ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

А. М. ЛУКАЦКИЙ

О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА

В работе М. М. *Джрбашяна* [1] для произвольного ограниченного континуума K была построена система рациональных функций $\{M_n(z)\}_0^\infty$, являющаяся естественным обобщением хорошо известных полиномов Фабера на тот случай, когда полюса функций системы не совпадают все с бесконечностью, а лежат на произвольной последовательности точек $\{\omega_k\}_0^\infty \subset G^-$—неограниченной компоненте дополнения K. Было показано, что в случае, когда континуум K совпадает с замыканием жордановой области G^+, граница которой Γ—спрямляемая кривая, удовлетворяющая некоторому дополнительному условию, система $\{M_n(z)\}_0^\infty$ образует базис в пространстве функций, аналитических в G^+ и непрерывных в $G^+ \cup \Gamma$ при следующем условии на полюса:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})=\infty, \tag{1}$$

где $w=\Phi(z)$ $(z=\psi(w))$—функция, конформно отображающая G^- на область $|w|>1$, причем $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$.

Система $\{M_n(z)\}_0^\infty$ строилась следующим образом. Рассматривалась система Такенака-Мальмквиста, ортонормальная на единичной окружности $|w|=1$:

$$\varphi_0(w)=\frac{\sqrt{1-|\alpha_0|^2}}{1-\bar{\alpha}_0 w},$$

$$\varphi_n(w)=\frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\bar{\alpha}_n w}\prod_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k-w}{1-\bar{\alpha}_k w}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{2}$$

где $\alpha_k=\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$. При $\alpha_k=0$ полагаем $\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}=\frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}=-1$.

Функция $M_n(z)$ определялась как сумма главных частей и постоянных в лорановском разложении функции $\varphi_n[\Phi(z)]$ в окрестности точек $\{\omega_k\}_0^n$.

В дальнейшем с целью освобождения от ограничения на спрямляемый контур Г. Ц. Тумаркин [2] рассмотрел модифицированную систему $\{M_n^*(z)\}_0^\infty$, определяемую аналогичным образом из лорановского разложения функций $\varphi_n[\Phi(z)]\sqrt{\Phi'(z)}$.

Наконец, М. М. *Джрбашян* в работах [3], [4] изучил разложения по модифицированным системам $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$:

$$\sum_{0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z) \tag{3}$$

при условии

$$\sum_{0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty, \tag{4}$$

для случая, когда континуум $K = \overline{G^+}$ — замыкание жордановой области со спрямляемой границей.

Функция $M_n^{(s)}(z) (0 \leqslant s \leqslant 1)$ определялась из лорановского разложения функции $\varphi_n [\Phi(z)][\Phi'(z)]^s$ в окрестности $\{\omega_k\}_0^n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$.

В настоящей работе рассматривается одна из модифицированных систем М. М. Джрбашяна, а именно, система $\{M_n^{(1)}(z)\}$.

Целью этой работы является, во-первых, исследовать сходимость рядов

$$\sum_{0}^{\infty} c_k M_k^{(1)}(z) \tag{5}$$

при более общих условиях на коэффициенты c_k, чем [4], причем уже для произвольного ограниченного континуума, во-вторых, в случае, когда K совпадает с замыканием жордановой области со спрямляемой границей, расширить класс функций, представимых рядами [5].

Отметим, что такое обобщение связано со значительными трудностями и не является простым перенесением результатов [3] и [4]. Если при условии [4] могли быть использованы теорема Рисса-Фишера и другие хорошо известные методы гильбертового пространства, то в нашем случае приходится привлекать сведения из теории особых интегралов, а также некоторые результаты автора для круга, что приводит к довольно громоздким выкладкам.

Автор выражает благодарность профессору А. И. Маркушевичу и профессору Г. Ц. Тумаркину за помощь и внимание к настоящей работе.

