ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

В. А. МАРТИРОСЯН

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ПО СИСТЕМЕ МЮНЦА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В 1954 году М. Фекете в работах [1], [2] привел следующий результат:

Теорема. Пусть $[a, b]$—сегмент на вещественной оси. Чтобы действительнозначную функцию $f(x)$, непрерывную на $[a, b]$ и отличную от многочлена с целыми коэффициентами, можно было равномерно на $[a, b]$ аппроксимировать многочленами с целыми коэффициентами, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. $b-a<4$;

2. существует многочлен с целыми коэффициентами, который во всех целых точках, лежащих на сегменте $[a, b]$, принимает те же значения, что и $f(x)$.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел с условием

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots, \tag{1}$$

и пусть I — замкнутый отрезок на полуоси $[0, +\infty)$. $C_R(I)$—банахово пространство действительных функций, непрерывных на I с нормой $\|f\|=\max\limits_{x\in I}|f(x)|$. Назовем многочленом по системе $\{x^{\lambda_n}\}$ конечную сумму вида $\sum c_m x^{\lambda_m}$, где $c_m\in R$ (вещественные числа). По известной теореме Мюнца [3] имеем: любую функцию из $C_R(I)$ можно сколь угодно близко аппроксимировать многочленами по системе $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}=\infty. \tag{2}$$

Отметим, что если $0\notin I$, можно ограничиться системой $\{x^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$. В связи с теоремой Фекете возникает следующий вопрос: в какой форме сохранится теорема Мюнца, если у аппроксимирующих многочленов по системе $\{x^{\lambda_n}\}$ допускать только целые коэффициенты? Рассмотрению этого вопроса и посвящается настоящая работа. Кроме приведенных обозначений будут применяться еще такие. Через Z обозначается совокупность всех целых чисел. Под $C_R^*(I)$ понимается множество тех функций f из $C_R(I)$, которые удовлетворяют условию $f(I\cap\{0, 1\})\subset\{0\}$. Отметим, что $C_R^*(I)$ является подпространством $C_R(I)$, причем $C_R^*(I)=C_R(I)$, если $I\cap\{0, 1\}=\varnothing$.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_\infty$; возможны два случая

$$\lambda_\infty = +\infty, \tag{3}$$

$$\lambda_\infty < +\infty. \tag{4}$$

В дальнейшем изложении целесообразно выделить три случая:

1) $\lambda_\infty = +\infty$ и $I\subset[0, 1)$; 2) $\lambda_\infty < +\infty$; 3) $\lambda_\infty = +\infty$ и $I=[0, 1]$.

1. Случай $\lambda_\infty = +\infty$ и $I\subset[0, 1)$.

Лемма 1. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ *с условиями* (1), (2) *и* (3). *Тогда можно выделить подпоследовательность* $\{\lambda_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, *удовлетворяющую условию* (2) *и такую, что ряд* $\sum\limits_{i=1}^\infty q^{\lambda_{n_i}}$ *сходится для любого* $q\in(0, 1)$.

Доказательство. Обозначим через m_k число членов последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$, лежащих в полусегменте $(k-1, k]$, и рассмотрим два случая:

а) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{m_k}{k} < +\infty$. В этом случае мы полагаем $n_i = i$. Сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^\infty q^{\lambda_i}$ следует из неравенства

$$\sum_{i=1}^\infty q^{\lambda_i} = \sum_{k=1}^\infty \Big(\sum_{k-1<i<k} q^{\lambda_i} \Big) \leqslant \sum_{k=1}^\infty m_k\, q^{k-1};$$

б) Пусть теперь $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{m_k}{k} = +\infty$. Существует подпоследовательность $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ натуральных чисел такая, что $m_{k_j} > k_j$. Выделим подпоследовательность $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ следующим образом: в каждом полусегменте $(k_j - 1, k_j]$, $j=1, 2,\cdots$ возьмем ровно k_j членов последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$.

Ряд $\sum\limits_{i=1}^\infty \lambda_{n_i}^{-1}$ расходится, так как $\sum\limits_{\lambda_{n_i}\in(k_j-1, k_j]} \lambda_{n_i}^{-1} > 1$, $j = 1, 2,\cdots$.

