ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК, О. В. ЕПИФАНОВ

# ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В аналитической теории дифференциальных уравнений приходится в ряде случаев оценивать рост производных целой функции в зависимости от роста исходной функции (см., например, [1]). Эта же задача оценки роста производных целых функций из некоторого класса возникает в теории целых (в частности, экспоненциальных) функций. Характерным примером решения такой задачи является классический результат С. Н. Бернштейна, согласно которому, если $f(z)$ — целая функция первого порядка и типа $\leqslant \sigma$, ограниченная на вещественной оси, то

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |f^{(n)}(x)| \leqslant \sigma^n \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|.$$

В настоящей статье оценивается рост производных целых функций из некоторого весового банахового пространства целых функций, инвариантного относительно дифференцирования. Результаты §§ 1, 2 и 4 получены Ю. Ф. Коробейником, а § 3—О. В. Епифановым.

1°. Пусть функция $\varphi(r)$ определена при $r > r_0 > 0$, положительна, непрерывна и монотонно возрастает при $r \to \infty$. Будем предполагать, что это возрастание не слишком медленное, а именно, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \varphi(r)}{\ln r} = +\infty. \tag{1}$$

Если $y(z)$—произвольная целая функция, то, как обычно, положим $M(r, y) = \max_{|z|=r} |y(z)|$. Обозначим через $B_\varphi$ нормированное пространство целых функций $f(z)$ таких, что

$$\sup_{r>r_0} \frac{M(r,f)}{\varphi(r)} = \|f\|_{r_0} < \infty.$$

Легко проверить, что $B_\varphi$—банахово пространство. Условие (1) обеспечивает включение в $B_\varphi$ множества $S$ всех многочленов. Предположим, что весовая функция $\varphi(r)$ возрастает не слишком быстро, а именно, что при некотором $a_0 > 0$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\varphi(r+a_0)}{\varphi(r)} = C < \infty. \tag{2}$$

Множество функций, удовлетворяющих условиям (1) и (2), достаточно обширно и содержит, например, функции вида $\exp \sigma (\ln r)^\gamma$, $\exp \sigma r^\alpha$, где $0 < \sigma < \infty$, $1 < \gamma < \infty$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Условие (2) обеспечивает инвариантность $B_\varphi$ относительно дифференцирования. Действительно, если $y(z) \in B_\varphi$ и $r > r_0$, то

$$\frac{M(r, y')}{\varphi(r)} \leqslant \frac{M(r+a_0, y)}{a_0 \varphi(r)} \leqslant \frac{M(r+a_0, y)}{\varphi(r+a_0)} \frac{\varphi(r+a_0)}{\varphi(r)\, a_0} \leqslant \frac{C\, \|y\|_{r_0}}{a_0}.$$

Отсюда

$$\|y'\|_{r_0} \leqslant \frac{C}{a_0} \|y\|_{r_0} < \infty. \tag{3}$$

Заметим, что условие (2) выполнено, если, например, $\varphi(r)$ дифференцируема в промежутке $[r_0, +\infty)$, причем $\dfrac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}$ не возрастает. Тогда для $\forall a > 0$ и $\forall r > r_0$

$$\frac{\varphi(r+a)}{\varphi(r)} = \exp\{\ln \varphi(r+a) - \ln \varphi(r)\} = \exp \int_r^{r+a} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt < \exp \frac{a\varphi'(r_0)}{\varphi(r_0)}.$$

Неравенство (3) уже представляет собой оценку роста производной в зависимости от роста нормы самой функции. Из нее при любом $n > 1$ следует

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant \left(\frac{C}{a_0}\right)^n \|y\|_{r_0}. \tag{4}$$

Постараемся уточнить оценку (4), предполагая, что функция $\varphi(r)$ положительна и дважды дифференцируема в промежутке $[r_0, +\infty)$, а функция $\mu(r) = \ln \varphi(r)$ неограниченно и монотонно возрастает и вогнута (выпукла вверх) в этом промежутке, причем

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\mu(r)}{\ln r} = +\infty. \tag{5}$$

Условие (5) является другой формой записи условия (1). Вогнутость $\mu(r)$ равносильна условию невозрастания функции $\mu'(r) = \dfrac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}$. Для $\forall n \geqslant n_0$, $r \geqslant r_0$, $a > 0$ имеем из интегральной формулы Коши

$$\frac{M(r, y^{(n)})}{\varphi(r)} \leqslant \frac{n!\, M(r+a, y)}{a^n \varphi(r+a)} \frac{\varphi(r+a)}{\varphi(r)}.$$

Отсюда

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant n!\, \beta_n \|y\|_{r_0},$$

где

$$\beta_n = \inf_{a>0} \sup_{r>r_0} \frac{\varphi(r+a)}{\varphi(r)} \frac{1}{a^n}.$$

Но

$$\frac{\varphi(r+a)}{\varphi(r)} = \exp[\mu(r+a) - \mu(r)] = \exp \int_r^{r+a} \mu'(t)\, dt \leqslant \exp a\mu'(r) \leqslant$$
$$\leqslant \exp a\mu'(r_0).$$

