ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

Ф. И. ГЕЧЕ, А. И. КУРЕЙ

О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Исследуется вопрос существования и единственности целых решений дифференциального уравнения

$$w + Lw = w + \sum_{n_1+n_2=1}^{\infty} P_{n_1 n_2}(z_1, z_2) \frac{\partial^{n_1+n_2} w}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}} = f(z_1, z_2), \qquad (1)$$

где $P_{n_1 n_2}(z_1, z_2)$ — полиномы, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, $f(z_1, z_2)$ — известная целая функция конечной степени. Увеличение числа независимых переменных не приводит к существенным изменениям.

Для обыкновенного дифференциального уравнения бесконечного порядка аналогичный вопрос был изучен Ю. Ф. Коробейником [1]. Существование и единственность решения уравнения (1) доказывается с помощью принципа сжатых отображений, следуя работе [1]. Доказанные нами теоремы включают в себя также результаты Ю. Ф. Коробейника с определенными уточнениями.

С. А. Еремин [2] рассматривал уравнение вида (1) с постоянными коэффициентами и при некоторых дополнительных условиях доказал теорему о существовании и единственности решения в определенном классе целых функций. С. А. Еремин использовал метод А. О. Гельфонда [3].

В работе существенно используются понятия систем сопряженных порядков и типов целых функций двух переменных, введенные для функций класса А М. М. Джрбашяном [4] (см. подробнее историю вопроса в [5]).

§ 1. Некоторые вспомогательные результаты

1.1. Пусть $f(z_1, z_2) \not\equiv \text{const}$ — целая функция. Введем обозначение

$$M(f;\ r_1,\ r_2) = \max_{|z_1|=r_1,\ |z_2|=r_2} |f(z_1, z_2)|. \qquad (1.1)$$

Напомним некоторые определения (см. [4]) в нужной нам форме.

Система неотрицательных чисел (ρ_1, ρ_2) называется системой сопряженных порядкоз (с.с.п.) функции $f(z_1, z_2)$, если при любом $\varepsilon > 0$ имеет место асимптотическое относительно $r_1 + r_2$ неравенство

$$\ln M(f;\ r_1,\ r_2) \leqslant r_1^{\rho_1+\varepsilon} + r_2^{\rho_2+\varepsilon}, \qquad (1.2)$$

а с другой стороны, на некоторой последовательности $\{(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})\}$ $(r_1^{(k)}+r_2^{(k)}\to\infty)$ при некоторой постоянной $\delta>0$ выполняются неравенства

$$\ln M(f;\ r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})>\delta\,[(r_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon}+(r_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon}],\ k=1,\ 2,\cdots. \tag{1.3}$$

Если $\rho_1=\rho_2=0$, то функция $f(z_1,\ z_2)$ называется функцией нулевого порядка.

Пусть $(\rho_1,\ \rho_2)$ $(\rho_1>0,\ \rho_2>0)$—некоторая с.с.п. функции $f(z_1,\ z_2)$. Система неотрицательных чисел $(\sigma_1,\ \sigma_2)$ называется системой сопряженных типов (с.с.т.) при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$, если при любом $\varepsilon>0$ выполняется, с одной стороны, асимптотическое относительно r_1+r_2 неравенство

$$\ln M(f;\ r_1,\ r_2)\leqslant(\sigma_1+\varepsilon)\,r_1^{\rho_1}+(\sigma_2+\varepsilon)\,r_2^{\rho_2}, \tag{1.4}$$

а с другой стороны, на некоторой последовательности $\{(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})\}$ $(r_1^{(k)}+r_2^{(k)}\to\infty)$ имеют место неравенства

$$\ln M(f;\ r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})>(\sigma_1-\varepsilon)(r_1^{(k)})^{\rho_1}+(\sigma_2-\varepsilon)(r_2^{(k)})^{\rho_2},\ k=1,\ 2,\cdots. \tag{1.5}$$

Если (0, 0) является с.с.т. при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$ функции $f(z_1,\ z_2)$, то $f(z_1,\ z_2)$ называется функцией нулевого типа при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$. Если не существует такой системы чисел $(\sigma_1,\ \sigma_2)$, для которой имело бы место неравенство (1.4), то считаем, что $(\infty,\ \infty)$ является с.с.т. при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$ функции $f(z_1,\ z_2)$. В этом случае $f(z_1,\ z_2)$ называется функцией бесконечного типа при с.с.п. (ρ_1, ρ_2).

Далее считаем, что $(\sigma_1,\ \infty)$ является с.с.т. функции $f(z_1,\ z_2)$ при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$, если: 1) при любом достаточно малом $\varepsilon>0$ существует положительное число $\sigma_2=\sigma_2(\varepsilon)$, такое, что имеет место асимптотическое неравенство (1.4); 2) на некоторой последовательности $\{(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})\}$ имеют место неравенства (1.5), какое бы ни было $\sigma_2>0$. Аналогично определяется с.с.т. $(\infty,\ \sigma_2)$.

Замечание. В неравенствах (1.2)—(1.5) переменные $(r_1,\ r_2)$, а также $(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})$ выбираются в множестве $R_+^2=\{(r_1,\ r_2)\colon r_1>0,\ r_2>0\}$. Однако определения с.с.п. и с.с.т. можно видоизменять, заменяя R_+^2 на множество $Q_{R_1R_2}=\{(r_1,\ r_2)\colon r_1\geqslant R_1,\ r_2>R_2\}$; $R_1,\ R_2>0$. При этом получаются определения с.с.п. и с.с.т., эквивалентные предыдущим.

Действительно, пусть $(\rho_1,\ \rho_2)$ — с.с.п. функции $f(z_1,\ z_2)$. Тогда выполняется асимптотическое неравенство (1.2) при $(r_1,\ r_2)\in R_+^2$, и тем более оно справедливо при $(r_1,\ r_2)\in Q_{R_1R_2}$.

Пусть неравенства (1.3) имеют место на последовательности $\{(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})\}$ $(r_2^{(k)}+r_1^{(k)}\to\infty)$. Обозначим через $\overline{r}_i^{(k)}=\max(r_i^{(k)},\ R_i)$, $i=1,\ 2$. Очевидно, $\overline{r}_1^{(k)}+\overline{r}_2^{(k)}\to\infty$, и при некотором $\delta_1=\delta_1(\delta)>0$ имеют место неравенства

$$\ln M(f; \bar{r}_1^{(k)}, \bar{r}_2^{(k)}) \geqslant \ln M(f; r_1^{(k)}, r_2^{(k)}) > \delta\,[(r_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon} + \\ + (r_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon}] \geqslant \delta_1\ [(\bar{r}_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon} + (\bar{r}_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon}],\ k = 1, 2, \cdots$$

(если $\rho_1 - \varepsilon > 0$, $\rho_2 - \varepsilon > 0$, то $(r_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon} + (r_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon} \sim (\bar{r}_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon} + (\bar{r}_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon}$ при $k \to \infty$).

Следовательно, (ρ_1, ρ_2) является с.с.п. функции $f(z_1, z_2)$ в смысле видоизмененного определения.

Обратно, пусть выполняется асимптотическое относительно $r_1 + r_2$ неравенство (1.2) при $(r_1, r_2) \in Q_{R_1R_2}$. Пусть, далее, $(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \in R_+^2$ и $r_i = \max(\tilde{r}_i, R_i)$, $i = 1, 2$. Тогда при достаточно больших $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$ имеют место неравенства

$$\ln M(f; \tilde{r}_1, \bar{r}_2) \leqslant \ln M(f; r_1, r_2) \leqslant r_1^{\rho_1+\varepsilon} + r_2^{\rho_2+\varepsilon} \leqslant \bar{r}_1^{\rho_1+2\varepsilon} + \bar{r}_2^{\rho_2+2\varepsilon}.$$

Условие (1.3) не меняется при переходе от $Q_{R_1R_2}$ к R_+^2. Следовательно, (ρ_1, ρ_2) будет с.с.п. функции $f(z_1, z_2)$ в смысле исходного определения.

Утверждение относительно с.с.т. доказывается аналогично.

Пусть $0 < \rho_1 < \infty$, $0 < \rho_2 < \infty$, $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \infty$, $0 \leqslant \sigma_2 \leqslant \infty$ — произвольные числа. Обозначим через $E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ класс целых функций $f(z_1, z_2)$, для которых существуют с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f) и с.с.т. (σ_1^f, σ_2^f) при с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f) удовлетворяющие условиям*: $\rho_i^f \leqslant \rho_i$, $i = 1, 2$, причем равенство $\rho_j^f = \rho_j$ возможно только при условии, что $\sigma_j > 0$ и тогда $\sigma_j^f < \sigma_j$. Если $\rho_j^f < \rho_j$, то σ_j^f произвольно. Индекс j здесь может принимать одно из значений 1, 2 или оба значения.

Далее, через $E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2]$ обозначим класс целых функций $f(z_1, z_2)$, для которых существуют с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f) и с.с.т. (σ_1^f, σ_2^f) при с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f), такие, что $\rho_i^f \leqslant \rho_i$, $i = 1, 2$, а σ_i^f — любое, если $\rho_i^f < \rho_i$, и $\sigma_i^f \leqslant \sigma_i$, если $\rho_i^f = \rho_i$ $(i = 1, 2)$**.