§ 1. Разложение в ряды по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^{\infty}$ при условии (1):

$$\sum_{0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) = \infty$$

Пусть K — произвольный ограниченный континуум, U — его внутренность, $\{G_l\}_0^l$ $(0 \leqslant l \leqslant \infty)$ — совокупность всех ограниченных компонент его дополнения, число которых может быть бесконечно, G^- — неограниченная компонента дополнения K. Положим

$$\tilde{K} = K \cup \left(\bigcup_{l=0}^{l} G_l \right).$$

Очевидно, что дополнение $\tilde{K}$ совпадает с G^-, откуда немедленно следует, что $\tilde{K}$ — континуум и $\partial \tilde{K} = \partial G^-$. Через $\tilde{U}$ будем обозначать внутренность $\tilde{K}$. Очевидно, что

$$\widetilde{U} \supset U \cup \left(\bigcup_{l=0}^{l} G_l \right).$$

Имеют место равенства, непосредственно вытекающие из определения $M_k^{(1)}(z)$ (см. [4])

$$M_k^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{\varphi_k(w)\,dw}{\psi(w) - z}, \tag{1.1}$$

$$z \in G_R^+ \ (k=0,\ 1,\ 2, \cdots);$$

$$M_k^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{\varphi_k(w)\,dw}{\psi(w) - z} + \varphi_k[\Phi(z)]\,\Phi'(z), \tag{1.2}$$

$$z \in G_R^{-*} \ (k=0,\ 1,\ 2, \cdots),$$

где $R > 1$ выбрано так, что все точки $\{\omega_l\}_0^k$ лежат вне Γ_R.

Функция $z = \psi(w)$ ограничена вблизи единичной окружности, следовательно по теореме Фату [8], она имеет почти всюду на $|w|=1$ угловые граничные значения. Кроме того справедливы следующие очевидные неравенства, при $z \in \widetilde{U}$

$$\inf_{|w|>1} |\psi(w) - z| > \inf_{\zeta \in \partial G^-} |\zeta - z| = \inf_{\zeta \in \partial \widetilde{K}} |\zeta - z| = d(z) > 0, \tag{1.3}$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до $\partial\widetilde{K}$.

Переходя к пределу в крайних членах равенств (1.1) при $R \to 1+0$ (законность такого перехода вытекает из (1.3)), получим

$$M_k^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{\varphi_k(w)\,dw}{\psi(w) - z}, \quad z \in \widetilde{U} \ (k=0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{1.1'}$$

Переходя к пределу при $R \to 1+0$ в равенстве (1.2), получим

$$M_k^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{\varphi_k(w)\,dw}{\psi(w) - z} + \varphi_k[\Phi(z)]\,\Phi'(z), \tag{1.2'}$$

$$z \in G^- \ (k=0,\ 1,\ 2, \cdots).$$

Нам потребуется в дальнейшем следующая лемма о разложении по системе (2).

Лемма 1. *Пусть дана система* (2), *где* $\{\alpha_k\}_0^\infty$ — *произвольная последовательность точек внутри единичного круга, удовлетворяющая условию*

$$\sum_0^\infty (1 - |\alpha_k|) = \infty,$$

---

* Через Γ_R ($R > 1$) обозначен образ окружности $|w| = R$ при отображении $z = \psi(w)$; G_R^+ и G_R^- — соответственно внутренность и внешность кривой Γ_R.

функция $f(w)$ *принадлежит* L_p $(p>1)$*; c_k — *коэффициенты Фурье* $f(w)$ *по системе* (2).

Тогда ряд

$$\sum_{0}^{\infty} c_k \varphi_k(w) \tag{1.4}$$

сходится равномерно внутри $|w|<1$ *к некоторой функции* $F(w)\in H_p$**, *сходится на* $|w|=1$ *в метрике* L_p *к угловым значениям* $F(w)$ *изнутри* $|w|=1$.