Следовательно

$$\beta_n < \inf_{a>0} \frac{1}{a^n} \exp a\mu'(r_0) = \gamma_n.$$

Обычными методами математического анализа находим, что наименьшее в промежутке $(0, +\infty)$ значение функции $\frac{1}{a^n} \exp a\mu'(r_0)$ достигается в точке $a_0 = \frac{n}{\mu'(r_0)}$ и равно $\left(\frac{e\mu'(r_0)}{n}\right)^n$. Итак, при $\forall n \geqslant 1$

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant n! \left(\frac{e\mu'(r_0)}{n}\right)^n \|y\|_{r_0}. \tag{6}$$

С помощью формулы Стирлинга формула (6) перепишется так:

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant \lambda_n (\mu'(r_0))^n \|y\|_{r_0}, \tag{7}$$

где $\lambda_n = \sqrt{2\pi n}\; e^{\frac{1}{12n}}$, и $(\lambda_n)^{\frac{1}{n}} \to 1$ при $n \to \infty$. Иначе говоря

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant (1+\varepsilon_n)^n (\mu'(r_0))^n \|y\|_{r_0}, \tag{8}$$

$\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Оценкой (8) удобно пользоваться при больших значениях $n$.

Заметим еще, что если положить $\|y\|_r = \sup\limits_{t>r} \frac{M(t, y)}{\varphi(t)}$, то для $\forall r \geqslant r_0$ получаем таким же способом оценку

$$\|y^{(n)}\|_r \leqslant \lambda_n (\mu'(r))^n \|y\|_r. \tag{9}$$

В качестве примера рассмотрим функцию $\mu(r) = \sigma r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ является уточненным порядком (см. [2]), то есть удовлетворяет условиям

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0, \quad \lim_{r\to\infty} r\rho'(r) \ln r = 0.$$

Как известно [2], из этих свойств следует, что $r^{\rho(r)}$ монотонно возрастает для всех достаточно больших $r$.

Мы будем считать, что это обстоятельство имеет место для $\forall r > r_0$ и что $\rho(r)$ дважды дифференцируема, причем $(r^{\rho(r)})'' \leqslant 0$ (то есть $\mu(r)$ вогнута). Тогда имеет место неравенство (9) при любых $n \geqslant 1$, $r > r_0$.

Запишем выражение для $\mu'(r)$:

$$\mu'(r) = \sigma[\rho(r) r^{\rho(r)-1} + r^{\rho(r)} \ln r\, \rho'(r)] = \sigma\rho(r) r^{\rho(r)-1}\left[1 + \frac{r \ln r\, \rho'(r)}{\rho(r)}\right] =$$
$$= \sigma\rho r^{\rho(r)-1}[1 + \varepsilon(r)],$$

где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$.

Итак

$$\|y^{(n)}\|_r \leqslant \lambda_n [1 + \varepsilon(r)] (\sigma\rho r^{\rho(r)-1})^n \|y\|_r. \tag{10}$$

В частности, если положить $\mu(r) = \sigma r^\rho$, где $0 < \sigma < +\infty$, $0 < \rho \leqslant 1$, то $\mu'(r) > 0$, $\mu''(r) \leqslant 0$, $\rho(r) \equiv \rho$, $\varepsilon(r) \equiv 0$, и по формуле (10) получим для

$\forall r>0$ (в качестве $r_0$ можно взять любое как угодно малое положительное число):

$$\|y^{(n)}\|_r^{\sigma,\rho} \leqslant \lambda_n\,(\sigma\rho r^{\rho-1})^n\,\|y\|_r^{\sigma,\rho}. \tag{11}$$

Здесь $y(z)$ — произвольная целая функция из пространства $W^r_{\sigma,\rho}$ с нормой $\|y\|_r^{\sigma,\rho} = \sup\limits_{t>r} \dfrac{M(t,y)}{\exp \sigma t^\rho}$.

Попробуем оценить степень точности формулы (11). Положим $\rho=1$ и рассмотрим функцию $y_0=e^{\sigma z}\in W^r_{\sigma,1}$. Для нее при $\forall n\geqslant 1$ и $\forall r>0$, как легко вычислить

$$\|y_0^{(n)}\|_r^{\sigma,1} = \sigma^n\,\|y_0\|_r^{\sigma,1}.$$

Таким образом, если оценку (11) записать в асимптотическом виде

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{\|y^{(n)}\|_r^{\sigma,\rho}}{\|y\|_r^{\sigma,\rho}}\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho\sigma r^{\rho-1},$$

то последнее неравенство точно в том смысле, что число $\sigma\rho$ нельзя заменить меньшим числом сразу для всех $\sigma\in(0,+\infty)$ и $\rho\in(0,+1]$.