1. 2. Приведем формулировку одной теоремы, которая является двумерным аналогом теоремы 2.2 из [1] и доказывается таким же методом.

Пусть каждой точке (μ, ν) из открытого прямоугольника (конечного или бесконечного) $(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$, лежащего в квадранте R_+^2, ставится в соответствие B-пространство $J_{\mu\nu}$, причем

$$J_{\mu_1\nu_1} \subset J_{\mu_2\nu_2}, \text{ если } \mu_1 < \mu_2,\ \nu_1 \leqslant \nu_2. \tag{1.6}$$

Нормы $\|\cdot\|_{\mu\nu}$ в пространствах $J_{\mu\nu}$ предполагаются согласованными так, что если $\|x_n - x\|_{\mu_1\nu_1} \to 0$ и $\mu_1 \leqslant \mu_2$, $\nu_1 \leqslant \nu_2$, то подавно $\|x_n - x\|_{\mu_2\nu_2} \to 0$ $(x_n, x \in J_{\mu_1\nu_1})$.

---

* Предполагается, что функции нулевого порядка также входят в $E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$.

** В $E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2]$ содержатся также функции порядка нуль.

Рассмотрим множество

$$A = \bigcup_{\substack{\alpha_1 < \mu < \beta_1 \\ \alpha_2 < \nu < \beta_2}} J_{\mu\nu},$$

которое легко превратить в топологическое пространство (индукти
ный предел B-пространств).

Для произвольного $x \in A$ введем обозначение

$$\tilde{\varphi}_x(\nu) = \inf_{x \in J_{\mu\nu}} \mu, \quad \tilde{\psi}_x(\mu) = \inf_{x \in J_{\mu\nu}} \nu, \ (\mu, \nu) \in (\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2).$$

При любом фиксированном $x \in A$ функции $\tilde{\varphi}_x(\nu)$ и $\tilde{\psi}_x(\mu)$, ка
функции переменных $\nu \in (\alpha_2, \beta_2)$ и соответственно $\mu \in (\alpha_1, \beta_1)$, монотонн
убывающие.

Действительно, если, например, $\alpha_2 < \nu_1 < \nu_2 < \beta_2$, то в силу усл
вия (1.6) $x \in J_{\mu\nu}$, при всех $(\mu, \nu) \in (\tilde{\varphi}_x(\nu_1), \beta_1; \nu_1, \beta_2)$, следовательн
$x \in J_{\mu\nu_2}$, если $\mu > \tilde{\varphi}_x(\nu_1)$. Поэтому $\tilde{\varphi}_x(\nu_2) \leqslant \tilde{\varphi}_x(\nu_1)$. В силу сказанног
корректно следующее определение:

$$\varphi_x(\nu) \overset{df}{=} \lim_{\nu' \to \nu+} \tilde{\varphi}_x(\nu'), \ \psi_x(\mu) \overset{df}{=} \lim_{\mu' \to \mu+} \tilde{\psi}_x(\mu').$$

Теорема 1. *Пусть оператор L отображает пространств
A в себя. Предположим, что существует множество S, плотно
в $(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$, такое, что при всех $(\mu, \nu) \in S$ оператор L взаимн
однозначно отображает $J_{\mu\nu}$ на $J_{\mu\nu}$. Тогда L взаимно однозначн
отображает A на A, причем $\varphi_{Lx}(\nu) = \varphi_x(\nu)$ и $\psi_{Lx}(\mu) = \psi_x(\mu)$ дл
всех (μ, ν).*

Доказательство. В силу условия (1.6), так же как и
работе [1], легко доказать, что оператор L отображает A на A вза
имно однозначно.

Пусть $x \in A$ и $y = Lx$ (x и y одновременно пробегают все про
странство A). Пусть $\varphi_y(\nu_0) = a$. Из определения $\varphi_y(\nu)$ следует, чт
$y \in J_{\mu\nu}$, как только $(\mu, \nu) \in (a, \beta_1; \nu_0, \beta_2)$. Пусть $(\mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon)$ — точка из не
пустого множества $S \cap (a, a + \varepsilon; \nu_0, \nu_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тогда $y \in J_{\mu_\varepsilon \nu_\varepsilon}$ и п
предположению теоремы $x \in J_{\mu_\varepsilon \nu_\varepsilon}$ и $Ly \in J_{\mu_\varepsilon \nu_\varepsilon}$. Следовательно

$$\varphi_x(\nu_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \tilde{\varphi}_x(\nu_\varepsilon) \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0+} \mu_\varepsilon = a = \varphi_{Lx}(\nu_0),$$

и точно так же $\varphi_{Ly}(\nu_0) \leqslant a = \varphi_y(\nu_0)$. В силу произвольности x, а вме
сте с тем и y, $\varphi_x(\nu_0) = \varphi_{Lx}(\nu_0)$. Равенство $\psi_x(\mu) = \psi_{Lx}(\nu_0)$ доказываетс
аналогично.

1.3. Через $W = W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ будем обозначать линейное нор
мированное пространство целых функций $w(z_1, z_2)$, таких, что

$$\sup_{r_1 > R_{10},\ r_2 > R_{20}} M(w; r_1, r_2) \exp[-(\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2})] \overset{df}{=} \|w\| < \infty,$$

где R_{10}, R_{20} — некоторые положительные постоянные, $0<\rho, \rho_2<1$, $0<\sigma_1, \sigma_2<\infty$.

Корректность определения пространства W очевидна.

Не представляет труда доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Пространство* $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ — *банахово.*

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$E(r_1, r_2)=E_1(r_1)\,E_2(r_2),\quad E_i(r_i)=\exp(\sigma_i r_i^{\rho_i}),\ i=1,2. \tag{1.7}$$

Лемма 2. *Пусть* $f(z_1, z_3)$ — *целая функция из класса*

$E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$, $0<\rho_i<\infty$, $0<\sigma_i<\infty$, $i=1, 2$. *Если*

$$f(z_1, z_2)=\sum_{l,j=0}^{\infty} b_{lj} z_1^l z_2^j,\quad f_k(z_1, z_2)=\sum_{0<l+j<k} b_{lj} z_1^l, z_2^j,$$

то $f_k(z_1, z_2)$ *и* $f(z_1, z_2)$ *принадлежат пространству*

$W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ *и* $f_k(z_1, z_2)\to f(z_1, z_2)$ *при* $k\to\infty$

в метрике этого пространства.

Доказательство. Из условия $f(z_1, z_2)\in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ следует, что при некотором θ $(\theta>1)$

$$f(z_1, z_2)\in W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1', \sigma_2'),\quad \text{где } \sigma_i'=\sigma_i\theta^{-\rho_i},\ i=1, 2.$$

Отсюда, как и в работе [1], легко получить неравенство

$$M(f; \theta t_1, \theta t_2)[E(t_1, t_2)]^{-1}\leqslant C,\quad C=\text{const}.$$

Используя неравенства Коши, найдем следующую оценку:

$$M(f-f_k; t_1, t_2)[E(t_1, t_2)]^{-1}\leqslant[E(t_1, t_3)]^{-1}\sum_{l+j=k+1}^{\infty}|b_{lj}|\,t_1^l t_2^j\leqslant$$

$$\leqslant[E(t_1, t_2)]^{-1}M(f; \theta t_1, \theta t_2)\sum_{l+j=k+1}^{\infty}\theta^{-l-j}\leqslant C\eta_k(\theta), \tag{1.8}$$

где $\eta_k(\theta)=\sum\limits_{l+j=k+1}^{\infty}\theta^{-l-j}\to 0$ при $k\to\infty$. Переходя к точной верхней грани в неравенствах (1.8), придем к неравенству $\|f-f_k\|\leqslant C\eta_k(\theta)$, откуда следует $\|f-f_k\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ (по норме пространства $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$). Лемма доказана.

Будем пользоваться также обозначением

$$\|w\|_r=\|w\|_{(r_1, r_2)}=\sup_{t_1>r_1,\ t_2>r_2}\{M(w; t_1, t_2)\exp[-(\sigma_1 t_1^{\rho_1}+\sigma_2 t_2^{\rho_2})]\}.$$

Очевидно, при любых $h_1, h_2>0$

$$\|w\|_{(r_1+h_1,\ r_2+h_2)}\leqslant\|w\|_{(r_1+h_1,\ r_2)}\leqslant\|w\|_{(r_1,\ r_2)}=\|w\|_r,$$

$$\|w\|_{(r_1+h_1,\ r_2+h_2)}\leqslant\|w\|_{(r_1,\ r_2+h_2)}\leqslant\|w\|_{(r_1,\ r_2)}=\|w\|_r.$$

1.4. Пусть $w(z_1, z_2)\in W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$. Найдем оценку выражения $\|w^{(m,n)}\|_{(r_1, r_2)}$, где для простоты положено

$$w^{(n_1, n_2)} = \frac{\partial^{n_1+n_2} w(z_1, z_2)}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}}, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots.$$

Пусть $M(w^{n_1, n_2}; r_1, r_2) = |w^{(n_1, n_2)}(z_1^0, z_2^0)|$, $|z_i^0| = r_i > R_{i0}$, $i=1, 2$.