Доказательство. Равномерная сходимость ряда (1.4) внутри $|w|<1$ доказана в [12], там же показано, что

$$F(w)=\sum_{0}^{\infty} c_k \varphi_k(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{t-w}\,dt,\ |w|<1.$$

Из того, что $f(t)\in L_p$ вытекает [11], что $F(w)\in H_p$ и

$$F(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{F(t)}{t-w}\,dt,\ |w|<1.$$

Таким образом, имеем следующее тождество:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)-F(t)}{t-w}\,dt\equiv 0,\ |w|<1. \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что функция $f(t)-F(t)$ аналитически продолжается с единичной окружности в ее внешность, т. е. справедливо разложение

$$f(t)-F(t)=\sum_{1}^{\infty} d_k t^{-k},\ |t|>1. \tag{1.6}$$

Ряд (1.6), как следует из теории обычных рядов Фурье, сходится на $|t|=1$ к $f(t)-F(t)$ в метрике L_p. Кроме того

$$d_k=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}[f(t)-F(t)]\,t^k\,|dt|=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}f(t)\,t^k\,|dt|\ .\ (k=1,2,\cdots).$$

Таким образом, d_k — коэффициенты Фурье функции $f(w)$ по системе $\{w^{-k}\}_1^{\infty}$. Система $\{\varphi_k(w)\}_0^{\infty}\cup\{w^{-k}\}_1^{\infty}$ полна в пространстве L_p [13]. Как следует из [12] (теорема 1), ряд Фурье по этой системе сходится на $|w|=1$ к $f(w)$ в метрике L_p.

Учитывая все вышесказанное, имеем

---

* Через $L_p(\Gamma)(p>1)$, Γ — спрямляемая жорданова кривая, будем обозначать пространство функций $g(\zeta)$, $\zeta\in\Gamma$, для которых $\int_{\Gamma}|g(\zeta)|^p\,|d\zeta|<\infty$; в случае, когда Γ — единичная окружность, $L_p(\Gamma)=L_p$.

** Определение H_p см. в [8].

$$\left\|F(t)-\sum_0^n c_k\varphi_k(t)\right\|_p^{*}\leqslant\left\|F(t)-f(t)+\sum_1^m d_k t^{-k}+f(t)-\right.$$

$$\left.-\sum_1^m d_k t^{-k}-\sum_0^n c_k\varphi_k(t)\right\|_p\leqslant\left\|f(t)-F(t)-\sum_1^m d_k t^{-k}\right\|_p+$$

$$+\left\|f(t)-\sum_1^m d_k t^{-k}-\sum_0^n c_k\varphi_k(t)\right\|_p. \tag{1.7}$$

Подбирая достаточно большое m, получим, что при $n>N(\varepsilon)$ правая часть (1.7) меньше произвольного $\varepsilon>0$, и ряд (1.4) сходится к $F(t)$ на $|t|=1$ в метрике L_p. Лемма доказана.

Хорошо известно, что полиномы Фабера для континуума K могут быть определены как коэффициенты ряда Лорана производящей функции

$$\chi(w, z)=\frac{1}{\psi(w)-z},\ |w|>1 \tag{1.8}$$

в окрестности $w=\infty$.

Аналогом этого для системы $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ является следующее утверждение.

Лемма 2. *При условии* (1) *имеет место разложение*

$$\chi(w, z)=\sum_0^\infty M_k^{(1)}(z)\,\frac{1}{w}\,\overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)},\ |w|>1, \tag{1.9}$$

равномерно сходящееся внутри $|w|>1$ *и в любой метрике* $L_p\,(p>1)$ *на* $|w|=1$ *при любом фиксированном* $z\in\widetilde{U}$.

Разложение (1.9) было установлено М. М. Джрбашяном [4] для $K=\overline{G}^+$, G^+—жорданова область со спрямляемой границей, сходимость на $|w|=1$ доказана в [4] в метрике L_2.

Доказательство. Функция (1.8) при фиксированном $z\in\widetilde{U}$ аналитична и ограничена в области $|w|>1$ и $\chi(\infty, z)=0$, значит, функция

$$\chi^*(\zeta, z)=\zeta^{-1}\,\overline{\chi(\overline{\zeta}^{-1},\ z)}$$

аналитична и ограничена в $|\zeta|<1$ и принадлежит поэтому пространству H_p для любого p.

