ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

И. М. МИХЕЕВ

О СХОДИМОСТИ $K+\infty$ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Хорошо известно, что тригонометрические ряды Фурье не могут сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Поэтому возникает вопрос о построении наиболее густых в каком-то смысле множеств меры 0, на которых соответствующие ряды Фурье сходятся к $+\infty$. Интересно также знать, как влияет степень суммируемости функции на сходимость ее ряда Фурье к $+\infty$.

А. А. Талалян [1] показал, что во всяком классе* $F(L[0, 2\pi])$ существует функция, ряд Фурье которой сходится к $+\infty$ на множестве, имеющем мощность континуума на любом интервале $(a, b)\subset\subset[0, 2\pi]$. П. Л. Ульянов (см. [2], стр. 27) дал пример лакунарного ряда Фурье функции, принадлежащей всем классам $L^p[0, 2\pi]$, сходящегося к $+\infty$ на множестве с названными свойствами.

Множества меры нуль иногда классифицируют по их так называемой размерности Хаусдорфа.

Определение 1. *Пусть X—метрическое пространство и p—любое действительное число $0\leqslant p<+\infty$. Пусть для данного $\varepsilon>0$*

$$m_p^\varepsilon=\inf\sum_{l=1}^{\infty}[\delta(A_l)]^p,$$

где $X=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$ — произвольное разложение пространства X на счетное число подмножеств диаметра меньшего, чем ε; $\delta(A_l)$— диаметр множества A_l, причем считается $[\delta(E)]^0=0$, если E пусто и $[\delta(E)]^0=1$ в противном случае.

Тогда

$$m_p(X)=\sup_{\varepsilon>0} m_p^\varepsilon$$

называется p-мерной мерой Хаусдорфа пространства X.

Определение 2. *Хаусдорфовой размерностью множества X называется верхняя грань всех действительных чисел p, для которых*

$$m_p(X)>0.$$

---

* Функция $f(x)\in F(L[0, 2\pi])$, если $f(x)$ измерима на $[0, 2\pi]$ и $F(|f(x)|)\in\in L[0, 2\pi]$.

В качестве меры густоты множества ниже избирается его размерность Хаусдорфа: из двух множеств меры нуль то более густое, у которого размерность Хаусдорфа больше. Поскольку размерность Хаусдорфа линейных множеств не превышает 1 (размерность 1 имеют, например, множества положительной лебеговой меры), то самыми густыми в указанном смысле будут множества хаусдорфовой размерности 1.

В настоящей статье доказывается следующая

Теорема. *Для всякого класса $F(L[0, 2\pi])$ существует функция $f(x) \in F(L[0, 2\pi])$ с лакунарным рядом Фурье, который сходится к $+\infty$ на множестве, являющемся континуальным объединением попарно непересекающихся множеств, каждое из которых имеет в пересечении с любым интервалом мощность континуума и хаусдорфову размерность* 1.

Сначала приведем ряд лемм.

Лемма 1. *Для всякой функции* $F(x)$ существует гладкая, неубывающая на $[0, \infty)$ функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi(x) \geqslant F(x)$ при всех $x \in [0, \infty)$.*

Эта лемма известна (см., например, [3], стр. 44).

Сделаем следующее замечание, полезное в дальнейшем. Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда число

$$\lambda = \inf_k \frac{n_{k+1}}{n_k}$$

будем называть степенью лакунарности последовательности $\{n_k\}$.

Лемма 2. *Если последовательность $\{n_k\}$ имеет степень лакунарности $\lambda > n+1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k, \cdots$ — натуральные числа, не превосходящие n, то интеграл*

$$\int_0^{2\pi} \cos^{\alpha_1} n_1 x \cos^{\alpha_2} n_2 x \cdots \cos^{\alpha_k} n_k x dx = 0, \ k = 1, 2, \cdots,$$

если хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ нечетно.