С помощью интегральной формулы Коши, записанной по осто бицилиндра $\{|z_1 - z_1^0| \leqslant h_1, |z_2 - z_2^0| \leqslant h_2\}$, легко получаем неравенства

$$\begin{aligned} M(w^{(n_1, n_2)}; r_1, r_2) &\leqslant n_1!\, n_2!\, h_1^{-n_1} h_2^{-n_2} M(w; r_1+h_1, r_2+h_2) \leqslant \\ &\leqslant n_1!\, n_2!\, h_1^{-n_1} h_2^{-n_2} \|w\|_{(r_1+h_1, r_2+h_2)} E(r_1+h_1, r_2+h_2) \leqslant \qquad (1. \\ &\leqslant \|w\|_r \Pi\, n_i!\, h_i^{-h_i} E_i(r_i + h_i). \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем знак умножения Π распространяется на значения из $i=1, 2$, для которых $n_i \neq 0$.

Функция $\eta(h) = h^{-k} \exp \sigma (r+h)^\rho$, $k=1, 2, \cdots$, определенная интервале $(0, \infty)$, принимает наименьшее значение в единственн точке h_k, удовлетворяющей уравнению

$$\rho\sigma (r+h)^{\rho-1} h = k, \text{ или же } \sigma(r+h)^\rho = \frac{k}{\rho}\left(1+\frac{r}{h}\right).$$

Очевидно, при $\rho \leqslant 1$

$$h_k = \frac{k}{\rho\sigma}(r+h_k)^{1-\rho} > \frac{k}{\rho\sigma} r^{1-\rho}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{h_k} = \frac{\sigma\rho}{k}(r+h_k)^{\rho-1} < \frac{\sigma\rho r^{\rho-1}}{k}\left(1+\frac{k}{\rho\sigma r^\rho}\right)^{\rho-1} \qquad (1.1$$

и, следовательно

$$\begin{aligned} \sigma(r+h_k)^\rho &= \frac{k}{\rho}\left(1+\frac{r}{h_k}\right) \leqslant \frac{k}{\rho}\left[1+\frac{\sigma\rho r^\rho}{k}\left(1+\frac{k}{\rho\sigma r^\rho}\right)^{\rho-1}\right] = \\ &= \frac{k}{\rho} + \sigma r^\rho \left[1 + \frac{(\rho-1)k}{\rho\sigma r^\rho} + \frac{(1-\rho)(2-\rho)}{2}\left(1+\frac{\theta k}{\rho\sigma r^\rho}\right)^{\rho-3}\left(\frac{k}{\sigma\rho r^\rho}\right)^2\right] = \\ &= \sigma r^\rho + k + \frac{(1-\rho)(2-\rho)\sigma r^\rho}{2}\left(\frac{k}{\sigma\rho r^\rho + \theta k}\right)^2\left(1+\frac{\theta k}{\sigma\rho r^\rho}\right)^{\rho-1} \leqslant \\ &\leqslant \sigma r^\rho + k + \frac{(1-\rho)(2-\rho)k^2}{2\rho^2\sigma r^\rho} = \sigma r^\rho + k + k\omega(k, r), \qquad (1.1 \end{aligned}$$

$$\omega(k, r) = \frac{(1-\rho)(2-\rho)k}{2\rho^2\sigma r^\rho}.$$

Учитывая неравенства (1.10), (1.11), получаем

$$\eta(h_k) = h_k^{-k} \exp \frac{k}{\rho}\left(1+\frac{r}{h_k}\right) \leqslant (\sigma\rho)^k k^{-k} r^{k(\rho-1)} e^{k+\sigma r^\rho + k\omega(k,r)}. \qquad (1.1$$

В силу оценки (1.12), можем написать

$$\min_{0<h_1,\, h_2<\infty} \Pi\, h_i^{-n_i} E_i(r_i+h_i) \leqslant$$

$$\leqslant \Pi\,(\sigma_i\rho_i)^{n_i}\, n_i^{-n_i}\, r_i^{n_i(\rho_i-1)}\, e^{n_i}\, e^{n_i\omega_i(n_i,\, r_i)}\, E_i(r_i), \tag{1.13}$$

где

$$\omega_i(n_i,\, r_i)=\frac{(1-\rho_i)(2-\rho_i)\, n_i}{2\rho_i^2\sigma_i r_i^{\rho_i}},\ i=1,\ 2.$$

Пользуясь формулой Стирлинга, из (1.9) и (1.13) получаем

$$M\,(w^{(n_1,\, n_2)};\ r_1,\ r_2)\leqslant\|w\|_r\,\Pi\,\Omega_i(n_i)\,(\sigma_i\rho_i)^{n_i}\, r_i^{n_i(\rho_i-1)}\, E_i(r_i), \tag{1.14}$$

где

$$\Omega_i(n_i)=\sqrt{2\pi n_i}\ \exp n_i\left[\frac{1}{12\, n_i^2}+\omega_i(n_i,\, r_i)\right]=$$

$$=\exp n_i\left[\frac{1}{12\, n_i^2}+\frac{\ln\sqrt{2\pi n_i}}{n_i}+\omega_i(n_i,\, r_i)\right].$$

Выберем число N настолько большим, чтобы $\frac{1}{12\,N}+\frac{\ln\sqrt{4\pi N}}{N}\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ — произвольное фиксированное число. Далее, пусть $R_\varepsilon>1$ настолько большое, что

$$\omega_i(2\,N,\, R_\varepsilon)=\frac{(1-\rho_i)(2-\rho_i)\,2N}{2\rho_i^2\sigma_i R_\varepsilon^{\rho_i}}\leqslant\frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon),\ i=1,\ 2.$$

Если $0<n_1,\ n_2\leqslant N$ и $r_1,\ r_2>R_\varepsilon$, то справедливы неравенства

$$\Omega_i(N+n_i)\leqslant\exp\left\{(N+n_i)\left[\frac{1}{12\,N^2}+\frac{\ln\sqrt{4\pi N}}{N}+\omega_i(2\,N,\, R_\varepsilon)\right]\right\}<$$

$$<\varepsilon^{\frac{N+n_i}{2}},\ i=1,\ 2,$$

$$\Omega_i(n_i)\leqslant\exp\left\{N\left[\frac{1}{12\,n_i N}+\frac{\ln\sqrt{2\pi N}}{N}+\omega_i(N,\, R_\varepsilon)\right]\right\}<\varepsilon^{N/2},\ i=1,\ 2.$$

Учитывая эти оценки и используя обозначение

$$H_1(\varepsilon)=\max_{\substack{1<n_1,\ n_2<N\\ r_1=r_2=R_\varepsilon}}\Omega_1(n_1)\,\Omega_2(n_2),$$

из неравенства (1,14) получим следующие оценки ($r_1,\ r_2>R_\varepsilon,\ 0\leqslant$ $\leqslant n_1,\ n_2<N$):

$$\|w^{(n_1,\, n_2)}\|_r\leqslant H_1(\varepsilon)\|w\|_r\,\Pi\,(\sigma_i\rho_i)^{n_i}\, r_i^{n_i(\rho_i-1)},\quad \|w^{(N+n_1,\, n_2)}\|_r\leqslant \tag{1.15}$$

$$\leqslant\|w\|_r\,(1+\varepsilon)^{N+n_1+n_2}\,(\sigma_1\rho_1)^{N+n_1}\,(\sigma_2\rho_2)^{n_2}\, r_1^{(N+n)(\rho_1-1)}\, r_2^{n_2(\rho_2-1)} \tag{1.16}$$

$$\|w^{(n_1,\, N+n_2)}\|_r\leqslant\|w\|_r\,(1+\varepsilon)^{N+n_1+n_2}\,(\sigma_1\rho_1)^{n_1}\,(\sigma_2\rho_2)^{N+n_2}\, r_1^{n_1(\rho_1-1)}\, r_2^{(N+n_2)(\rho_2-1)}. \tag{1.17}$$

Применяя повторно неравенства (1.16) и (1.17), получим оценки при любых $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots, n_1 + n_2 \geqslant N = N(\varepsilon)$:

$$\|w^{(n_1, n_2)}\|_r \leqslant \|w\|_r \Pi (1+\varepsilon)^{n_i} (\sigma_i \rho_i)^{n_i} r_i^{n_i(\rho_i - 1)}, \tag{1.18}$$

где $\varepsilon > 0$—произвольно малое, а $r_1, r_2 \geqslant R_\varepsilon$.