По лемме 1 имеем следующее разложение:

$$\chi^*(\zeta, z)=\sum_0^\infty a_k(z)\,\varphi_k(\zeta), \tag{1.10}$$

равномерно сходящееся внутри $|\zeta|<1$ и сходящееся на $|\zeta|=1$ в любой метрике $L_p\,(p>1)$, причем $a_k(z)$ вычисляются по формулам

---

* Через $\|\cdots\|_p$ обозначается норма функции в пространстве $L_p\ (p>1)$.

$$a_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \chi^*(\zeta, z)\overline{\varphi_k(\zeta)}\,|d\zeta| \quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \qquad (1.11)$$

Замечая, что равенства (1.11) можно, очевидно, записать следующим образом:

$$M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \overline{\chi^*(\zeta, z)}\,\varphi_k(\zeta)\,|d\zeta| \quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots), \qquad (1.12)$$

из (1.11) и (1.12) имеем

$$a_k(z)=\overline{M_k^{(1)}(z)} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \qquad (1.13)$$

Производя в (1.10) замену $w=\overline{\zeta^{-1}}$ и учитывая (1.13), получим искомое разложение (1.9). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь ряд по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$

$$\sum_0^\infty c_k M_k^{(1)}(z), \qquad (1.14)$$

где c_k — коэффициенты Фурье некоторой функции $\gamma(w)$ из L_r $(r>1)$ по системе $\{\varphi_k(w)\}_0^\infty$:

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1} \gamma(w)\,\overline{\varphi_k(w)}\,|dw| \quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \qquad (1.15)$$

Имеет место следующая теорема о сходимости рядов (1.14) при условии (1).

Теорема 1. *Пусть $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ — система** *М. М. Джрбашяна для произвольного ограниченного континуума K. Тогда при условии (1) ряд (1.14) с коэффициентами (1.15) сходится равномерно внутри $\tilde{U}^*$ и имеет место равенство*

$$\sum_0^\infty c_k M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{\psi(w)-z},\quad z\in\tilde{U}. \qquad (1.16)$$

Доказательство. Умножив обе части равенства (1.9) на $(2\pi i)^{-1}\gamma(w)\,dw$ и заметив, что разложение (1.9) сходится на $|w|=1$ в метрике $L_{r/(r-1)}$, получаем после интегрирования, что ряд (1.14) сходится и справедливо равенство (1.16) при любом фиксированном $z\in\tilde{U}$.

Покажем, что ряд (1.14) сходится равномерно внутри $\tilde{U}$. Пусть $z\in P$, P — произвольный компакт, принадлежащий $\tilde{U}$. Тогда, подобно (1.3), имеем

---

* На компактах, целиком принадлежащих $\tilde{U}$.

$$\inf_{\substack{z\in P\\ |w|>1}} |\psi(w)-z| > \inf_{\substack{z\in P\\ \zeta\in\partial\tilde{K}}} |\zeta - z| = d(P) > 0,$$

где $d(P)$ — расстояние между множествами P и $\partial\tilde{K}$, откуда, используя (1.11), получаем при любых $n > m > 0$

$$\left|\sum_m^n c_k M_k^{(1)}(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|w|=1} - \sum_m^n \frac{c_k \varphi_k(w)}{\psi(w)-z}\,dw\right| \leqslant$$

$$\leqslant [d(P)]^{-1} \left\| \sum_m^n c_k \varphi_k(w) \right\|_{L_r}. \tag{1.17}$$

Из (1.17) вытекает равномерная сходимость ряда (1.14), поскольку, по лемме 1 ряд $\sum\limits_0^\infty c_k \varphi_k(w)$ сходится на $|w|=1$ в метрике L_r. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь частный случай теоремы 1, когда континуум $K=\overline{G^+}$ — замыкание жордановой области со спрямляемой границей Γ.