Кроме того

$$\sum_{\lambda_{n_i}\in(k_j-1, k_j]} q^{\lambda_{n_i}} \leqslant k_j\, q^{k_j-1},\ j=1, 2,\cdots,$$

откуда и следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^\infty q^{\lambda_{n_i}}$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$, *удовлетворяющая условиям* (1), (2) *и* (3), *и пусть* $I\subset[0, 1)$. *Если* $f(x)\in C_R(I)$ *и* $f(I\cap\{0\})\subset Z$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует многочлен* $p(x)$ *по системе* $\{x^{\lambda_n}\}$ *с коэффициентами из* Z *такой, что*

$$|f(x)- p(x)|<\varepsilon,\ x\in I.$$

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $I=[0, b]$, где $b<1$ и $f(0)=0$. По лемме 1 выделим подпоследовательность $\{\lambda_{n_l}\}_{l=0}^{\infty}$, где $\lambda_{n_0}=0$, и возьмем $q=b$. Тогда по $\varepsilon>0$ найдется номер N_0 такой, что

$$\sum_{l=N_0}^{\infty} b^{\lambda_{n_l}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Последовательность $\{\lambda_{n_l}\}_{l=N_0}^{\infty} \cup \{0\}$ удовлетворяет условию теоремы Мюнца. Но $f(0)=0$, поэтому существует многочлен $p_1(x)=\sum\limits_{l=N_0}^{N} c_l\, x^{\lambda_{n_l}}$ такой, что

$$x) - p_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in I. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию $p(x)=\sum\limits_{l=N_0}^{N} [c_l]\, x^{\lambda_{n_l}}$, где $[c_l]$ — целая часть c_l; ясно, что $p(x)$ — многочлен по системе $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z.

На основании (5) имеем

$$|p_1(x)-p(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in I,$$

откуда, с учетом (6), $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$, $x\in I$.

Теорема 1 доказана.

2. Случай $\lambda_\infty<+\infty$. Рассмотрим семейство функций

$$\{f_x(t)\}=\{x^t\}, \tag{7}$$

здесь $t\in[0, \lambda_\infty]$, $\lambda_\infty<+\infty$ и $x\in[a, b]$, $a>0$. Возьмем $0\leqslant\mu<\nu$ и применим теорему Лагранжа о среднем значении, имеем

$$|x^\mu - x^\nu| \leqslant K\cdot|\mu-\nu|, \quad x\in[a, b];$$

здесь K — постоянная, зависящая только от λ_∞ и положения сегмента $[a, b]$. Значит семейство функций (7) равностепенно непрерывно, то есть для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, $\delta=\delta(\varepsilon, K)$ такое, что для произвольных t_1, $t_2\in[0, \lambda_\infty]$ из условия $|t_2-t_1|<\delta$ следует $|x^{t_2}-x^{t_1}|<\varepsilon$, $x\in[a, b]$.

Лемма 2. *Пусть дана последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ с условиями* (1), (2), *и пусть n_0 — произвольное целое положительное число. Тогда*

1. *система функций $\{x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}}\}_{n=n_0}^{\infty}$ замкнута в $\overset{\circ}{C}_R(I)$;*

2. *если, кроме того, выполняется условие* (3), *то система функций $\{x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}\}_{n=n_0}^{\infty}$ замкнута в $\overset{\circ}{C}_R(I)$, где $I=[0, 1]$.*

Доказательство. 1. Достаточно рассмотреть случай, когда $I=[0, b]\subset b\geqslant1$. Возьмем $f(x)\in\overset{\circ}{C}_R(I)$. К последовательности

$\{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty} \cup \{0\}$ применима теорема Мюнца. Но $f(0)=0$, поэтому имеем: для данного $\varepsilon>0$ существует многочлен вида $p_2(x)=\sum_{n=n_0}^{N} c_n x^{\lambda_n}$ такой, что

$$|f(x)-p_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2b^{\lambda_{n_0}}},\quad x\in I. \tag{8}$$

(1)=0, поэтому, положив в (8) $x=1$, получим

$$\left|\sum_{n=n_0}^{N} c_n\right|<\frac{\varepsilon}{2b^{\lambda_{n_0}}}. \tag{9}$$