Доказательство. Известно, что

$$\cos^k x = c_0 + \sum_{i=1}^{k} c_i \cos ix,$$

где $c_0, c_1, \cdots, c_k$ — вещественные числа и

$$c_0 = \begin{cases} 0 \text{ при } k \text{ — нечетном,} \\ > 0 \text{ при } k \text{ — четном.} \end{cases}$$

---

* Всюду ниже считается, что функция $F(x)$ неотрицательна и неубывает на $[0, \infty)$.

По индукции легко показать, что

$$\int_0^{2\pi} \cos m_1 x \cos m_2 x \cdots \cos m_s\, x dx = 0,\quad s=1, 2, \cdots,$$

если $m_1, m_2, \cdots, m_s$ такие натуральные числа, что

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p < m_{p+1},\quad p=1, 2, \cdots.$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} \cos^{\alpha_1} n_1 x \cos^{\alpha_2} n_2 x \cdots \cos^{\alpha_k} n_k\, x dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(c_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{\alpha_1} c_i^{(1)} \cos i n_1 x\right) \cdots \left(c_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{\alpha_k} c_i^{(k)} \cos i n_k\, x\right) dx,$$

то при отсутствии нетригонометрического члена хотя бы в одном из сомножителей интегранта весь интеграл обратится в нуль. Но это возможно лишь тогда, когда хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ нечетно.

Лемма 3. *Пусть последовательность целых положительных чисел $\{n_k\}$ строго возрастает и*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \infty.$$

*Тогда для всякого $\alpha \in [0,1)$ множество всех чисел $x \in [0,1]$, для которых**

$$\lim_{k\to\infty} \{n_k x\} = \alpha,$$

имеет хаусдорфову размерность 1.

Эта лемма доказана Эглестоном (см. [4], стр. 90). Заметим, что не изменяя схемы доказательства этой леммы, можно показать, что при всяком $\alpha \in [0,1)$ множество тех чисел $x \in [0,1]$, для которых предел

$$\lim_{k\to\infty} \{n_k x\} = \alpha$$

имеет мощность континуума и хаусдорфову размерность 1 на любом интервале $(a, b) \subset [0,1]$. Впредь нам потребуется именно такая формулировка леммы.

Лемма 4. *Для каждой последовательности $\{q_n\}$ такой, что*

$$q_n \uparrow \infty,\quad q_n > 1,\quad n=1, 2, \cdots,$$

существуют последовательности $\{a_l\}$, $\{p_l\}$ такие, что

---

* Через $\{a\}$ обозн., как обычно, дробная часть числа a.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty,\ a_i \downarrow 0,\ a_i \leqslant 1,\ i=1, 2, \cdots;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{p_i} < \infty,\ 1 \leqslant p_i \leqslant 2,\ i=1, 2, \cdots;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-p_i} \leqslant q_n,\ a_i^{2-p_i} \downarrow 0,\ n=1, 2, \cdots.$$

Доказательство. Легко показать, что существует последовательность $\{c_i\}$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty,\ c_i \downarrow 0,\ \sum_{i=1}^{n} c_i < q_n,\ c_1 = 1,\ n = 1, 2, \cdots.$$

Положим

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n,$$

$$a_n = \frac{c_n}{S_n},\quad b_n = \frac{c_n}{S_n^2},\quad p_n = \frac{\ln b_n}{\ln a_n},\ n = 2, 3, \cdots,$$

$$a_1 = b_1 = c_1 = S_1 = p_1 = 1.$$

Тогда по известной теореме Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Далее

$$a_n^{2-p_n} = \frac{a_n^2}{b_n} = c_n \downarrow 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-p_k} = \sum_{k=1}^{n} c_k < q_n,\ n=1, 2, \cdots.$$

Легко видеть, что

$$1 \leqslant p_n \leqslant 2,\ n=1, 2, \cdots.$$

Таким образом, лемма 4 полностью доказана.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы. В силу леммы 1 функцию $F(x)$ можно считать целой, т. е.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n,\ x \in (-\infty, \infty),\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|r_n|}} = \infty.$$