Пусть $f(z)$ представима в G^+ интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,\ \ g[\psi(w)]\,\psi'(w)\in L_r,\ r>1. \tag{1.18}$$

Положим

$$c_k = c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1} g[\psi(w)]\,\psi'(w)\,\overline{\varphi_k(w)}\,|dw|\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{1.19}$$

Учитывая, что при $\gamma(w) = g[\psi(w)]\,\psi'(w)$ правая часть (1.16) совпадает в G^+ с $f(z)$, из теоремы 1 немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ представима в G^+ интегралом типа Коши* (1.18), *тогда при условии* (1) *$f(z)$ разлагается в равномерно сходящийся внутри G^+ ряд по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$*

$$f(z) = \sum_0^\infty c_k(g)\,M_k^{(1)}(z),\ \ z\in G^+, \tag{1.20}$$

где $c_k(g)$ определяются из формул (1.19).

Отметим, что у М. М. Джрбашяна аналогичный результат справедлив при более жестких условиях на функцию $f(z)$, а именно $g[\psi(w)]\,\psi'(w)$ должна принадлежать L_2 (см. [4], теорема 6).

Замечание. Несложно показать, что функция $f(z)$ представима интегралом типа Коши (1.18), если она представима интегралом типа Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,\ \ g(\zeta)\in L_p(\Gamma),\ p>1 \tag{1.21}$$

при следующем дополнительном условии на спрямляемый контур:

$$\int\limits_{|w|=1} |\psi'(w)|^{\varkappa}\, |dw| < \infty \tag{1.22}$$

при некотором $\varkappa > 1$.

Покажем теперь, что при условии (1) разложение (1.20) обладает свойством единственности. Точнее имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть $f(z)$, представимая в G^+ интегралом типа Коши* (1.18), *разлагается в ряд* (1.20), *и пусть также имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_0^\infty c_k^* M_k^{(1)}(z), \quad z \in G^+, \tag{1.23}$$

где

$$c_k^* = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} \gamma^*(w)\, \overline{\varphi_k}(w)\, |dw|, \quad \gamma^*(w) \in L_s, \ s > 1.$$

Тогда при условии (1)

$$c_k = c_k^* \ (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Отметим, что подобная теорема была доказана ранее М. М. Джрбашяном [4] для случая, когда

$$\sum_0^\infty |c_k(g)|^2 < \infty, \sum_0^\infty |c_k^*|^2 < \infty,$$

однако условие (1) в [4] не требовалось.

Доказательство. Положим в $|w| < 1$

$$S(w) = \sum_0^\infty c_k \varphi_k(w), \quad S^*(w) = \sum_0^\infty c_k^* \varphi_k(w). \tag{1.24}$$

Ряды (1.24) сходятся равномерно внутри $|w| < 1$ по лемме 1. По той же лемме, из равенства

$$\sum_0^n c_k M_k^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} \frac{\sum\limits_0^n c_k \varphi_k(w)}{\psi(w) - z}\, dw, \quad z \in G^+.$$

применяя неравенство Гёльдера, заключаем, что

$$f(z) = \sum_0^\infty c_k M_k^{(1)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{S(w)\, dw}{\psi(w) - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{S[\Phi(\zeta)]\, \Phi'(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G^+. \tag{1.25}$$

Аналогично

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} c_k^* M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{S^*[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^+. \tag{1.26}$$

Вычитая (1.26) из (1.25), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi'(\zeta)\,[S[\Phi(\zeta)]-S^*[\Phi(\zeta)]]}{\zeta-z}\,d\zeta\equiv 0,\quad z\in G^+. \tag{1.27}$$

Слева в тождестве (1.27) стоит аналитическая в G^- функция, по известному свойству интегралов типа Коши [8] ее угловые граничные значения извне контура Γ существуют и совпадают с

$$\Phi'(\zeta)\,[S[\Phi(\zeta)]-S^*[\Phi(\zeta)]],\ \zeta\in\Gamma.$$

Кроме того, эта аналитическая функция имеет нуль на бесконечности. Учитывая, что $\Phi'(z)\neq 0$ при $z\in G^-$ и $\Phi'(\infty)>0$, получаем, что функция $S[\Phi(z)]-S^*[\Phi(z)]$ аналитична в G^- и также обращается на бесконечности в нуль. Переходя на плоскость $w=\Phi(z)$ имеем целую функцию $S(w)-S^*(w)$, обращающуюся в нуль при $w=\infty$. По теореме Лиувилля $S(w)\equiv S^*(w)$, отсюда, как нетрудно видеть,

$$c_k=c_k^*\quad(k=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Теорема доказана.