Действительно, если $n_1 = k_1 N + p_1$, $n_2 = k_2 N + p_2$, где k_1, k_2 — натуральные числа, $0 \leqslant p_1, p_2 < N$, то, обозначая через λ_i выражение $\sigma_i \rho_i r_i^{\rho_i - 1}$, $i = 1, 2$, можем написать

$$\begin{gathered}
\|w^{(n_1, n_2)}\|_r \leqslant \|w^{((k_1-1)N, n_2)}\|_r (1+\varepsilon)^{N+p_1} \lambda_1^{N+p_1} \leqslant \\
\leqslant \|w^{((k_1-2)N, n_2)}\|_r (1+\varepsilon)^{2N+p_1} \lambda_1^{2N+p_1} \leqslant \cdots \leqslant \\
\leqslant \|w^{(0, n_2)}\|_r (1+\varepsilon)^{n_1} \lambda_1^{n_1} \leqslant \|w^{(0, (k_2-1)N)}\|_r (1+ \\
+\varepsilon)^{n_1+N+p_2} \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{N+p_2} \leqslant \cdots \leqslant \|w^{(0, N)}\|_r (1+ \\
+\varepsilon)^{n_1+(k_2-1)N+p_2} \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{(k_2-1)N+p_2} \leqslant \|w\|_r (1+\varepsilon)^{n_1+n_2} \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2}.
\end{gathered}$$

Заметим, что оценка (1.18) точнее соответствующей оценки из [1]. Неравенства (1.15) и (1.18) будут играть основную роль при оценке нормы оператора L.

§ 2. Теорема существования и единственности решения уравнения (1)

2.1. Ставится задача: доказать существование и единственность решения уравнения (1) в определенном классе целых функций, если коэффициенты уравнения (1)

$$P_{n_1 n_2}(z_1, z_2) = \sum_{i_1=0}^{k_{n_1 n_2}^{(1)}} \sum_{i_2=0}^{k_{n_1 n_2}^{(2)}} a_{i_1 i_2}^{n_1 n_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \tag{2.1}$$

удовлетворяют условиям:

а)
$$\sup_{\substack{n_i > 1 \\ n_j > 0}} \frac{k_{n_1 n_2}^{(i)}}{n_i} = \alpha_i < 1; \; i, j = 1, 2; \; i \neq j,$$

$$k_{0 n_2}^{(1)} = k_{n_1 0}^{(2)} = 0, \; n_1, n_2 = 1, 2, \cdots; \tag{2.2}$$

б) ряд

$$\sum_{n_1+n_2=0}^{\infty} P_{n_1 n_2}(z_1, z_2) z_3^{n_1} z_4^{n_2}, \tag{2.3}$$

рассматриваемый как 4-кратный степенной ряд, сходится в окрестности начала координат пространства C^4 комплексных переменных z_1, z_2, z_3, z_4.

Условия а) и б) эквивалентны условиям а) и б$_1$), где под условием б$_1$) понимаем абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n_1+n_2=0}^{\infty} P_{n_1n_2}(z_1, z_2)\, z_1^{n_1} z_2^{n_2} \tag{2.4}$$

в некоторой окрестности начала координат пространства C^2 переменных z_1, z_2.

Действительно, из условия б), очевидно, следует условие б$_1$). Наоборот, пусть ряд (2.4) абсолютно и равномерно сходится при $|z_1| = |z_2| = r < 1$. Тогда

$$\overline{\lim_{n_1+n_2\to\infty}} \sqrt[n_1+n_2]{|P_{n_1n_2}(z_1, z_2)|} \leqslant \frac{1}{r}$$

равномерно относительно z_1, z_2, когда $|z_1|=|z_2|=r$. В силу условия а) и неравенства Коши при $n_1+n_2>N=N(\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$) выполняются неравенства

$$|a^{n_1n_2}_{l_1l_2}|\, r^{\alpha_1 n_1+\alpha_2 n_2} \leqslant |a^{n_1n_2}_{l_1l_2}|\, r^{l_1+l_2} \leqslant M(P_{n_1n_2}; r, r) < \left(\frac{1+\varepsilon}{r}\right)^{n_1+n_2}.$$

Следовательно

$$|a^{n_1n_2}_{l_1l_2}| < \left(\frac{1+\varepsilon}{r^2}\right)^{n_1+n_2} \tag{2.5}$$

и тем более выполняются неравенства

$$\sqrt[n_1+n_2+l_1+l_2]{|a^{n_1n_2}_{l_1l_2}|} < \frac{1+\varepsilon}{r^2},\ 0\leqslant i_j \leqslant k^{(j)}_{n_1n_2},\ j=1, 2;\ n_1+n_2>N.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что ряд (2.3) сходится в полукруге $\{|z_i|<r^2,\ i=1, 2, 3, 4\}$, и наше утверждение доказано.

2.2. Используя условия а) и б), выведем оценку для коэффициентов (2.1) уравнения (1). Введем обозначения

$$c_{n_1n_2} = \max_{0<i_j<k^{(j)}_{n_1n_2}} |a^{n_1n_2}_{i_1i_2}|,\ n_1, n_2=0, 1, 2, \cdots;\ n_1+n_2>0.$$

Из неравенства (2.5) заключаем, что $c_{n_1n_2} < \left(\frac{1+\varepsilon}{r^2}\right)^{n_1+n_2}$, как только $n_1+n_2>N$. Следовательно, ряд

$$\sum_{n_1+n_2=1}^{\infty} c_{n_1n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \tag{2.6}$$

имеет непустую область сходимости.

Обозначим через Γ кривую сопряженных радиусов сходимости ряда (2.6). Пусть $(\gamma_1, \gamma_2)\in\Gamma$, т. е.

$$\overline{\lim_{n_1+n_2\to\infty}} \sqrt[n_1+n_2]{c_{n_1n_2}\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2}} = 1.$$

Тогда, очевидно, какое бы ни было фиксированное $\varepsilon>0$

$$H_2(\varepsilon) = H_2(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2) = \sup_{n_1+n_2>0} \left\{ c_{n_1 n_2} \left(\frac{\gamma_1}{1+\varepsilon}\right)^{n_1} \left(\frac{\gamma_2}{1+\varepsilon}\right)^{n_2} \right\} < \infty.$$

Если кривая Г содержит несколько точек с одинаковой перво (второй) координатой, то число γ_2 (число γ_1) естественно выбирать п возможности наибольшим. Если же Г является лучом, параллельны первой (второй) координатной оси, то под γ_1 (под γ_2) будем понимат как угодно большое, но конечное число.

Аналогично, в случае, когда ряд (2.6) сходится во всем про странстве C^2, под γ_1 и γ_2 будем понимать как угодно большие, н конечные числа. Следовательно, при любых n_1 и n_2 $(n_1 + n_2 > 0)$ выполняются неравенства

$$c_{n_1 n_2} \leqslant H_2(\varepsilon) \left(\frac{1+\varepsilon}{\gamma_1}\right)^{n_1} \left(\frac{1+\varepsilon}{\gamma_2}\right)^{n_2},$$

и если $|z_1| = r_1 > 1$, $|z_2| = r_2 > 1$, то

$$|P_{n_1 n_2}(z_1, z_2)| \leqslant c_{n_1 n_2} r_1^{k^{(1)}_{n_1 n_2}} r_2^{k^{(2)}_{n_1 n_2}} (k^{(1)}_{n_1 n_2}+1)(k^{(2)}_{n_1 n_2}+1) \leqslant$$

$$\leqslant H_2(\varepsilon) \Pi \left(\frac{1+\varepsilon}{\gamma_i}\right)^{n_i} r_i^{k^{(i)}_{n_1 n_2}} (k^{(i)}_{n_1 n_2} + 1). \tag{2.7}$$

2.3. Перейдем теперь к исследованию оператора L:

$$Lw \overset{df}{=} \sum_{n_1+n_2 \geq 1} P_{n_1 n_2}(z_1, z_2)\, w^{(n_1, n_2)}(z_1, z_2)$$

в пространстве $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$.