Многочлен $p_2(x)$ можно записать в такой форме

$$p_2(x)=c_N(x^{\lambda_N}-x^{\lambda_{N-1}})+(c_N+c_{N-1})(x^{\lambda_{N-1}}-x^{\lambda_{N-2}})+\cdots+(c_N+c_{N-1}+$$
$$+\cdots+c_{n_0+1})(x^{\lambda_{n_0+1}}-x^{\lambda_{n_0}})+x^{\lambda_{n_0}}(c_N+c_{N-1}+\cdots+c_{n_0})=p_1(x)+x^{\lambda_{n_0}}\sum_{n=n_0}^{N} c_n,$$

где $p_1(x)$ — многочлен по системе $\{x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}}\}_{n=n_0}^{\infty}$. Из (8) и (9) следует, что

$$|f(x)-p_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\quad x\in I.$$

2. Предположим, что выполнены соотношения

$$\int_0^1 \{x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}\}\,d\mu(x)=0,\quad n=n_0,\ n_0+1,\cdots, \tag{10}$$

где $\mu(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации на [0, 1].

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda)=\int_0^1 x^{\lambda}\,d\mu(x)$, голоморфную в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>0$ и ограниченную. При $\operatorname{Im}\lambda=0$ и $\lambda\to+\infty$ имеем, что $\varphi(\lambda)\to 0$. Рассмотрим теперь рост $\varphi(\lambda)$ на последовательности $\{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty}$. Из (10) легко видеть, что

$$\varphi(\lambda_n)=c_1 n+c_2,\quad n=n_{n_0},\ n_0+1,\cdots, \tag{11}$$

где c_1, c_2 — постоянные, определяемые последовательностью $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ и числом n_0 (от n они не зависят).

При $n\to\infty$ $\lambda_n\to\infty$, поэтому $\varphi(\lambda_n)\to 0$. Из (10) получаем, что

$$\varphi(\lambda_n)=0,\quad n=n_0,\ n_0+1,\cdots.$$

Применив к $\varphi(\lambda)$ теорему единственности для ограниченных аналитических функций, будем иметь

$$\varphi(\lambda)\equiv 0,\quad \operatorname{Re}\lambda>0,$$

откуда уже вытекает, что $\int\limits_0^1 f(x)\,d\mu(x)=0$ для любой функции $f\in C_R^{\bullet\bullet}(I)$. Остается сослаться на теорему Хана-Банаха [4]. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Пусть дана последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям* (1), (2) *и* (4). *Если $f(x)\in C_R(I)$ и $f(I\cap\cap[0,1])\subset Z$, то для любого $\varepsilon>0$ существует многочлен $p(x)$ по системе $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z такой, что*

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon,\ x\in I.$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением того случая, когда $I=[0,b]$, где $b\geqslant 1$: остальные случаи расположения I сводятся к отмеченному. Достаточно аппроксимировать функцию $\tilde f(x)=f(x)-r(x)$, где $r(x)=f(0)+x^{\lambda_1}[f(1)-f(0)]$ — многочлен по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z; $\tilde f(x)\in C_R^{\bullet}(I)$. По данному $\varepsilon>0$ подберем $a\in(0,1)$ так, чтобы $a^{\lambda_1}<\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем число $\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ из условия равностепенной непрерывности по $x\in[a,b]$ семейства (7). Вследствие (4) существует $n_0=n_0(\delta)$ такое, что $\lambda_\infty-\lambda_{n_0}<\delta$. Тогда будем иметь

$$x^{\lambda_{n_0}}-x^{\lambda_\infty}<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in[a,b].$$

Теперь к системе $\{x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}}\}_{n=n_0}^{\infty}$ применим лемму 2. Получим, что существует многочлен вида $p_1(x)=\sum\limits_{n=n_0}^{N}c_n(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})$, где $c_n\in R$ при $n_0\leqslant n\leqslant N$ такой, что

$$|\tilde f(x)-p_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in I. \tag{12}$$