§ 2. Разложение в ряды по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^{\infty}$ при условии: $\sum_{0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<\infty$

Пусть K, как и раньше, произвольный ограниченный континуум. Продолжая пользоваться обозначениями § 1, мы будем изучать здесь сходимость рядов

$$\sum_{0}^{\infty} c_k\, M_k^{(1)}(z), \tag{2.1}$$

где

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1}\gamma(w)\,\overline{\varphi_k(w)}\,|dw|,\quad \gamma(w)\in L_r\ (r>1) \tag{2.2}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

в принципиально отличном от рассмотренного в § 1 случае, когда

$$\sum_{0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<\infty. \tag{2.3}$$

Нам потребуются здесь некоторые результаты относительно приближения функций на единичной окружности рациональными дробями и о неполных системах Такенака-Мальмквиста.

Рассмотрим систему (2), где $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$ — произвольная последовательность точек внутри единичного круга, для которой

$$\sum_{0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<\infty. \tag{2.4}$$

Имеют место следующие утверждения (см. [12]), которые мы приводим в виде леммы.

Лемма 3. 1°. *Пусть $f(w)$ суммируема на $|w|=1$ и a_k — коэффициенты Фурье функции $f(w)$ по системе* (2).

Тогда имеет место разложение, равномерно сходящееся внутри $|w|<1$

$$\sum_{0}^{\infty} a_k\varphi_k(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)\,dt}{t-w}-\frac{B(w)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)\,dt}{B(t)(t-w)}, \tag{2.5}$$

где

$$B(w)=\prod_{0}^{\infty}\frac{\alpha_k-w}{1-\bar{\alpha}_k w}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$$

—произведение Бляшке с нулями в точках $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$.

2°. *Пусть $f(w)\in L_p$ $(p>1)$ на $|w|=1$, a_k имеют тот же смысл, что и выше. Тогда*

$$\left\|\sum_{0}^{n} a_k\varphi_k(w)\right\|_p\leqslant C_p\|f(w)\|_p, \tag{2.6}$$

где C_p—постоянная, зависящая от p.

Приведем также следующий частный случай общего критерия Г. Ц. Тумаркина [9] о возможности приближения функций на единичной окружности рациональными дробями, который для удобства ссылок сформулируем в качестве леммы.

Лемма 4. *Для того чтобы функция $f(w)\in L_p$ $(p>1)$ приближалась на $|w|=1$ в метрике L_p рациональными дробями с полюсами в точках $\{\overline{\alpha_k^{-1}}\}_0^{\infty}$, где $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$ удовлетворяют условию* (2.4), *необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на $|w|=1$ $f(w)$ совпадала с угловыми граничными значениями мероморфных в $|w|<1$ и в $|w|>1$ фунций ограниченного вида, соответственно $F^+(w)$ и $F^-(w)$ с дополнительными условиями*

$$F^+(w)\in H_p,\ F^-(w)\,w\,B^{-1}(w)\in H_p \text{ в } |w|>1^*.$$

Докажем теперь важную лемму о разложении производящей функции (1.8) при условии (2.3).

Лемма 5. *Пусть K— произвольный ограниченный континуум, $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^{\infty}$ — система М. М. Джрбашяна для K. Справедливы следующие разложения:*

---

* Аналитическая в $|w|>1$ функция $F(w)$ принадлежит пространству H_p в $|w|>1$, если $F\left(\frac{1}{w}\right)\in H_p$.