Предположим сначала, что $\rho_1 < 1 - \alpha_1$, $\rho_2 < 1 - \alpha_2$, $0 < \sigma_1, \sigma_2 < \infty$. Пусть $w(z_1, z_2) \in W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$. Тогда в силу неравенств (1.15), (1.18), (2.7) и (2.2) при $r_1, r_2 > R_\varepsilon$ будут иметь место неравенства

$$M(P_{n_1 n_2} w^{(n_1, n_2)}; r_1, r_2)[E(r_1, r_2)]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant H_1(\varepsilon) H_2(\varepsilon) \|w\|_r \Pi (1+\varepsilon)^{n_i} \left(\frac{1+\varepsilon}{\gamma_i}\right)^{n_i} (k^{(i)}_{n_1 n_2} + 1)(\sigma_i \rho_i)^{n_i} r_i^{k^{(i)}_{n_1 n_2} + n_i(\rho_i - 1)} \leqslant$$

$$< H_1(\varepsilon) H_2(\varepsilon) \|w\|_r \Pi (1+\varepsilon)^{2n_i} (\alpha_i n_i + 1) \left(\frac{\sigma_i \rho_i}{\gamma_i}\right)^{n_i} r_i^{n_i(\alpha_i + \rho_i - 1)}. \tag{2.8}$$

Введем обозначения

$$H_3(\varepsilon) = H_1(\varepsilon) H_2(\varepsilon), \quad \lambda_i = \frac{\sigma_i \rho_i (1+\varepsilon)^2}{\gamma_i}, \quad \beta_i = 1 - \alpha_i - \rho_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для $\|Lw\|_r$ получаем следующую оценку:

$$\|Lw\|_r \leqslant H_3(\varepsilon) \|w\|_r \sum_{n_1+n_2 \geq 1} \Pi (n_i + 1) \lambda_i^{n_i} r_i^{-\beta_i n_i}. \tag{2.9}$$

Если $0 < q < 1$, а r_1 и r_2 — достаточно большие, т. е. $r_i \geqslant R_i$, где $R_i = R_i(\lambda_1, \lambda_2, q, \varepsilon) \geqslant R_\varepsilon$, $i = 1, 2$, то ряд в правой части неравенства (2.9) сходится и, более того, выполняется неравенство

$$H_3(\varepsilon) \sum_{n_1+n_2>1} \Pi\,(n_i+1)\,\lambda_i^{n_i}\, r_i^{-\beta_i n_i} \leqslant q<1.$$

Таким образом, при условии $\rho_1 < 1-\alpha_1$, $\rho_2 < 1-\alpha_2$, $0<\sigma_1$, $\sigma_3<\infty$ оператор L отображает пространство $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ в себя, причем, если в нормировке этого пространства числа R_1 и R_2 выбраны достаточно большими, то оператор L является оператором сближения.

2.4. Пусть теперь $\rho_1=1-\alpha_1$, $\rho_2=1-\alpha_2$, $0<\sigma_2<\infty$, а величина σ_1 будет уточнена ниже. Обозначим через Q_1 множество тех натуральных чисел n_1, для которых $k_{n_1 0}^{(1)}=\alpha_1 n_1$.

Пусть $\sigma_1 < \left[\frac{1}{\gamma_1}(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3\right]^{-1}$, т. е. $\lambda_1 < \frac{1}{1+\varepsilon}$.

Выберем N_1 настолько большим, чтобы при $n_1>N_1$, $n_2=0$ выполнялись неравенства (1.18) и

$$H_2(\varepsilon) \sum_{N_1<n_1\in Q_1} (n_1+1)\,\lambda_1^{n_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.10}$$

Представим оператор L в виде

$$Lw = \Bigg(\sum_{\substack{N_1>n_1\in Q_1\\ n_2=0}} + \sum_{\substack{N_1<n_1\in Q_1\\ n_2=0}} + \sum_{\substack{n_1\overline{\in} Q_1\\ n_2=0}} + \sum_{\substack{0<n_1<\infty\\ n_2>1}}\Bigg) P_{n_1 n_2}\, w^{(n_1, n_2)} =$$

$$= L_1 w + L_2 w + L_3 w + L_4 w \tag{2.11}$$

и найдем оценку для норм $\|L_1 w\|_r, \cdots, \|L_4 w\|_r$.

Если $N_1 < n_1 \in Q_1$, $n_2=0$, то можно воспользоваться оценками (1.18). Следовательно, при r_1, $r_2 > R_\varepsilon$ получим (ср. (2.9) при $\beta_1=0$ и (2.10)):

$$\|L_2 w\|_r \leqslant H_2(\varepsilon)\,\|w\|_r \sum_{N_1<n_1\in Q_1} (n_1+1)\,\lambda_1^{n_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,\|w\|_r. \tag{2.12}$$

Для получения оценки нормы оператора L_3 представим его в виде

$$L_3 w = \Bigg(\sum_{\substack{N_1'>n_1\overline{\in} Q_1\\ n_2=0}} + \sum_{\substack{N_1'<n_1\overline{\in} Q_1\\ n_2=0}}\Bigg) P_{n_1 n_2}\, w^{(n_1, n_2)} = L_3' w + L_3'' w,$$

где N_1' настолько большое, что выполняется неравенство

$$H_3(\varepsilon) \sum_{\substack{N'<n_1\overline{\in} Q_1\\ n_2=0}} (\alpha_1 n_1+1)\,\lambda_1^{n_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{8}.$$

Как и раньше, легко получить оценку

$$\|L_3'' w\|_r < \frac{\varepsilon}{8}\,\|w\|_r,\quad r_1,\ r_2 \geqslant R_\varepsilon. \tag{2.13}$$

С другой стороны, из неравенств $k_{n_1 0}^{(1)} < \alpha_1 n_1$ при $n_1 \overline{\in} Q_1$ следуе что $\theta = \min\limits_{N_1' > n_1 \overline{\in} Q_1} \{\alpha_1 n_1 - k_{n_1 0}^{(3)}\} > 0$.

Тогда в силу неравенств (2.8)

$$\|L_3' w\|_r \leqslant H_3 \|w\|_r \; r_1^{-\theta} \sum_{N_1' > n_1 \overline{\in} Q_1} (\alpha_1 n_1 + 1) \lambda_1^{n_1}$$

и при достаточно больших r_1 имеет место неравенство $\|L_3' w\|_r \leqslant \frac{\varepsilon}{8} \|w\|$ Объединяя это с (2.13), можем утверждать, что если R_1^0 $(R_1^0 > R_\varepsilon)$- достаточно большое, то при $r_1 > R_1^0$, $r_2 > R_2$ имеет место неравенств

$$\|L_3 w\|_r < \frac{\varepsilon}{4} \|w\|_r . \qquad (2.1$$

Далее, из (2.8) легко получить оценку

$$\|L_4 w\|_r \leqslant$$

$$\leqslant H_3(\varepsilon) \|w\|_r \lambda_2 r_2^{-\beta_2} \sum_{\substack{0 < n_1 < \infty \\ n_2 > 1}} (n_1 + 1)(n_2 + 1) \lambda_1^{n_1} (\lambda_2 r_2^{-\beta_2})^{n_2 - 1} < \infty . \qquad (2.1$$

Следовательно, можно выбрать R_2^0 $(R_2^0 \geqslant R_\varepsilon)$ настолько больши чтобы при $r_1 > R_\varepsilon$, $r_2 \geqslant R_2^0$ выполнялось неравенство

$$\|L_4 w\|_r < \frac{\varepsilon}{4} \|w\|_r . \qquad (2.16$$

Рассмотрим, наконец, оператор

$$L_1 w = \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} P_{n_1 0}(z_1) \, w^{(n_1, 0)}(z_1, z_2) =$$

$$= \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} a_{\alpha_1 n_1, 0}^{n_1, 0} \, z_1^{\alpha_1 n_1} w^{(n_1, 0)}(z_1, z_2) +$$

$$+ \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} \widetilde{P}_{n_1 0}(z_1) \, w^{(n_1, 0)}(z_1, z_2) = L_1^0 w + \widetilde{L}_1 w, \qquad (2.17$$

где

$$\widetilde{P}_{n_1 0}(z_1) = P_{n_1 0}(z_1) - a_{\alpha_1 n_1, 0}^{n_1 0} \, z_1^{\alpha_1 n_1} .$$

Как и для $\|L_3' w\|_r$, легко получить оценку

$$\|\widetilde{L}_1 w\|_r \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \|w\|_r , \; r_1 > \widetilde{R}_1 > R_\varepsilon , \; r_2 \geqslant R_\varepsilon . \qquad (2.18$$

Для оценки $\|L_1^0 w\|_r$ воспользуемся неравенством (1.15). Тогда

$$\|L_1^0 w\|_r \leqslant \|w\|_r \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} |a_{\alpha_1 n_1, 0}^{n_1 0}| \, \Omega_1(n_1) (\sigma_1 \rho_1)^{n_1} . \qquad (2.19$$

Введем обозначения

$$d_{n_1} = |a^{n_1 0}_{\alpha_1 n_1, 0}|, \quad P(\tau) = \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} d_{n_1} \Omega_1(n_1)\, \tau^{n_1}.$$

Так как $P(0)=0$ и многочлен $P(\tau)$ монотонно возрастает при $\tau>0$ (если только $P(\tau)\not\equiv 0$), то существует единственное решение τ_ε уравнения $P(\tau)=1-2\varepsilon$. Накладывая на число σ_1 дополнительное условие $\sigma_1<\frac{\tau_\varepsilon}{\rho_1}$, из (2.19) получаем оценку

$$\|L_1^0 w\|_r \leqslant (1-2\varepsilon)\|w\|_r; \quad r_1,\ r_2 > R_\varepsilon. \tag{2.20}$$

Итак, при достаточно больших r_1 и r_2 и

$$\sigma_1 \leqslant \min\left\{\frac{\tau_\varepsilon}{\rho_1}, \left[\frac{1}{\gamma_1}(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3\right]^{-1}\right\}$$