Рассмотрим еще случай, когда $\dfrac{1}{2}<\rho\leqslant 1$. Функция Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma^{\frac{k}{\rho}}z^k}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{k}{\rho}\right)}.$$

является, как известно, целой функцией порядка $\rho$ и типа $\sigma$. Из ее асимптотического представления (см. монографию [3], стр. 133—135), нетрудно вывести, что если $\mu>0$, то

$$M(r,\ E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\ \mu)) = \rho r^{\rho(1-\mu)}\,\sigma^{1-\mu}\,e^{\sigma r^\rho}+\varepsilon_1(r),$$

где $\varepsilon_1(r)\to 0$ при $r\to\infty$. Следовательно, $E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\mu)\in W^r_{\sigma,\rho}$, если $\mu\geqslant 1$ и $r\geqslant 0$. Рассмотрим функцию $\psi(z)=E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\ 1)$. Имеем

$$\psi'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho\sigma^{\frac{k}{\rho}}z^{k-1}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{\rho}\right)}=\rho\sigma^{\frac{1}{\rho}}E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда

$$M(r,\psi')=\rho\sigma^{\frac{1}{\rho}}\rho r^\rho r^{-1}e^{\sigma r^\rho}\sigma^{1-\frac{1}{\rho}}+\varepsilon_2(r)=\rho e^{\sigma r^\rho}(\rho\sigma r^{\rho-1}+\varepsilon_3(r)),$$

где $\varepsilon_3(r)\,e^{\sigma r^\rho}\to 0$ при $r\to\infty$.

Следовательно, $\|\psi'\|_r^{\sigma,\rho}=\|\psi\|_r^{\sigma,\rho}(\rho\sigma r^{\rho-1}+\varepsilon_4(r))$, $r>0$, $\varepsilon_4(r)\cdot e^{\sigma r^\rho}\to 0$ при $r\to\infty$.

Аналогично, с помощью тех же асимптотических формул нетрудно показать, что при любом фиксированном $n \geqslant 1$ и при $\forall r > 0$

$$\|y^{(n)}\|_r^{\sigma, \rho} = \|y\|_r^{\sigma, \rho} [(\rho \sigma r^{\rho-1})^n + \eta_n(r)],$$

где $\eta_n(r) e^{\sigma r^\rho} \to 0$ при $r \to \infty$.

Таким образом, хотя оценка (11) и получена элементарным путем, но она оказалась довольно точной (при больших $n$ и $r$). Менее точные оценки производных в пространстве $W^r_{\sigma, \rho}$ были получены ранее в работе [4].

Заметим еще, что пользуясь асимптотическим представлением функции $E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}} z; \mu)$ из [3], В. Богачев в своей курсовой работе показал, что пространство $W^r_{\sigma, \rho}$ не инвариантно относительно дифференцирования при любом $\rho > 1$.

В качестве второго примера на применение формулы (9) рассмотрим функцию $\mu(r) = \sigma (\ln r)^\rho$, $r_0 \geqslant 1$, $\rho > 1$, $0 < \sigma < \infty$ и образуем банахово пространство $V_{r_0}^{\sigma, \rho}$ целых функций нулевого порядка $y(z)$, для которых

$$\|y\|_{r_0}^{\wedge} = \sup_{r > r_0} \frac{M(r, y)}{\exp \sigma (\ln r)^\rho} < +\infty.$$

Функция $\mu(r)$ обладает всеми нужными нам свойствами, если $r_0 > e^{\rho-1}$. По формуле (9) имеем для $\forall r > e^{\rho-1}$

$$\|y^{(n)}\|_r^{\wedge} \leqslant \lambda_n \left( \frac{\sigma\rho (\ln r)^{\rho-1}}{r} \right)^n \|y\|_r^{\wedge} \cdot \tag{12}$$

Аналогичные оценки можно получить и в других классах достаточно медленно растущих целых функций.

2°. В этом параграфе мы получим оценки производных целой функции из весового пространства $B_\varphi$ при несколько иных предположениях относительно весовой функции $\varphi(r)$. Именно, пусть $\varphi(r)$—положительная, дифференцируемая и монотонно возрастающая в промежутке $(b_0, +\infty)$, где $b_0 \geqslant 0$, функция, удовлетворяющая условию (1). Как и раньше, будем, с другой стороны, предполагать, что $\varphi(r)$ возрастает не слишком быстро, но это условие выразим в иной форме, чем (2): именно, для некоторого $r_0 > b_0$ можно указать такое $C = C(r_0, b_0)$, что для $\forall x \geqslant r_0$ и $\forall y > b_0$

$$\varphi(x+y) \leqslant C \varphi(x) \varphi(y). \tag{13}$$

Если, как и раньше, ввести функцию $\mu(x) = \ln \varphi(x)$, то условие (13) эквивалентно следующему:

$$\sup_{\substack{x > r_0 \\ y > b_0}} [\mu(x+y) - \mu(x) - \mu(y)] < +\infty. \tag{14}$$

Заметим, что если функция $\varphi$ удовлетворяет условию (14), то условие (2) выполняется при любом $a_0 > b_0$, и пространство $B_\varphi$ инвариантно относительно дифференцирования.