1.

$$\frac{1}{\psi(w)-z}=\sum_{0}^{\infty}M_k^{(1)}(z)\frac{1}{w}\overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)}+\frac{\Omega(w,z)}{B(w)},\ z\in\widetilde{U}; \tag{2.7}$$

2.

$$\frac{1}{\psi(w)-z}=\sum_{0}^{\infty}[M_k^{(1)}(z)-\varphi_k[\Phi(z)]\,\Phi'(z)]\,\frac{1}{w}\overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)}+$$

$$+\frac{\Omega(w,z)}{B(w)}+\frac{\Phi'(z)}{w-\Phi(z)},\ z\in G^{-}. \tag{2.8}$$

Ряды в правой части равенств (2.7) и (2.8) сходятся равномерно внутри $|w|>1$ и в любой метрике L_p $(p>1)$ на окружности $|w|=1$. Функция

$$\Omega(w,z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]} \tag{2.9}$$

принадлежит H_p в $|w|>1$ для любого $p>1$ и $z\overline{\in}\Gamma$.

Разложение (2.7) было установлено М. М. Джрбашяном [4] для $K=\overline{G^+}$, G^+ — жорданова область со спрямляемой границей, сходимость на $|w|=1$ была доказана в [4] в метрике L_2. Доказательство в общем случае опирается на леммы 3 и 4.

Доказательство леммы. Предположим вначале, что z — фиксированная точка, принадлежащая внутренности $\widetilde{K}$. Рассмотрим снова функцию $\chi^*(\zeta,z)$. Пользуясь тождеством М. М. Джрбашяна [4]

$$(1-\overline{t}\zeta)^{-1}=\sum_{0}^{n}\varphi_k(\zeta)\overline{\varphi_k(t)}+B_{n+1}(\zeta)\overline{B_{n+1}(t)}\,(1-\overline{t}\zeta)^{-1},$$

где

$$B_{n+1}(\zeta)=\prod_{0}^{n}\frac{\alpha_k-\zeta}{1-\overline{\alpha}_k\zeta}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k},$$

из интегральной формулы Коши получаем

$$\chi^*(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\chi^*(t,z)}{1-\overline{t}\zeta}|dt|=$$

$$=\sum_{0}^{n}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\chi^*(t,z)\,\overline{\varphi_k(t)}\,|dt|\right]\varphi_k(\zeta)+$$

$$+\frac{B_{n+1}(\zeta)}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{B_{n+1}(t)}\,\chi^*(t,z)}{1-\overline{t}\zeta}|dt|,\ |\zeta|<1. \tag{2.10}$$

Как было показано при доказательстве леммы 2

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\chi^*(t,z)\,\overline{\varphi_k(t)}\,|dt|=\overline{M_k^{(1)}(z)}\ (k=0,1,2,\cdots). \tag{2.11}$$

Кроме того
$$B_{n+1}(\zeta) \to B(\zeta) \text{ при } n \to \infty \tag{2.12}$$
равномерно внутри $|\zeta|<1$ и в метрике L_2 на $|\zeta|=1$ [10].

Используя (2.11) и (2.12), перейдем в (2.10) к пределу при $n \to \infty$, получим равномерно сходящееся внутри $|\zeta|<1$ разложение (см. [4])
$$\chi^*(\zeta, z) = \sum_0^\infty \overline{M_k^{(1)}(z)}\, \varphi_k(\zeta) + \frac{B(\zeta)}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \frac{\overline{B(t)}\,\chi^*(t, z)}{1-\bar{t}\zeta} |dt| \equiv$$
$$\equiv F_1(\zeta, z) + F_2(\zeta, z), \quad |\zeta|<1. \tag{2.13}$$
Рассмотрим функцию
$$F_1(\zeta, z) = \sum_0^\infty \overline{M_k^{(1)}(z)}\, \varphi_k(\zeta), \quad |\zeta|<1. \tag{2.14}$$
Нетрудно показать (см. [4]), что ряд (2.14) сходится на $|\zeta|=1$ в метрике L_2 к угловым граничным значениям $F_1(\zeta, z)$ изнутри единичной окружности. Отсюда по лемме 4 получаем, что $F_1(u, z)$ почти всюду на $|u|=1$ совпадает с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в $|\zeta|>1$ функции $F^-(\zeta, z)$ ограниченного вида, удовлетворяющей условию
$$\zeta B^{-1}(\zeta) F^-(\zeta, z) \in H_2 \text{ в } |\zeta|>1. \tag{2.15}$$