из (2.10)—(2.20) следует неравенство

$$\|Lw\|_r \leqslant q\|w\|_r, \quad q = 1-\varepsilon < 1. \tag{2.21}$$

Заметим, что $\Omega_1(n_1)$ зависит также от r_1 ($\Omega_1(n_1)$—монотонно убывающая функция относительно r_1). Следовательно, для того чтобы получить по возможности большее число τ_ε, нужно r_1 выбрать достаточно большим. С другой стороны, число N_1 нужно выбирать по возможности наименьшим, согласуя это с условием (2.10). Но с уменьшением ε число N_1 растет, что приводит к увеличению $P(\tau)$, а это, в свою очередь, к возможному уменьшению τ_ε. Следовательно, допустимой верхней гранью для σ_1 будет

$$s = \sup_{\varepsilon>0}\left\{\min\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\rho_1}, \left[\frac{1}{\gamma_1}(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3\right]^{-1}\right)\right\}.$$

Если $0<\sigma_1<s$, $0<\sigma_2<\infty$, то при подходящем выборе чисел R_1 и R_2 в нормировке пространства $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ оператор L отображает $W(1-\alpha_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ в это же пространство, причем он является оператором сближения. Пусть τ_1—единственный положительный корень уравнения $\Phi_1(\tau)=1$, где

$$\Phi_1(\tau) = \sum_{n_1 \in Q_1} d_{n_1} \sqrt{2\pi n_1}\left(\exp\frac{1}{12\, n_1}\right)\tau^{n_1}$$

—аналитическая функция в начале координат (если $\Phi_1(\tau)\equiv 0$, то положим $\tau_1=\infty$). Докажем, что при условии

$$\sigma_1 < \Xi_1 = \sup_{(\gamma_1, \gamma_2)\in\Gamma}\left\{\min\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}, \frac{\gamma_1}{1-\alpha_1}\right)\right\} \tag{2.22}$$

оператор L будет оператором сближения в пространстве $W(1-\alpha_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$, если числа R_1 и R_2 в нормировке этого пространства выбраны достаточно большими.

Действительно, пусть $\sigma_1 < \Xi_1$. Тогда существуют такое $\varepsilon > 0$ и система $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$, для которых $\min\left(\frac{\tau'_\varepsilon}{\rho_1}, \frac{\gamma_1}{(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3}\right) > \sigma_1$, где τ'_ε — решение уравнения $\Phi_1(\tau) = 1 - 3\varepsilon$. Выбирая N_1 так, чтобы выполнялось неравенство (2.10), рассмотрим многочлен

$$P_1(\tau) = \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} d_{n_1} \sqrt{2\pi n_1} \left(\exp \frac{1}{12 n_1}\right) \tau^{n_1}.$$

Очевидно, $P_1(\tau) \leqslant \Phi_1(\tau)$ при положительных τ. Следовательно, решение $\tilde{\tau}'_\varepsilon$ уравнения $P_1(\tau) = 1 - 3\varepsilon$ удовлетворяет неравенству $\tilde{\tau}'_\varepsilon > \tau'_\varepsilon$. Далее, число R_1 можно выбрать настолько большим, чтобы при $r_1 > R_1$ выполнялось неравенство $P(\tilde{\tau}'_\varepsilon) \leqslant P_1(\tilde{\tau}'_\varepsilon) + \varepsilon$ (это следует из соотношения $\omega_1(n_1, r_1) \downarrow 0$ при $r_1 \to \infty$ и непрерывной зависимости значения многочленов от коэффициентов). Поэтому решение τ_ε уравнения $P(\tau) = 1 - 2\varepsilon$ будет удовлетворять неравенству $\tau_\varepsilon > \tilde{\tau}'_\varepsilon \geqslant$ $> \tau'_\varepsilon$. Это означает, что неравенство (2.21) имеет место, если

$$\sigma_1 < \min\left(\frac{\tau'_\varepsilon}{\rho_1}, \frac{\gamma_1}{(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3}\right),$$

и наше утверждение доказано.

2.5. Случай $\rho_1 < 1 - \alpha_1$, $\rho_2 = 1 - \alpha_2$ рассматривается аналогично предыдущему. Оператор L будет оператором сближения в пространстве $W(\rho_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$, если $0 < \sigma_1 < \infty$ и

$$0 < \sigma_2 < \Xi_2 = \sup_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma} \left\{\min\left(\frac{\tau_2}{\rho_2}\right), \frac{\gamma_2}{1-\alpha_2}\right\}, \tag{2.23}$$

где τ_2 — единственное решение уравнения

$$\Phi_2(\tau) = \sum_{n_2 \in Q_2} |a^{0n_2}_{0,\alpha_2 n_2} \sqrt{2\pi n_2} \left(\exp \frac{1}{12 n_2}\right) \tau^{n_2} = 1.$$

2.6. Пусть, наконец, $\rho_1 = 1 - \alpha_1$, $\rho_2 = 1 - \alpha_2$. Введем обозначение $Q_{12} = \{(n_1, n_2) \colon k^{(1)}_{n_1 n_2} = \alpha_1 n_1,\ k^{(2)}_{n_1 n_2} = \alpha_2 n_2;\ n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots\}$.

Пусть $\sigma_i < \left[\frac{1}{\gamma_i}(1-\alpha_i)(1+\varepsilon)^3\right]^{-1}$, т. е. $\lambda_i < \frac{1}{1+\varepsilon}$, $i = 1, 2$.

Выберем N_0 настолько большим, чтобы при $n_1 + n_2 > N_0$ выполнялись неравенства (1.18) и

$$H_2(\varepsilon) \sum_{\substack{n_1 + n_2 > N_0 \\ (n_1, n_2) \in Q_{12}}} (n_1 + 1)(n_2 + 1) \lambda_{21}^{n_1} \lambda_2^{n_2} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.24}$$

Представим оператор $L\varpi$ в виде

$$L\varpi = \sum_{\substack{n_1 + n_2 < N_0 \\ (n_1, n_2) \in Q_{12}}} + \sum_{\substack{n_1 + n_2 > N_0 \\ (n_1, n_2) \in Q_{12}}} + \sum_{\substack{k^{(1)}_{n_1 n_2} < \alpha_1 n_1 \\ k^{(2)}_{n_1 n_2} = \alpha_2 n_2}} +$$

$$+ \sum_{k^{(2)}_{n_1n_2}<\alpha_2 n_2} \Big) P_{n_1n_2} w^{(n_1, n_2)} = \tilde{L}_1 w + \tilde{L}_2 w + \tilde{L}_3 w + \tilde{L}_4 w. \qquad (2.25)$$

Аналогично тому, как это делалось в п. 2.4, легко доказать, что если $r_1 \geqslant R_1$, $r_2 \geqslant R_2$, где $R_i = R_i(\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon)$, $i=1, 2$,—достаточно большие, то будут иметь место неравенства

$$\|\tilde{L}_j w\|_r \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \|w\|_r, \; j=2, 3, 4. \qquad (2.26)$$

Чтобы оценить $\|L_1 w\|_r$, введем обозначения

$$d_{n_1n_2} = |a^{n_1n_2}_{\alpha_1 n_1, \alpha_2 n_2}|, \; \tilde{P}_{n_1n_2}(z_1, z_2) = P_{n_1n_2}(z_1, z_2) - a^{n_1n_2}_{\alpha_1 n_1, \alpha_2 n_2} \; z_1^{\alpha_1 n_1} \; z_2^{\alpha_2 n_2},$$

$$L_1' w = \sum_{\substack{0<n_1+n_2<N_0 \\ (n_1, n_1)\in Q_{12}}} \tilde{P}_{n_1n_2} w^{(n_1, n_2)},$$

$$L_1'' w(z_1, z_2) = \sum_{\substack{0<n_1+n_2<N_0 \\ (n_1, n_2)\in Q_{12}}} a^{n_1n_2}_{\alpha_1 n_1, \alpha_2 n_2} \; z_1^{\alpha_1 n_1} z_2^{\alpha_2 n_2} \; w^{(n_1, n_2)} \; (z_1, z_2).$$

Очевидно, $\tilde{L}_1 w = L_1' w + L_1'' w$. Норма $\|L_1' w\|_r$ оценивается так же, как для операторов $\tilde{L}_3$, $\tilde{L}_4$, именно

$$\|L_1' w\|_r \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \|w\|_r. \qquad (2.27)$$

Для оценки $\|L_1'' w\|_r$ воспользуемся неравенством (1.15) и получим

$$\|L_1'' w\|_r \leqslant$$

$$\leqslant \|w\|_r \sum_{\substack{0<n_1+n_2<N_0 \\ (n_1, n_2)\in Q_{12}}} d_{n_1n_2} \, \Omega_1(n_1) \, \Omega_2(n_2) (\sigma_1\rho_1)^{n_1} (\sigma_2\rho_2)^{n_2}. \qquad (2.28)$$

Пусть $(\tau_{1\varepsilon}, \tau_{2\varepsilon})$— положительное решение уравнения

$$P(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{0<n_1+n_2<N_0 \\ (n_1, n_2)\in Q_{12}}} d_{n_1n_2} \, \Omega_1(n_1) \, \Omega_2(n_2) \, \tau_1^{n_1} \tau_2^{n_2} = 1 - 2\varepsilon.$$

Накладывая на числа σ_1, σ_2 дополнительные условия $\sigma_1 < \frac{\tau_{1\varepsilon}}{\rho_1}$, $\sigma_2 < \frac{\tau_{2\varepsilon}}{\rho_2}$, из (2.28) получим

$$\|L_1'' w\|_r \leqslant (1-2\varepsilon) \|w\|_r. \qquad (2.29)$$

Из (2.24), (2.26), (2.29) получаем окончательную оценку

$$\|Lw\|_r \leqslant q \|w\|_r, \; q = 1 - \varepsilon < 1,$$

верную при $r_1 \geqslant R_1$, $r_2 \geqslant R_2$, R_1, R_2— достаточно большие.