Пусть $y(z) \in B_\varphi$. Тогда при $\forall r \geqslant r_0$, $t \geqslant r$ и $\forall a > b_0$

$$\frac{M(t, y^{(n)})}{\varphi(t)} \leqslant n! \frac{M(t+a, y)}{\varphi(t+a)} \frac{\varphi(t+a)}{a^n \varphi(t)} \leqslant n! \|y\|_r C \cdot \frac{\varphi(a)}{a^n}.$$

Положим $\gamma_n = \inf\limits_{a > b_0} \frac{\varphi(a)}{a^n}$. Тогда $\|y^{(n)}\|_r \leqslant n! \gamma_n C \|y\|_r$, $r \geqslant r_0$. При любом $n \geqslant 1$ $\lim\limits_{a \to +\infty} \frac{\varphi(a)}{a^n} = +\infty$. Поэтому или $\gamma_n = \lim\limits_{a \to b_0+0} \frac{\varphi(a)}{a^n}$, или $\gamma_n$ достигается где-то внутри конечного промежутка $(b_0, N)$, в точках, удовлетворяющих условию

$$\varphi'(a) a^n - na^{n-1} \varphi(a) = 0, \quad \text{или} \quad a = \frac{n\varphi(a)}{\varphi'(a)}. \tag{15}$$

В ряде случаев можно решить это уравнение точно или асимптотически и, тем самым, найти точное или асимптотическое значение $a$ и $\gamma_n$.

Положим, например, $\varphi(r) = e^{\sigma r^\rho}$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \rho \leqslant 1$, $b_0 = 0$. Так как при $\forall x$, $y > 0$ $(x+y)^\rho \leqslant x^\rho + y^\rho$, то условие (13) выполнено, если в качестве $r_0$ взять как угодно малое положительное число, при этом $C = 1$, $\lim\limits_{a \to +0} \frac{\varphi(a)}{a^n} = +\infty$, и $\gamma_n$ достигается внутри интервала $(0, +\infty)$.

Из равенства (15) находим $a = \left(\frac{n}{\sigma\rho}\right)^{1/\rho}$, $\gamma_n = \left(\frac{\sigma e \rho}{n}\right)^{n/\rho}$. Таким образом, при $\forall r \geqslant r_0 > 0$

$$\|y^{(n)}\|_r^{\sigma, \rho} \leqslant n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho} (\sigma\rho)^{n/\rho} \|y\|_r^{\sigma, \rho}. \tag{16}$$

Сравнивая оценки (11) и (16), видим, что они совпадают при $\rho = 1$, а при $\rho < 1$ имеют различный характер.

Покажем, что оценка (16) справедлива и при $r = 0$. Пусть $y(z) \in W^0_{\sigma, \rho}$. Тогда $y \in W^r_{\sigma, \rho}$ при любом $r > 0$ и

$$\|y^{(n)}\|_0^{\sigma, \rho} = \sup_{r > 0} \|y^{(n)}\|_r^{\sigma, \rho} \leqslant n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho} (\sigma\rho)^{n/\rho} \sup_{r > 0} \|y\|_r^{\sigma, \rho} =$$

$$= n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho} (\sigma\rho)^{n/\rho} \|y\|_0^{\sigma, \rho}.$$

Как заметил В. Богачев, последние оценки точны для любого $n \geqslant 1$: если $y_n(z) = \frac{z^n}{n!}$, то $\|y_n^{(n)}(z)\|_0^{\sigma, \rho} = 1$; $\|y_n\|_0^{\sigma, \rho} = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{\sigma\rho e}\right)^{n/\rho}$. С помощью этого же примера легко установить, что в неравенстве (16) постоянную $n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho} (\sigma\rho)^{n/\rho}$ нельзя заменить меньшим числом $C_n$ сразу для всех $r > 0$, ибо при $r \downarrow 0$

$$\sup_{y\in W^r_{\sigma,\rho}} \frac{\|y^{(n)}\|_r^{\sigma,\rho}}{\|y\|_r^{\sigma,\rho}} = \alpha_n(r) \to n!\left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho}(\sigma\rho)^{n/\rho}.$$

Пусть $\gamma$—произвольное число из отрезка $[0,1]$. Возводя обе части неравенства (11) в степень $\gamma$, а неравенства (16)—в степень $1-\gamma$, мы приходим к такой комбинации оценок (11) и (15), в которой участвует параметр $\gamma$, а $r>0$:

$$\|y^{(n)}\|_r^{\sigma,\rho} \leq n!\left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{n\left[\gamma+\frac{1-\gamma}{\rho}\right]} r^{(\rho-1)\gamma n}\|y\|_r^{\sigma,\rho}. \tag{17}$$