Положим

$$m_k = (2k)^k,\ k=1, 2, \cdots;$$

$$q_n = 2 + \min_{k>n} \frac{1}{\sqrt[2k]{|r_k|}},\ n=1, 2, \cdots.$$

Тогда $q_n \uparrow \infty$ и $q_n > 1$ $(n=1, 2, \cdots)$. Используя лемму 4, по последовательности $\{q_n\}$ находим соответствующие последовательности $\{a_k\}$ и $\{p_k\}$. Докажем, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos m_k x^*$$

искомая. Пусть

$$\sigma_k(x) = \sum_{p=1}^{k} a_p \cos m_p x, \quad 1 \leqslant n < k.$$

Имеем

$$\int_0^{2\pi} \sigma_k^{2n}(x)\, dx \leqslant 2^{2n} \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{n} a_l \cos m_l x \right)^{2n} dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=n+1}^{k} a_l \cos m_l x \right)^{2n} dx \right] \leqslant 2^{2n} \cdot 2\pi \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} a_l \right)^{2n} +$$

$$+ 2^{2n} \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = 2n} \int_0^{2\pi} \cos^{\alpha_1} m_{n+1} x \cdots \cos m_{n+s}^{\alpha_s} x dx \; \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_s)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_s!} a_{n+1}^{\alpha_1} \cdots a_{n+s}^{\alpha_s}.$$

Поскольку

$$\frac{m_{p+1}}{m_p} = 2(p+1)\left(\frac{p+1}{p} \right)^p > 2n + 2 > 2n + 1$$

при $p > n$, то к последней сумме применима лемма, так как

$$\alpha_i \leqslant 2n, \; i = 1, 2, \cdots, s.$$

Значит, используя то, что $0 \leqslant a_l \leqslant 1$, $1 < p_l \leqslant 2$, имеем

$$\int_0^{2\pi} \sigma_k^{2n}(x)\, dx \leqslant 4^n \cdot 2\pi \left(\sum_{l=1}^{n} a_l^{2-p_l} \right)^{2n} +$$

$$+ 4^n \cdot 2\pi \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n} \cdot \frac{(2\alpha_1 + \cdots + 2\alpha_s)!}{(2\alpha_1)! \cdots (2\alpha_s)!} \cdot a_{n+1}^{2\alpha_1} \cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}.$$

Из формулы Стирлинга получаем

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot e^{\frac{\vartheta_{2n}}{24n}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{e} \right)^{2n} \cdot 2\pi n e^{\frac{\vartheta_n}{6n}}} \leqslant 4^n e,$$

---

* Написанный ряд сходится почти всюду на прямой $(-\infty, \infty)$ к некоторой функции $f \in L^2[0, 2\pi]$, ибо $\{a_k\} \in l^2$.

$$0<\delta_n<1,\ n=1,2,\cdots.$$

Поэтому

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\frac{(2\alpha_1+\cdots+2\alpha_s)!}{(2\alpha_1)!\cdots(2\alpha_s)!}a_{n+1}^{2\alpha_1}\cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}=$$

$$=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\left[\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\right]^2 a_{n+1}^{2\alpha_1}\cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}\cdot\frac{(\alpha_1!)^2\cdots(\alpha_s!)^2}{(2\alpha_1)!\cdots(2\alpha_s)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\leqslant$$

$$\leqslant 4^n e\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\left[\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\right]^2 a_{n+1}^{2\alpha_1}\cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}.$$