Рассуждая так же, как и в п. 2.4, приходим к следующему результату.

Оператор L будет оператором сближения в пространстве $W(1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$, если

$$0<\sigma_i<\Xi_i^0=\min\left(\frac{\tau_i^0}{\rho_i}, \frac{\gamma_i}{1-\alpha_i}\right), \; i=1, 2, \tag{2.30}$$

где $(\gamma_1, \gamma_2)\in\Gamma$, (τ_1^0, τ_2^0) — положительное решение уравнения

$$\Phi(\tau_1, \tau_2)=\sum_{(n_1, n_2)\in Q_{12}} d_{n_1 n_2} 2\pi \sqrt{n_1 n_2}\left[\exp\left(\frac{1}{12 n_1}+\frac{1}{12 n_2}\right)\right]\tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}=1,$$

а числа R_1, R_2 в нормировке пространства $W(1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$ выбраны достаточно большими.

2.7. Обозначим через E класс целых функций $w(z_1, z_2)$, принадлежащих хотя бы одному из классов $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1^0, \Xi_2^0)$, $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1, 0)$, $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; 0, \Xi_2)$ (см. п. 1.1), где α_i, Ξ_i и Ξ_i^0, $i=1, 2$, определены в (2.2), (2.22), (2.23) и (2.30)*.

Теорема 2. *Пусть для уравнения* (1) *выполнены условия* а) *и* б) *п. 2.1. Тогда для любой функции* $f(z_1, z_2)\in E$ *уравнение* (1) *имеет единственное в* E *решение, причем с.с.п.* (ρ_1, ρ_2) *и с.с.т.* (σ_1, σ_2) *при с.с.п.* (ρ_1, ρ_2) *этого решения совпадают (в допустимых пространством* E *пределах) с с.с.п. и с.с.т. функции* $f(z_1, z_2)$.

Доказательство. 1. Прежде всего докажем, что уравнение (1) имеет единственное решение в каждом из классов

$$E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1^0, \Xi_2^0),\; E[1-\alpha_1, 1--\alpha_2; \Xi_1, 0),\; E(1-\alpha_1, 1--\alpha_2; 0, \Xi_2),$$

к которому принадлежит функция $f(z_1, z_2)$.

а) Пусть $(\sigma_1, \sigma_2$ — любая точка из открытого прямоугольника $(0, \Xi_1^0; 0, \Xi_2^0)$. Введем пространство $J_{\sigma_1\sigma_2}^{(1)}=W(1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$ с нормой

$$\|w\|_{R_1, R_2}=\sup_{r_1>R_1, r_2>R_2} M(w; r_1, r_2)\exp\left[-(\sigma_1 r_1^{1-\alpha_1}+\sigma_2 r_2^{1-\alpha_2})\right],$$

где числа $R_i=R_i(\sigma_1, \sigma_2)$, $i=1, 2$, выбраны настолько большими, что для всех $w\in W(1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$ выполняется неравенство $\|Lw\|_{(R_1, R_2)}\leqslant q\|w\|_{(R_1, R_2)}$, $q<1$ и зависит от σ_1, σ, но не зависит от w (см. пп. 1.3 и 2.6).

Из принципа сжатых отображений [6] следует, что уравнение (1) имеет единственное решение в $J_{\sigma_1\sigma_2}^{(1)}$, если правая часть $f(z_1, z_2)$ принадлежит этому пространству. Тогда по теореме 1 уравнение (1) имеет единственное решение в классе

$$A_1=\bigcup_{\substack{0<\sigma_1<\Xi_1^0\\ 0<\sigma_2<\Xi_2^0}} J_{\sigma_1\sigma_2}^{(1)},$$

если $f(z_1, z_2)\in A_1$. Очевидно, $A_1=E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1^0, \Xi_2^0)$.

---

* Класс $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1, 0)$ (класс $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; 0, \Xi_2)$) имеет смысл рассматривать только в случае, когда $\Xi_1>\Xi_1^0$ $(\Xi_2>\Xi_2^0)$.

б) Пусть теперь (σ_1, ρ_2)—произвольная точка из открытого прямоугольника $(0, \Xi_1; 0, 1-\alpha_2)$. Введем пространство $J^{(2)}_{\sigma_1\rho_2} = W(1-\alpha_1, \rho_2; \sigma_1, 1)$ с нормой

$$\|w\|_R = \sup_{r_1>R_1, r_2>R_2} M(w; r_1, r_2) \exp\left[-(\sigma_1 r_1^{1-\alpha_1} + r_2^{\rho_2})\right],$$

где числа $R_i = R_i(\rho_1, \rho_2)$, $i=1, 2$, выбраны настолько большими, чтобы для всех $w \in W(1-\alpha_1, \rho_2; \sigma_1, 1)$ выполнялось неравенство (см. п. 2.4)

$$\|Lw\|_R \leqslant q\,\|w\|_R, \quad q = q(\sigma, \rho) < 1.$$

На основании принципа сжатых отображений опять можем утверждать, что уравнение (1) имеет единственное решение в $J^{(2)}_{\sigma_1\rho_2}$, если правая часть $f(z_1, z_2)$ принадлежит этому пространству. По теореме 1 уравнение (1) имеет единственное решение в классе

$$A_2 = \bigcup_{\substack{0<\sigma_1<\Xi_1 \\ 0<\rho_2<1-\alpha_2}} J^{(2)}_{\sigma_1\rho_2},$$

если $f(z_1, z_2) \in A_2$.

Очевидно, $A_2 = E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1, 0)$.

в) Аналогично доказывается существование единственного решения уравнения (1) в классе $A_3 = E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; 0, \Xi_2)$, когда $f(z_1, z_2) \in A_3$.

2. Докажем теперь, что с.с.п. (ρ_1, ρ_2) и с.с.т. (σ_1, σ_2) при с.с.п. (ρ_1, ρ_2) решения $w(z_1, z_2)$ и правой части $f(z_1, z_2)$ уравнения (1) совпадают. Доказательство можно было бы проводить на основании последнего утверждения теоремы 1 (ср. [1]), но мы воспользуемся другим методом, охватывающим сразу всевозможные варианты.

Пусть $f(z_1, z_2)$—произвольная целая функция, имеющая с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f) и с.с.т. (σ_1^f, σ_2^f) при с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f), где $0<\rho_i^f<\infty$, $0 \leqslant \sigma_i^f \leqslant \infty$, $i=1, 2$. Введем обозначение

$$W_f = \begin{cases} W(\rho_1^f, \rho_2^f; \sigma_1^f+\varepsilon, \sigma_2^f+\varepsilon), & \text{если } \sigma_1^f<\infty,\ \sigma_2^f<\infty, \\ W(\rho_1^f+\varepsilon, \rho_2^f; 1, \sigma_2^f+\varepsilon), & \text{если } \sigma_1^f=\infty,\ \sigma_2^f<\infty, \\ W(\rho_1^f, \rho_2^f+\varepsilon; \sigma_1^f+\varepsilon, 1), & \text{если } \sigma_1^f<\infty,\ \sigma_2^f=\infty, \\ W(\rho_1^f+\varepsilon, \rho_2^f+\varepsilon; 1, 1), & \text{если } \sigma_1^f=\sigma_2^f=\infty;\ \varepsilon>0. \end{cases}$$

Очевидно, $f \in W_f$. Пусть $f(z_1, z_2) \in A_p$ $(p=1, 2, 3)$ и системы (ρ_1^f, ρ_2^f) и (σ_1^f, σ_2^f) выбраны в пределах, допускаемых в A_p. Из результатов пп. 2.3—2.6 следует, что оператор L является оператором сближения в пространстве W_f (при любом достаточно малом $\varepsilon>0$, фигурирующем в определении W_f). Следовательно, уравнение (1) с правой частью $f(z_1, z_2)$ имеет решение в пространстве W_f, совпадающее с единственным решением $w(z_1, z_2)$ из содержащего W_f пространства A_p. Но условие $w(z_1, z_2) \in W_f$ (при любом $\varepsilon>0$) означает, что существуют такие с.с.п. (ρ_1^w, ρ_2^w) и с.с.т. (σ_1^w, σ_2^w) при с.с.п. (ρ_1^w, ρ_2^w) функции $w(z_1, z_2)$, для которых имеют место неравенства $\rho_i^w \leqslant \rho_i^f$, $\sigma_i^w \leqslant \sigma_i^f$, $i=1, 2$.