Положим еще $\varphi(r)=\exp\sigma(\ln r)^\rho$, $0<\sigma<\infty$, $1<\rho<\infty$, $b_0=1$. Рассмотрим при фиксированном $y\geqslant 1$ функцию $\lambda(x)=(\ln(x+y))^\rho-(\ln x)^\rho$. Легко проверить, что функция $\dfrac{(\ln t)^{\rho-1}}{t}$ возрастает в промежутке $(1, e^{\rho-1})$ и убывает в интервале $(e^{\rho-1}, +\infty)$. Так как $\lambda'(x)=\rho\left[\dfrac{(\ln(x+y))^{\rho-1}}{x+y}-\dfrac{(\ln x)^{\rho-1}}{x}\right]$, то $\lambda'(x)\leqslant 0$ для $\forall y>0$ и $\forall x>x_0=e^{\rho-1}$. Следовательно, если $x\geqslant x_0$ и $y>0$, то

$$[\ln(x+y)]^\rho-(\ln x)^\rho\leqslant(\ln(x_0+y))^\rho-(\ln x_0)^\rho.$$

Отсюда при $\forall x>x_0$ и $\forall y\geqslant 1$

$$(\ln(x+y))^\rho-(\ln x)^\rho-(\ln y)^\rho\leqslant(\ln(x_0+y))^\rho-(\ln x_0)^\rho-(\ln y)^\rho.$$

Заметим, что если $y\geqslant x_0=e^{\rho-1}$, то

$$(\ln(y+x_0))^\rho-(\ln y)^\rho<(\ln 2x_0)^\rho-(\ln x_0)^\rho=d_1.$$

Если $d=\max\limits_{1<y<x_0}[(\ln(x_0+y))^\rho-(\ln y)^\rho]$ и $d_2=\max\{d,\ d_1-(\ln x_0)^\rho\}$, то при $\forall x\geqslant x_0$ и $\forall y\geqslant 1$

$$(\ln(x+y))^\rho-(\ln x)^\rho-(\ln y)^\rho\leqslant d_2.$$

Таким образом, условие (14) выполнено ($b_0=1$, $r_0=x_0=e^{\rho-1}$). Из уравнения (15) получаем $\ln a=\left(\dfrac{n}{\sigma\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$ или $a_n=\exp\left(\dfrac{n}{\sigma\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$, откуда

$$\frac{\varphi(a_n)}{(a_n)^n}=\exp\frac{(1-\rho)\,n^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{(\sigma\rho^\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}}=\exp(1-\rho)\left(\frac{n^\rho}{\sigma\rho^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Так как $\lim\limits_{a\to 1+0}\dfrac{\varphi(a)}{a^n}=1$, а $\dfrac{\varphi(a_n)}{(a_n)^n}<1$, то $\gamma_n=\dfrac{\varphi(a_n)}{(a_n)^n}$ и окончательно при $\forall r>e^{\rho-1}$

$$\|y^{(n)}\|_r^\Lambda\leqslant n!\cdot\exp(1-\rho)\left(\frac{n^\rho}{\sigma\rho^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\cdot\|y\|_r^\Lambda. \tag{18}$$

Неравенство (18) показывает, что норма $n$-ой производной функции из класса $V_r^{\gamma,\rho}$ очень быстро убывает при возрастании $n$.

Комбинируя оценки (12) и (18) точно так же, как в случае оценок (11) и (16), приходим к неравенству, содержащему параметр $\gamma \in [0, 1]$ $(r \geqslant e^{\rho-1})$:

$$\|y^{(n)}\|_r^{\wedge} \leqslant n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n\gamma} \left(\frac{\sigma\rho\,(\ln r)^{\rho-1}}{r}\right)^{n\gamma} \exp\,(1-\rho)(1-\gamma)\left(\frac{n^\rho}{\sigma\rho^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \|y\|_r^{\wedge} \cdot \tag{19}$$

3°. В этом параграфе мы рассмотрим банахово пространство $E(k(\theta))$, состоящее из всех тех целых функций $y(z)$, для которых

$$\|y\| = \sup_{\substack{0<r<\infty \\ 0<\theta<2\pi}} \frac{|y(re^{i\theta})|}{\exp(k(\theta)r)} \sup_{|z|<\infty} \Phi(y(z);\, k) < \infty.$$

Здесь $k(\theta)$ — ограниченная тригонометрически выпуклая функция;

$$\Phi\ (y(z);\ k) = \frac{|y(z)|}{\exp(k(\arg z)\,|z|)}\,.$$

Перед тем, как дать оценку $\|y^{(n)}\|$ в $E(k(\theta))$, докажем одну лемму относительно свойств $k(\theta)$.

Лемма. *Для любых комплексных* $z_1$ *и* $z_2$

$$k(\arg z_2)\,|z_2| - k(\arg z_1)\,|z_1| \leqslant k(\arg(z_2 - z_1))\,|z_1 - z_2|. \tag{20}$$

Замечание. Как обычно, $\arg z$ отсчитывается от положительной полуоси против часовой стрелки.

Доказательство леммы. Допустим сначала, что $\arg z_1 - \arg z_2 \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Положим $\theta_2 = \arg z_2$. Проведем из начала координат векторы $\vec{z_1}$ и $\overrightarrow{z_2 - z_1}$ и построим на них параллелограмм. Начало координат будет одной из вершин параллелограмма, а вектор $\vec{z_2}$ — его диагональю, проходящей через начало координат.