Рассмотрим функцию $\bar p(x)=\sum\limits_{n=n_0}^{N}[c_n](x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})$, ясно, что $\bar p(x)$ — многочлен по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z. В силу выбора n_0 имеем

$$|p_1(x)-\bar p(x)|\leqslant\sum_{n=n_0}^{N}(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})=x^{\lambda_{n_0}}-x^{\lambda_{N+1}}\leqslant x^{\lambda_{n_0}}-x^{\lambda_\infty}<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in[a,b],$$

с другой стороны, в силу выбора a

$$|p_1(x)-\bar p(x)|\leqslant x^{\lambda_{n_0}}\leqslant x^{\lambda_1}<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in[0,a].$$

Следовательно

$$|p_1(x)-\bar p(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in I.$$

Если, кроме того, учесть (12), то получим

$$|\tilde{f}(x)-\bar{p}(x)|<\varepsilon,\ x\in I,$$

и значит, можно положить $p(x)=r(x)+\bar{p}(x)$.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Теорему 1 можно получить из леммы 2.

В самом деле, $f(x)\in C^*_R(I)$ можно аппроксимировать многочленом по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z следующим образом: по $\varepsilon>0$ выберем номер $n_0=n_0(\varepsilon)$ так, чтобы $b^{\lambda_{n_0}}<\frac{\varepsilon}{2}$. Применив лемму 2, найдем многочлен $p_1(x)=\sum_{n=n_0}^{N}c_n(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})$, где $c_n\in R$ при $n_0\leqslant n\leqslant N$ такой, что

$$|f(x)-p_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in I. \tag{13}$$

Введем функцию $p(x)=\sum_{n=n_0}^{N}[c_n](x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})$; $p(x)$ многочлен по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z. В силу выбора n_0 имеем

$$|p_1(x)-p(x)|\leqslant x^{\lambda_{n_0}}<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in I,$$

откуда, учитывая (13), получаем

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon,\ x\in I.$$

Последнее неравенство доказывает теорему 1.

3. Случай $\lambda_\infty=+\infty$ и $I=[0,1]$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}|,\ x\in I=[0,1], \tag{14}$$

и выясним, когда он сходится равномерно на I.

Лемма 3. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям* (1), (3) *и, кроме того*

$$1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\downarrow 0 \quad (\textit{невозрастая})\ \textit{при}\ n\to\infty, \tag{15}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^2$ *сходится. Тогда* (14) *сходится равномерно на* I.

(16)

Доказательство. Обозначим $\varepsilon_n=\lambda_{n+1}-\lambda_n$; легко проверить справедливость тождества $x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}=(1-x^{\lambda_{n+1}})(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})+ +x^{\lambda_n}(x^{\varepsilon_{n+1}}-x^{\varepsilon_n})$, откуда следует, что достаточно установить равномерную на I сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x^{\varepsilon_{n+1}})(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}x^{\lambda_n}\,|x^{\varepsilon_{n+1}}-x^{\varepsilon_n}|. \tag{17}$$

Построим для рядов (17) мажорантные ряды. Из теоремы Лагранжа о среднем значении следует, что

$$(1-x^{\varepsilon_{n+1}})(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})\leqslant\left(\log\frac{1}{x}\right)^2\cdot\varepsilon_n\,\varepsilon_{n+1}\,x^{\lambda_n},\quad x\in I.$$

Рассмотрим функцию $y(x)=\left(\log\frac{1}{x}\right)^2\cdot x^{\lambda_n}$, $x\in I$; имеем $y(x)\in C_R^*(I)$ и $y(x)\geqslant 0$ при $x\in I$. Значит, $y(x)$ достигает на I своего максимума y_0. Легко найти, что $y_0=\frac{Le^{-2}}{\lambda_n^2}$. Отсюда получаем, что первый из рядов (17) мажорируется рядом

$$a_1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}{\lambda_n^2},$$

где a_1—постоянная.

Аналогичным образом, для второго ряда получаем мажорантный ряд

$$a_1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n|}{\lambda_n},$$

где a_2 — постоянная.