С другой стороны, каково бы ни было пространство $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$, содержащее $w(z_1, z_2)$, в его нормировке справедливо неравенство (см. пп. 2.3—2.6)

$$\|f(z_1, z_2)\|_r = \|Lw(z_1, z_3)\|_r \leqslant q\|w(z_1, z_3)\|_r, \quad q < 1.$$

Отсюда следует, что $\rho_i^f \leqslant \rho_i^w$, $\sigma_i^f \leqslant \sigma_i^w$, $i=1, 2$. Тем самым требуемые равенства $\rho_i^f = \rho_i^w$, $\sigma_i^f = \sigma_i^w$, $i=1, 2$, доказаны.

Кроме того, из последних неравенств следует, что если $w(z_1, z_2) \in A_p$, то $f(z_1, z_2) \in A_p$ $(p=1, 2, 3)$. Следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение не только в пределах каждого класса A_p, но и в их объединении $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Теорема доказана.

§ 3. Приближенное решение уравнения (1)

Метод „урезания", который применяется в данном параграфе, неоднократно использовался при решении аналогичных задач Ю. Ф. Коробейником (см., например, [1]). В дальнейшем также предполагается, что выполняются условия а) и б) п. 2.1. Если правая часть уравнения (1) является многочленом степени k относительно переменных z_1, z_2, то согласно теореме 2 уравнение имеет единственное в классе E решение $w_k(z_1, z_2)$ (см. п. 2.7). Это решение является многочленом степени k относительно z_1, z_2. Его легко найти методом неопределенных коэффициентов. При этом, очевидно, уравнение (1) можно заменить „урезанным" уравнением

$$w + L_k w \equiv w + \sum_{n_1+n_2=1}^{k} P_{n_1 n_2}(z_1, z_2) \frac{\partial^{n_1+n_2} w}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}} = f(z_1, z_2). \tag{3.1}$$

Если $f(z_1, z_2)$—произвольная функция из класса E, то в качестве приближенного решения естественно выбирать полиномиальное решение „урезанного" уравнения

$$w + L_k w = f_k(z_1, z_2), \tag{3.2}$$

где

$$f_k(z_1, z_2) = \sum_{i+j=1}^{k} \frac{1}{i!\, j!} \frac{\partial^{i+j} f(0, 0)}{\partial z_1^i \partial z_2^j} z_1^i z_2^j$$

— частичная сумма тейлоровского разложения функции $f(z_1, z_2)$. Мы покажем, что этот процесс приближенного решения сходится. Точнее, имеет место

Теорема 3. *Если* $f(z_1, z_2)$ — *целая функция из класса* E *и* $w_k(z_1, z_2)$—*полиномиальное решение урезанного уравнения* (3.2), *то* $w_k(z_1, z_2)$ *стремится равномерно в любой ограниченной области к решению* $w(z_1, z_2)$ *уравнения* (1), *более того,* $w_k(z_1, z_2) \to w(z_1, z_2)$ *равномерно во всем пространстве* C^2 *с весом* $\exp[-(\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2})]$, *где* ρ_i, σ_i, $i=1, 2$, — *произвольные положительные числа такие, что* $f(z_1, z_2) \in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$.

Доказательство. Пусть положительные числа ρ_i, σ_i, $i=1, 2$, выбраны так, что $f(z_1, z_2) \in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2) \subset E$. Рассмотрим операторы L_k, $\tilde{L}_k$:

$$L_k w \equiv \sum_{n_1+n_2=1}^{k} P_{n_1 n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2} w}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}},$$

$$\tilde{L}_k w \equiv \sum_{n_1+n_2=k+1}^{\infty} P^{n_1 n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2} w}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}}.$$

Нормы этих операторов оцениваются так же, как норма оператора L в п.п. 2.3—2.6. Так как

$$M(L_k w; r_1, r_2) \leqslant \sum_{n_1+n_2=1}^{k} M(P_{n_1 n_2} w^{(n_1, n_2)}; r_1, r_2) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n_1+n_2=1}^{\infty} M(P_{n_1 n_2} w^{(n_1, n_2)}; r_1, r_2),$$

то в силу результатов п.п. 2.3—2.6 имеет место неравенство

$$\|L_k w\|_r \leqslant q \|w\|_r, \quad q < 1, \quad r_1 > R_1, \quad r_2 > R_2, \tag{3.4}$$

где R_1, R_2—достаточно большие постоянные; q, R_1, R_2 от w и k не зависят.

Норма оператора $\tilde{L}_k$ оценивается так же, как норма оператора L в п.п. 2.3—2.6. При этом соответствующие оценки уточняются следующим образом. Ряды, фигурирующие в неравенствах (2.9), (2.12), (2.15), заменяются на их остатки, соответствующие индексам (n_1, n_2) с $n_1+n_2>k$. Следовательно, число q, фигурирующее в оценках нормы оператора L, заменяется величиной $q(k)$, стремящейся к нулю вместе с $1/k$. Находить такие оценки, как для нормы операторов L_1 из (2.11) и $\tilde{L}_1$ из (2.25), в данном случае нет надобности, так как k можно выбрать настолько большим, чтобы $k > N_1$, $k > N_0$. На основании сказанного можем написать

$$\|\tilde{L}_k w\|_r \leqslant q(k) \|w\|_r, \quad q(k) \to 0, \quad r_1 > R_1, \quad r_2 > R_2. \tag{3.5}$$

Из неравенств (3.4) и (3.5) следует, что операторы L_k и $\tilde{L}_k$ являются операторами сближения в пространстве $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$.

Рассмотрим урезанное уравнение (3.2) с правой частью (3.3) ($f(z_1, z_2) \in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$). Из сказанного выше следует, что это уравнение имеет единственное полиномиальное решение $w_k(z_1, z_2)$ в классе E, причем $w_k(z_1, z_2) \in W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ при любом натуральном k. Если $w(z_1, z_2)$ — решение полного уравнения (1), то $u_k(z_1, z_2) = w(z_1, z_2) - w_k(z_1, z_2)$ является решением уравнения

$$W + L_k W = f(z_1, z_2) - f_k(z_1, z_2) - \tilde{L}_k w(z_1, z_2). \tag{3.6}$$

Так как правая часть уравнения (3.6) принадлежит классу $E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2] \subset E$, то по теореме 2 $u_k(z_1, z_2)$ является единственным в E решением уравнения (3.6), причем $u_k(z_1, z_2) \in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2]$. Следовательно, в силу леммы 2 функции u_k и $f - f_k - \tilde{L}_k w$ принадлежат B-пространству $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$. Тогда, как известно [6], в нормировке пространства $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ имеют место неравенства

$$\|w - w_k\| = \|u_k\| \leqslant \frac{\|f - f_k - \tilde{L}_k w\|}{1-q} \leqslant \frac{\|f - f_k\|}{1-q} + \frac{\|\tilde{L}_k w\|}{1-q} <$$

$$\leqslant \frac{\|f - f_k\|}{1-q} + \frac{q(k)\|w\|}{1--q} \leqslant \frac{\|f - f_k\|}{1-q} + q(k) \cdot \frac{\|f\|}{1-q}.$$

Учитывая лемму 2 и условие (3.5), отсюда заключаем, что $\|w - w_k\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Но последнее означает, что при $k \to \infty$

$$\sup_{r_1 > R_{10},\ r_2 > R_{20}} M(w - w_k;\ r_1, r_2)[E(r_1, r_2)]^{-1} \to 0,$$

и последовательность полиномов $w_k(z_1, z_2)$ сходится к решению $w(z_1, z_2)$ равномерно во всем пространстве C^2 с весом $\exp\{-[\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2}]\}$ и, подавно, равномерно в любой ограниченной области. Теорема доказана.

Ужгородский государственный
университет

Поступила 10.I.1972

Ֆ. Ի. ԳԵՉԵ, Ա. Ի. ԿՈՒՐԵՅ. Մասնական ածանցյալներով անվերջ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ամբողջ լուծումների մասին *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում է [1] հավասարման լուծման գոյության ու միակության հարցը՝ երկու փոփոխականի ամբողջ ֆունկցիաների որոշ դասում։

Հիմնավորված է տված հավասարման մոտավոր լուծման մեթոդը։

F. J. GEČE, A. I. KUREJ. *On entire solutions of linear partial differential equations of infinite order* (summary)

For the equation (1) the existence and the uniqueness of the solution in a class of entire functions of two variables has been considered. A method of approximate solution of this equation is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. Ф. Коробейник.* О целых решениях дифференциального уравнения бесконечного порядка, Литовский матем. сб., вып. IV, № 2, 1964, 203—227.
2. *С. А. Еремин.* Некоторые вопросы приближения функций многих комплексных переменных, Киев, 1958.
3. *А. О. Гельфонд.* Исчисление конечных разностей, М., 1959.

4. *М. М. Джрбашян.* К теории некоторых классов целых функций многих переменных, Известия АН Арм.ССР, сер. физ.-мат., 8, № 4, 1955, 1—23.

5. *А. А. Темляков.* Функции многих комплексных переменных, История отечественной математики, т. 4, книга 1, Киев, 1960.

6. *Л. В. Канторович* и *Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.