Обозначим (арифметический) угол между $\vec{z_1}$ и $\vec{z_2}$ в этом параллелограмме через $\alpha$, а между $\overrightarrow{z_2 - z_1}$ и $\vec{z_2}$ — через $\beta$ (так что угол параллелограмма при вершине, начале координат, равен $\alpha + \beta$). Пусть, далее, $\delta$ — угол между $\vec{z_1}$ и $\vec{z_2}$, отсчитываемый от $\vec{z_1}$ к $\vec{z_2}$ против часовой стрелки. Как предполагалось выше, $\delta \neq \pi$. Положим в случае $\delta > \pi$, $\theta_1 = \theta_2 + \alpha$, $\theta_3 = \theta_2 - \beta$, а в случае $\delta < \pi$ $\theta_1 = \theta_2 - \alpha$, $\theta_3 = \theta_2 + \beta$. Несложные геометрические рассмотрения показывают, что в обоих случаях $\theta_1 \equiv \arg z_1 \pmod{2\pi}$; $\theta_3 \equiv \arg(z_2 - z_1) \pmod{2\pi}$; кроме того, в первом случае $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \theta_1 - \pi$, а во втором — $\theta_3 > \theta_2 > \theta_1 > \theta_3 - \pi$ (учитываем, что $\alpha + \beta < \pi$).

Запишем равенство $(z_2 - z_1) + (z_1 - z_2) = 0$ в эквивалентной форме

$$\begin{cases} |z_2 - z_1| \cos \theta_3 + |z_1| \cos \theta_1 - |z_2| \cos \theta_2 = 0, \\ |z_2 - z_1| \sin \theta_3 + |z_1| \sin \theta_1 - |z_2| \sin \theta_2 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Умножив первое уравнение системы (21) на $\sin \theta_3$ и вычтя второе, умноженное на $\cos \theta_3$, получим

$$\frac{|z_1|}{\sin (\theta_3 - \theta_2)} = \frac{|z_2|}{\sin (\theta_3 - \theta_1)} .$$

Аналогично получим $\dfrac{|z_2|}{\sin (\theta_3 - \theta_1)} = \dfrac{|z_1|}{\sin (\theta_3 - \theta_2)}$, и в итоге

$$\frac{|z_2 - z_1|}{\sin (\theta_2 - \theta_1)} = \frac{|z_2|}{\sin (\theta_3 - \theta_1)} = \frac{|z_1|}{\sin (\theta_3 - \theta_2)} \tag{22}$$

(фактически соотношения (22) выражают теорему синусов для треугольника со сторонами $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_2 - z_1|$).

Рассмотрим для определенности случай, когда $\delta > \pi$ (случай $\delta < \pi$ исследуется совершенно аналогично).

Из условия тригонометрической выпуклости функции $k(\theta)$ (см. 2]) следует, что

$$k(\theta_2) \frac{\sin (\theta_3 - \theta_1)}{\sin (\theta_2 - \theta_1)} + k(\theta_1) \frac{\sin (\theta_2 - \theta_3)}{\sin (\theta_2 - \theta_1)} \leqslant k(\theta_3) .$$

Используя (22) и $2\pi$-периодичность функции $k(\theta)$, приходим к соотношению (20).

Предположим теперь, что $\arg z_1 - \arg z_2 \equiv \pi \pmod{2\pi}$. Тогда $\arg(-z_1) \equiv \arg z_2 \pmod{2\pi}$ и $\arg(z_2 - z_1) = \arg z_2$. Далее, $|z_2 - z_1| = |z_2 + (-z_1)| = |z_2| + |z_1|$.

Требуемое неравенство (20) принимает в этом случае такой вид (полагаем $\theta_2 = \arg z_2$):

$$k(\theta_2)|z_2| - k(\theta_2 + \pi)|z_1| \leqslant k(\theta_2)(|z_2| + |z_1|),$$

что равносильно неравенству $k(\theta_2) + k(\theta_2 + \pi) \geqslant 0$, справедливому для тригонометрически выпуклой функции. Тем самым лемма доказана.

Положим $\sigma = \max\limits_{0 < \theta < 2\pi} k(\theta)$. Если $\sigma = 0$, то $k(\theta) \leqslant 0$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. С другой стороны, как известно (см. [2]) для любого $\theta$ $k(\theta) + k(\theta + \pi) \geqslant 0$. Отсюда $k(\theta) \equiv 0$, если $\sigma = 0$, и $E(k(\theta))$ состоит из констант. Опуская этот тривиальный случай, можно считать, что $\sigma > 0$.

Пусть $y(z) \in E(k(\theta))$. Оценим $\|y^{(m)}(z)\|$, $m \geqslant 1$:

$$\|y^{(m)}(z)\| = \sup_{|z| < \infty} \Phi \left( \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{|t-z| = \frac{m}{\sigma}} y(t)(t - z)^{-m-1}\, dt,\ k \right) \leqslant$$

$$\leqslant \|y(t)\| \frac{m!}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi m}{\sigma}} \left( \frac{\sigma}{m} \right)^{m+1} \sup_{|z| < \infty} \sup_{|t-z| = \frac{m}{\sigma}} \exp \left[ k(\arg t)|t| - k(\arg z)|z| \right] dl \leqslant$$

$$\leqslant \|y(t)\|\, m! \left(\frac{\sigma}{m}\right)^m \sup_{|z|<\infty} \sup_{|t-z|=\frac{m}{\sigma}} k(\arg(t-z))\, |t-z| \leqslant m! \left(\frac{e\sigma}{m}\right)^m \|y\|.$$