По неравенству Коши

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\left[\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\right]^2 a_{n+1}^{2\alpha_1}\cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\times$$

$$\times a_{n+1}^{\alpha_1(2-p_{n+1})}\cdots a_{n+s}^{\alpha_s(2-p_{n+1})}\cdot\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}a_{n+1}^{\alpha_1 p_{n+1}}\cdots a_{n+s}^{\alpha_s p_{n+s}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{\alpha_i>0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}}\left[\frac{\dfrac{\alpha_1\cdot a_{n+1}^{2-p_{n+1}}}{\sqrt[\alpha_1]{\alpha_1!}}+\cdots+\dfrac{\alpha_s\cdot a_{n+s}^{2-p_{n+s}}}{\sqrt[\alpha_s]{\alpha_s!}}}{\alpha+\cdots+\alpha_s}\right]^n n!\,\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\times$$

$$\times a_{n+1}^{\alpha_1 p_{n+1}}\cdots a_{n+s}^{\alpha_s p_{n+s}}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n\\ \alpha_i>0}}\left[\frac{\dfrac{\alpha_1}{\sqrt[\alpha_1]{\alpha_1!}}a_{n+1}^{2-p_{n+1}}+\cdots+\dfrac{\alpha_s}{\sqrt[\alpha_s]{\alpha_s!}}a_{n+s}^{2-p_{n+s}}}{n}\right]^n n!\left(\sum_{s=n+1}^{k}a_s^{p_s}\right)^n.$$

В силу выбора $\{a_i\}$ и $\{p_i\}$ последнее выражение не превосходит

$$e^n\,(a_1^{2-p_1}+\cdots+a_n^{2-p_n})^n\,(a_1^{p_1}+\cdots)^n.$$

Значит

$$\int_0^{2\pi}\sigma_k^{2n}(x)\,dx\leqslant C_1^n\,q_n^{2n},\ C_1=\mathrm{const}.$$

По лемме Фату

$$\int_0^{2\pi}f^{2n}(x)\,dx\leqslant C_1^n\cdot q_n^{2n},\ x=1,2,\cdots.$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi}|f^{2n+1}(x)|\,dx\leqslant\sqrt{\int_0^{2\delta}f^2(x)\,dx\cdot\int_0^{2\delta}f^{4n}(x)\,dx}\leqslant$$

$$\leqslant C_2^n\cdot q_{2n}^{2n}\leqslant C_2^n\,q_{2n+1}^{2n+1},\ C_2=\mathrm{const},\ n=1,2,\cdots,$$

то имеем

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^n\, dx \leqslant C^n q_n^n, \quad C=\text{const}, \quad n=1, 2, \cdots.$$

Далее

$$\int_0^{2\pi} F(|f|)\, dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |r_n| \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C^n \cdot |r_n| \cdot \left(2 + \min_{k>n} \frac{1}{\sqrt[2k]{|r_k|}}\right)^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C^n |r_n| \left(2 + \frac{1}{\sqrt[2n]{|r_n|}}\right)^n.$$

Последний ряд сходится по признаку Коши, так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|r_n| \left(2 + \frac{1}{\sqrt[2n]{|r_n|}}\right)^n \cdot C_n} =$$

$$= C \lim_{n\to\infty} \left(2 \sqrt[n]{|r_n|} + \sqrt[2n]{|r_n|}\right) = 0 < 1.$$

Значит

$$f(x) \in F(L[0, 2\pi]).$$

Лемма 3 естественно переносится с отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[0, 2\pi]$. Поэтому множества A_α тех чисел $x \in [0, 2\pi]$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} 2\pi \left\{\frac{m_k x}{2\pi}\right\} = \alpha, \quad \alpha \in [0, 2\pi),$$

попарно непересекаются и каждое в пересечении с любым интервалом $(a, b) \subset [0, 2\pi]$ дает множество мощности континуума и хаусдорфовой размерности 1.

Теперь остается только заметить, что на каждом множестве A_α при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ построенный выше ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos m_k x$ сходится к $+\infty$, и теорема доказана.

В связи с этой теоремой отметим следующий факт. Докажем, что *ряды Фурье функций, принадлежащих всем классам* $F(L\,[0,2\pi])$ *не могут сходиться* к $+\infty$ *ни в одной точке.* Поскольку известно, что для рядов Фурье существенно ограниченных функций это так, то достаточно показать, что

$$\bigcap_F F(L[0, 2\pi]) = m,$$

где m — класс существенно ограниченных функций. Очевидно, что достаточно доказать включение

$$\bigcap_\Phi F(L\,[0, 2\pi]) \subset m,$$

где Φ пробегает соответствующие целые функции.