Покажем сходимость этих рядов. Положим $c_n=1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$, тогда $c_n\downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2<+\infty$. Имеем неравенства

$$\frac{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}{\lambda_n^2}=\frac{c_n\,c_{n+1}}{(1-c_n)^2(1-c_{n+1})}\leqslant b_1\,c_n^2$$

и

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n|}{\lambda_n}=\frac{|c_{n+1}-c_n+c_n\,c_{n+1}|}{(1-c_n)(1-c_{n+1})}\leqslant b_1\,(c_n-c_{n+1}+c_n^2),$$

где b_1, b_2—постоянные, откуда и следует сходимость нужных нам рядов. Лемма 3 доказана.

Теорема 3. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям* (1), (2), (3), (15) *и* (16). *Если* $f(x)\in C_R(I)$, *где* $I=[0,1]$, *и* $f(0)$, $f(1)\in Z$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует многочлен* $p(x)$ *по системе* $\{x^{\lambda_n}\}$ *с коэффициентами из* Z *такой, что*

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon,\ x\in I.$$

Доказательство. Достаточно аппроксимировать функцию $\bar f(x)=f(x)-r(x)$, где $r(x)=f(0)+x^{\lambda_1}[f(1)-f(0)]$—многочлен с коэффициентами из Z; $\bar f(x)\in C_R^*(I)$. По лемме 3 для $\varepsilon>0$ найдем номер n_0 такой, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in I.$$

Согласно лемме 2 существует многочлен $p_1(x)=\sum_{n=n_0}^{N}c_n(x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}})$, где $c_n\in R$ при $n_0\leqslant n\leqslant N$ такой, что

$$|\tilde{f}(x)-p_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in I. \tag{18}$$

Функция $p(x)=\sum_{n=n_0}^{N}[c_n](x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}})$ есть многочлен по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z. В силу выбора номера n_0 имеем

$$|p_1(x)-p(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in I,$$

тогда из (18) следует, что

$$|\tilde{f}(x)-p(x)|<\varepsilon,\ x\in I.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Представляется правдоподобным, что для последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ условие (16) является следствием из (1), (2) и (15).

Приведем достаточный признак выполнения условия (16).

1. Пусть существует $\beta>0$ такое, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_n}{n^{1+\beta}}<+\infty. \tag{19}$$

Возьмем $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и выберем число σ, удовлетворяющее условию

$$0<\sigma\leqslant\frac{\frac{1}{2}-\delta}{1+\beta}.$$

По теореме Абеля-Дини [5] сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{\lambda_{n+1}^{\sigma}},$$

так как $\sigma>0$; но кроме того, его члены не возрастают, следовательно

$$\frac{n+1}{\lambda_{n+1}^{\sigma}}\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Сходимость ряда (16) следует из неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^2\leqslant a\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n^{\sigma}}{n}\right)^2.$$

где a — постоянная, так как ряд справа сходится, в силу (19) и выбора числа σ.

В заключение выражаю благодарность Н. У. Аракеляну за постановку задачи и ценные советы.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 9.II.1973

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Ըստ Մյունցի սիստեմի ամբողջ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման մասին *(ամփոփում)*

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է իրական $[0, +\infty)$ *կիսաառանցքի հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների ըստ Մյունցի սիստեմի ամբողջ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման հարցը։ Դիտարկված է երեք դեպք, որոնք պայմանավորված են հատվածի դիրքից կիսաառանցքի վրա և աստիճանների հաջորդականության սահմանից։*

V. H. MARTIROSIAN. *About uniform approximations by the polinomes on the system of Müntz with the integral coefficients* (summary)

Uniform approximations of functions continuous the segment from $[0, +\infty)$ with the polynoms by Müntz systems with diophantine coefficients is under investigation. There cases are considered the cases depend on the position of the segment on $(0, \infty)$ and on the limits of the sequences of powers.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Fekete*. Approximations par polinomes avec conditions diophantiennes, Compt. Rend. Acad. Sc., 239, № 21, 1954, 1337—1339.
2. *M. Fekete*. Approximations par polinomes avec conditions des diophantiennes, Compt. Rend. Acad. Sc., 239, № 21, 1954, 1455—1457.
3. *W. Rudin*. Real and Complex Analysis, „Mc. Graw—Hill Book Company", T., London, 1966.
4. *Н. И. Ахиезер*. Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М., 1947.
5. *Г. М. Фихтенгольц*. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, Изд. „Наука", М., 1966.