Итак, справедлива оценка

$$\|y^{(m)}(z)\| \leqslant m! \left(\frac{e}{m}\right)^m \sigma^m \|y\|,\quad m=1, 2, \cdots. \tag{23}$$

Посмотрим, насколько точны оценки (23). Пусть $\sigma = k(\theta_0)$. Имеем $k(\theta) \geqslant \sigma \cos(\theta-\theta_0)$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$ (см. [2]). Поэтому функция $y_0(z) = \exp\{\sigma e^{-i\theta_0} z\}$ принадлежит $E(k(\theta))$, так как $|y_0(re^{i\theta})| = \exp \sigma \cos(\theta-\theta_0) r \leqslant \exp k(\theta) r$. При этом при $\theta = \theta_0$ $|y_0(re^{i\theta_0})| = \exp \sigma r$, и $\|y_0\|=1$. В то же время $\|y_0^{(m)}(z)\| = \sigma^m \|y_0\| = \sigma^m$ при любом $m \geqslant 1$. Таким образом, оценка (23) тем точнее, чем больше $m$. Если ввести оператор $D^m y = y^{(m)}(z)$, то из только что полученных результатов следуют такие оценки для $\|D^m\| = \sup\limits_{y\in E(k(\theta))} \frac{\|D^m y\|}{\|y\|}$:

$$\sigma^m \leqslant \|D^m\| \leqslant m! \left(\frac{e}{m}\right)^m \sigma^m.$$

Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} \|D^m\|^{\frac{1}{m}} = \sigma = \max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} k(\theta)$.

4°. Полученные выше оценки оказываются полезными при доказательстве существования и единственности целых решений линейных дифференциальных уравнений конечного и бесконечного порядка с многочленными коэффициентами. В качестве примера рассмотрим здесь пространство $W^r_{\sigma,\rho}$. Оценим вначале норму $\|y^{(n)}(z)\, z^k\|^{\sigma,\rho}_r$, $y \in W^r_{\sigma,\rho}$, $0<\rho<1$, считая, что $r \geqslant r_0$, $r>0$, $k \leqslant n(1-\rho)$.

Имеем

$$\|z^k y^{(n)}\|^{\sigma,\rho}_r \leqslant \sup_{t\geqslant r} \frac{t^k M(t, y^{(n)})}{\exp \sigma t^\rho} \leqslant \sup_{t\geqslant r} t^k \|y^{(n)}\|^{\sigma,\rho}_t.$$

Используя оценку (17) и полагая в ней $\gamma = \dfrac{k}{n(1-\rho)}$, получим (учитывая, что $\gamma + \dfrac{1-\gamma}{\rho} = \dfrac{1}{\rho}\left(1-\dfrac{k}{n}\right)$),

$$\|z^k y^{(n)}(z)\|^{\sigma,\rho}_r \leqslant n! \left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}\cdot n\left(1-\frac{k}{n}\right)} \|y\|^{\sigma,\rho}_r.$$

Мы видим, что если $y(z) \in W^r_{\sigma,\rho}$, $r>0$, $\rho<1$ и $k \leqslant n(1-\rho)$, то $z^k y^{(n)}(z) \in W^r_{\sigma,\rho}$.

Рассмотрим оператор

$$Ly = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z)\, y^{(k)}(z),\quad P_k(z) = \sum_{s=0}^{n_k} a^k_s z^s, \tag{24}$$

где

$$\sup_{k>1} \frac{n_k}{k} = \alpha < 1. \tag{25}$$

Допустим, что при некотором $d > 0$

$$F(d) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| k! \left(\frac{e}{k}\right)^{\frac{k-s}{\rho}} d^{\frac{k-s}{\rho}} < \infty, \ \rho = 1 - \alpha.$$

(Например, что заведомо выполняется, если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (c_k)^{\frac{1}{k}} < \infty$, где $c_k = \sup\limits_{0<s<n_k} |a_s^k|$).

Положим $c_0 = \sup\{c>0\colon F(c) < \infty\}$, $\alpha_0 = \lim\limits_{c\to c_0-0} F(c)$.

Если $\alpha_0 > 1$, то уравнение $F(x) = 1$ имеет единственный корень $\eta$ в интервале $(0, c_0)$. Положим $\eta_0 = \eta$, если $\alpha_0 > 1$, и $\eta_0 = c_0$, если $\alpha_0 \leqslant 1$. Тогда при $\forall c < \eta_0$ $F(c) < 1$, и оператор $Ly$ является оператором сжатия в любом пространстве $W^r_{\sigma,\rho}$, где $r > 0$, $\sigma < \frac{\eta_0}{\rho}$.

По теореме Банаха уравнение $y + Ly = f$ имеет единственное решение в таком пространстве $W^r_{\sigma,\rho}$ для любой правой части $f$ из $W^r_{\sigma,\rho}$.