Пусть $f(x)$ принадлежит левой части последнего включения. Если

$$\int_0^{2\pi} F(|f(x)|)\,dx < \infty \quad \text{и} \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \subset a_n > 0, \; n=1, 2, \cdots,$$

то, обращая теорему Б. Леви, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx < \infty.$$

Утверждается, что какова бы ни была положительная последовательность $q_n \to \infty$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx \cdot \frac{1}{q_n^n} = 0.$$

Действительно, пусть это не так, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx}{q_n^n} > 0.$$

Полагаем

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{q_n^n}}, \; n = 1, 2, \cdots.$$

Тогда функция

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

—целая. Но величина

$$a_n \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx = (\sqrt{q_n})^n \cdot \frac{\int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx}{q_n^n}$$

не стремится к нулю, и поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx$$

заведомо расходится. Но это противоречит выбору функции $f(x)$. Итак, при всякой $q_n \to \infty$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx \cdot \frac{1}{q_n^n} = 0.$$

Покажем, что тогда при всякой последовательности $q_n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^n\,dx}{q_n^n}\right]^{1/n}=0.$$

Предположим противное, т. е. что по некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$

$$\left[\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^{n_k}\,dx\right]^{\frac{1}{n_k}}\cdot\frac{1}{q_{n_k}}>\alpha>0,\ k=1,2,\cdots.$$

Положим

$$\tilde{q}_n=q_n\cdot\frac{\alpha}{2},\ n=1,\ 2,\cdots.$$

Тогда

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^{n_k}dx\right)^{\frac{1}{n_k}}\frac{1}{\tilde{q}_{n_k}}>2,\ k=1,\ 2,\cdots,$$

т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^n\,dx}{\tilde{q}_n^n}>0.$$

Противоречие с только что доказанным фактом говорит о том, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}}{q_n}=0$$

при всякой $q_n\to\infty$. Ясно, что тогда

$$\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^n\,dx<\left(\frac{C}{2}\right)^n,\ C=\text{const},\ n=1,\ 2,\cdots.$$

Следовательно

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{f(x)}{C}\right|^n dx<\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n=1,\ 2,\cdots.$$

С другой стороны

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{f(x)}{C}\right|^n dx\geqslant\mu\{x:\ |f(x)|>C\}.$$

Значит

$$\mu\{x:\ |f(x)|>C\}<\left(\frac{1}{2}\right)^n,\quad n=1, 2, \cdots.$$

Ввиду произвольности n отсюда следует, что

$$\mu\{x:\ |f(x)|>C\}=0,$$

и, следовательно, $f(x)$ существенно ограничена константой C.

Автор выражает признательность П. Л. Ульянову за постановку задачи и руководство работой.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 26.IV.1971

Ի. Մ. ՄԻԽԵԵՎ. Ֆուրյեի եռանկյունաչափական շարքերի $+\infty$-յան զուգամիտելու մասին

(ամփոփում)

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ գոյություն ունեն Ֆուրյեի լակունար շարքերով որքան կարելի է լավ հանրագումարելի ֆունկցիաներ, որոնք ձգտում են $+\infty$-ի, 1 Հաուսդորֆյան չափի բազմությունների վրա։

I. M. MIHEJEV. *On convergence to $+\infty$ of trigonometrical Fourier series*

(summary)

The article proves that there exist arbitrarily well summarisable functions with lacunary Fourier series which converge to $+\infty$ on sets of Hausdorff's dimension 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян.* О сходимости рядов Фурье к $+\infty$, Изв. АН АрмССР, сер. физ-мат. наук, № 3, 1961, 35—41.
2. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19, № 1, 1964, 3—69.
3. *Г. Полиа* и *Г. Сеге.* Задачи и теоремы из анализа, т. 2, Гостехиздат, М., 1956.
4. *H. Cy. Eggleston.* Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory, Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, 54, 1951—1952, 42—93.