные, достаточно гладкие функции в замкнутой области $D+S$; $a_j(x)$ и $g(x)$— непрерывные функции на S, $\beta_k(x)$—взаимно однозначно отображает S на S, причем $\beta_k(x)$ и $\gamma_k(x)$ принадлежат классу $C^1(S)$, $\gamma_k(x)$ — обратная функция к функции $\beta_k(x)$, $x=(x_1, x_2, x_3)$.

Наряду с задачей (33) — (34) рассмотрим следующую задачу: найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$L^*(v) = 0, \tag{35}$$

принадлежащее классу $C^1(D+S)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$A_2(v) \equiv \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n} - \sum_{j=1}^{3} a_j(x)\cos(n, x_j) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{k} b_k(x)\, a_k(\gamma_k(x))\, v(\gamma_k(x))\right)\Bigg|_S = g(x), \tag{36}$$

где $L^*(v) = 0$ — сопряженное уравнение к уравнению $L(u)=0$; $b_k(x)$ — якобиан при отображении S на S при помощи отображающей функции $\beta_k(x)$; $g(x)$—заданная функция из $C(S)$.

Множество дважды непрерывно дифференцируемых в области D решений из класса $C^1(D+S)$ уравнения (33) и (35) обозначим соответственно через B_1 и B_2.

Пространства B_1 и B_2 являются банаховыми пространствами [7] с нормой

$$\|u\| = \max_{x\in D+S} |u| + \sum_{j=1}^{3} \max_{x\in D+S} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|.$$

Задачи (33)—(34) и (35)—(36) можно сформулировать следующим образом: найти функции $u(x)$ и $v(x)$, принадлежащие классам B_1 и B_2, соответственно, и удовлетворяющие уравнениям

$$A_1(u) = f(x), \tag{37}$$

$$A_2(v) = g(x), \tag{38}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные функции из класса $C(S)$.

Докажем, что уравнения (37) и (38) удовлетворяют условиям теоремы 2. Операторы $A_1(u)$ и $A_2(v)$ имеют вид

$$A_1(u)=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S+K_1(u),$$

$$A_2(v)=\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S+K_2(v),$$

где $K_1(u)$ и $K_2(v)$—вполне непрерывные операторы, действующие из B_1 в $C(S)$ и из B_2 в $C(S)$ соответственно. Как известно, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ и $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S$ являются Ф-операторами из B_1 в $C(S)$ и из B_2 в $C(S)$ соответственно и их индексы равны нулю. Следовательно, A_1 и A_2 также являются Ф-операторами, $\operatorname{ind} A_1=0$, $\operatorname{ind} A_2=0$.

Имеет место следующее равенство:

$$\iiint_D [L(u)\, v(x)-u(x)\, L(v)]\, dx=\iint_S [A_1(u)\, v-A_2(v)\, u]\, ds. \tag{39}$$

Отсюда получим, что для разрешимости уравнений (37) и (38) необходимы условия

$$\iint_S f(x)\, v_j(x)\, ds=0\ \ (j=1,\cdots,k_2), \tag{40}$$

$$\iint_S g(x)\, u_j(x)\, ds=0\ \ (j=1,\cdots,k_1), \tag{41}$$

где $u_1,\cdots,u_{k_1}$ и $v_1,\cdots,v_{k_2}$ — линейно независимые решения однородных уравнений (37) и (38). Применяя теорему 2 для уравнений (37) и (38), получим:

Следствие 2. Для разрешимости задач (33)—(34) и (35)—(36) необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяли условиям (40) и (41), где $u_1,\cdots,u_{k_1}$ и $v_1,\cdots,v_{k_2}$ — линейно независимые решения однородных задач (33)—(34) и (35)—(36) соответственно, причем $k_1=k_2$.

Аналогично рассматривается задача типа (33)—(34) для эллиптической системы уравнений в n-мерном пространстве.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 6.IV.1973

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ. Մի քանի հավասարումներ Բանախի տարածության մեջ և նրանց կիրառությունները *(ամփոփում)*

Մասնական ածանցյալներով դիֆերենցյալ հավասարումների համար եզրային խնդիրների լուծման ժամանակ հանդես են գալիս լուծման ողորկության, լուծելիության պայմանների և եզրային խնդրի ինդեքսի որոշման հարցերը։ Աշխատանքում ստացված են որոշ արդյունքներ Բանախի տարածություններում օպերատորային հավասարումների նկատմամբ, որոնք հնարավորություն են տալիս պարզաբանելու այդ հարցերը բավականաչափ լայն դասի եզրային խըն-

դիրների համար։ Աշխատանքի վերջում ստացված արդյունքները կիրառվում են էլիպտիկ տիպի դիֆերենցյալ հավասարումների համար եզրային խնդիրների և անալիտիկ ֆունկցիաների դասում եզակիություններով սովորական դիֆերենցյալ հավասարումների հետազոտության համար։

N. E. TOVMASIAN. *Some equation in Banach spaces and their applications*
(summary)

The paper presents some new results in the theory of differential equations in Banach spaces. The theorems obtained could be used in investigations the problems of smoothnesses of solution, and of the conditions of solvability in terms of conjugate boundary value problems and for calculations of indexes of wide classes of boundary value problems for differential equations.

Also, some applications of the results of the theory to the investigation of elliptical type boundary value problems and ordinary differential equations of analytical functions with singularities are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948.
2. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., изд. „Наука“, 1966.
3. *М. И. Вишик.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Мат. сб., 29 (71), 3, 1951.
4. *Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг.* Некоэрцитивные краевые задачи, „Псевдодифференциальные операторы“ (сборник статей), изд. „Мир“, М., 1967.
5. *С. Г. Крейн.* Линейные уравнения в банаховом пространстве, изд. „Наука“, М. 1971.
6. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
7. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, изд. „Мир“, М., 1965.