Переходя к индуктивным пределам пространств $W^r_{\sigma,\rho}$ и рассуждая точно так же, как в работе (4), найдем, что уравнение $y + Ly = f$ имеет единственное решение в классе $\left[1-\alpha, \frac{\eta_0}{1-\alpha}\right)$ для любой функции $f$ из этого класса, причем порядок и тип решения совпадает с порядком и типом правой части.

Этот результат имеет непустое пересечение с теоремой 11 из работы [4].

Заметим, что если повторить дословно рассуждения п.п. 1—3 § 3 работы [4], но только вместо оценки (2.2) этой работы воспользоваться более точной оценкой (11) настоящей работы, то мы получим следующий результат:

Пусть оператор $Ly$ (24) удовлетворяет условиям (25) и пусть, далее, $c = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{c_k} < \infty$, где $c_k = \sup\limits_{0<s<n_k} |a_s^k|$. Положим $d_k = |a_{\alpha k}^k|$, если $n_k = \alpha k$, и $d_k = 0$, если $n_k < \alpha k$, и рассмотрим функцию $\lambda(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k d_k x^k$, аналитическую в круге $|x| < \frac{1}{c}$. Положим $\eta_0 = \frac{1}{c}$, если $\lim\limits_{r\to\frac{1}{c}-0} \lambda(r) \leqslant 1$, и $\eta_0 = \theta$, если $\lim\limits_{r\to\frac{1}{c}-0} \lambda(r) > 1$, а $\theta$ — единственный положительный корень уравнения $\lambda(x) = 1$.

Тогда уравнение $y+Ly=f$ имеет единственное решение в классе $\left[1-\alpha, \frac{\gamma_0}{1-\alpha}\right)$ для любой правой части $f$ из этого класса, причем порядки и типы решения в правой части совпадают. Решение может быть приближенно найдено методом урезания, описанным в [4].

Этот результат является более сильным, чем теорема 2.2 из [4], но, в свою очередь, содержится в недавнем результате Ю. Ф. Коробейника и О. В. Епифанова [5], полученном методами теории нормально разрешимых операторов (именно, в теореме 4.9 этой работы).

Если вместо оценок (11) и (17) использовать оценки (12), (19) и (23), то можно получить новые теоремы существования и единственности решения уравнения бесконечного порядка с многочленными коэффициентами в пространствах $V_r^{\gamma,\rho}$, $E(k(\theta))$, а также в индуктивных пределах этих пространств.

Систематическому изложению полученных в этом направлении результатов и переносу на случай $n$ переменных оценок, полученных в настоящей работе, и их приложений, предполагается посвятить отдельную статью.

Ростовский государственный
университет

Поступила 25.III.1972

ՅՈՒ. Ֆ. ԿՈՐՈԲԵՅՆԻԿ, Օ. Վ. ԵՊԻՖԱՆՈՎ. Ածանցյալների գնահատականները ամբողջ ֆունկցիաների կշռային տարածություններում *(ամփոփում)*

*Հոդվածում դիտարկվում են դիֆերենցման նկատմամբ ինվարիանտ, ամբողջ ֆունկցիաների կշռային Բանախի տարածություններ՝* $\|y\| = \sup\limits_{r>0} \frac{M_r(y)}{\varphi(r)}$ *նորմայով և էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների տարածություններ՝* $\|y\| = \sup\limits_{r,\theta} |y(re^{i\theta})| \exp(-k(\theta) r)$ *նորմայով։*

*Կշռային ֆունկցիաների նկատմամբ բավականին ընդհանուր բնույթի տարբեր ենթադրությունների դեպքում գտնվում են դիտարկվող տարածություններից վերցված կամայական ֆունկցիայի ածանցյալների նորմերի գնահատականները՝ ֆունկցիայի նորմի միջոցով։*

*Ցույց է տրվում, որ մի շարք դեպքերում ստացված գնահատականները ճշգրիտ են։*

Ju. F. KOROBEINIK, O. V. EPIFANOV. *Estimation of derivatives in weighted spaces of entire functions* (summary)

This article investigates weighted ($B$)-spaces of entire functions invariant with respect to differentiation and having the norm $\|y\| = \sup\limits_{r>0} \frac{M_r(y)}{\varphi(r)}$, as well as ($B$)-spaces of exponential functions with the norm

$$\|y\| = \sup_{r,\theta} |y(re^{i\theta})| \exp(-k(\theta) r).$$

Under rather general restrictions on weighting function the authors estimate the norm of all derivatives of any function belonging to the spaces, in terms of the norm of the function itself. It is shown that in some cases the estimates obtained are exact.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ж. Валирон.* Аналитические функции, ГИТТА, М., 1957.
2. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, ГИТТА, М., 1956.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, изд. „Наука“, М., 1966.
4. *Ю. Ф. Коробейник.* О целых решениях дифференциального уравнения бесконечного порядка, Литовский матем. сб., 4, № 2, 1964, 203—227.
5. *Ю. Ф. Коробейник, О. В. Епифанов.* Нормальная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений бесконечного порядка, Матем. сб., 84, 126, № 3, 1971, 378—405.