Заметим, что угловые граничные значения функции $F_2(\zeta, z)$ изнутри единичной окружности $|u|=1$, равные по теореме И. И. Привалова [8]
$$\frac{\chi^*(u, z)}{2} + \text{v. p. } \frac{B(u)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\overline{B(t)}\ \chi^*(t, z)}{1-\bar{t}u} |dt|,$$
принадлежат L_p для любого $p>1$, в силу того, что функция $\overline{B(u)}\,\chi^*(u, z)$ ограничена на $|u|=1$ (см. [11]; [7], стр. 176) и, значит по теореме В. И. Смирнова [8], $F_2(\zeta, z) \in H_p$ для любого $p>1$. Отсюда и из (2.13) непосредственно следует, что угловые граничные значения функции $F_1(\zeta, z)$ изнутри единичной окружности также принадлежат любому пространству L_p $(p>1)$, и по той же теореме В. И. Смирнова заключаем, что
$$F_1(\zeta, z) \in H_p, \quad \zeta B^{-1}(\zeta) F(\zeta, z) \in H_p \text{ в } |\zeta|>1 \tag{2.16}$$
для любого $p>1$. Из (2.16) вытекает по лемме 4, что функция $F_1(u, z)$ допускает приближение рациональными дробями с полюсами в точках $\{\overline{a_k^{-1}}\}_0^\infty$ в метрике L_p, поэтому, как следует из наших результатов [12], ряд (2.14) сходится на $|\zeta|=1$ в любой метрике L_p $(p>1)$.

Произведя в (2.13) замену $w=\overline{\zeta^{-1}}$, после несложных преобразований получим разложение (2.7). Из того, что $F_2(\zeta, z) \in H_p$ при любом $p>1$ и любом фиксированном $z \in \breve{U}$ непосредственно вытекает, что $\Omega(w, z) \in H_p$ в $|w|>1$ при любом $p>1$, $z\in \widetilde{U}$, и первая часть леммы установлена.

Пусть теперь z — фиксированная точка G^-. Рассмотрим снова функцию $\chi^*(\zeta, z)$, аналитическую в $|\zeta|<1$ за исключением точки $\zeta=\overline{\Phi^{-1}(z)}$, в которой $\chi^*(\zeta, z)$ имеет простой полюс. По теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\chi^*(t, z)}{t-\zeta}\,dt=\chi^*(\zeta, z)-\frac{1}{\psi'[\overline{\Phi(z)}]\,[1-\overline{\Phi(z)}\,\zeta]},\ |\zeta|<1.$$

Аналогично случаю $z\in\widetilde{U}$ здесь можно написать равенство

$$\chi^*(\zeta, z)-\frac{1}{\psi'[\overline{\Phi(z)}][1-\overline{\Phi(z)}\,\zeta]}=\sum_0^n\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\chi^*(t, z)\overline{\varphi_k(t)}\,|dt|\right]\varphi_k(\zeta)+$$

$$+\frac{B_{n+1}(\zeta)}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{B_{n+1}(t)}\,\chi^*(t, z)}{1-\bar{t}\,\zeta}\,|dt|,\ |\zeta|<1. \qquad (2.17)$$

Несложно показать, используя (1.21), что при $z\in G^-$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\chi^*(t, z)\,\overline{\varphi_k(t)}\,|dt|=\overline{M_k^{(1)}(z)-\varphi_k[\Phi(z)]\,\Phi'(z)}\ \ (k=0, 1, 2,\cdots).$$

Переходя в (2.17) к пределу при $n\to\infty$ и совершая замену переменной $w=\overline{\zeta^{-1}}$, приходим к разложению (2.8) внутри $|w|>1$.

Остальные утверждения второй части леммы могут быть доказаны аналогично доказательству первой части. Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема о сходимости рядов (2.1) при условии (2.3).

Теорема 4. *Пусть K — произвольный ограниченный континуум, $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ — система М. М. Джрбашяна для K.*

Ряд (2.1) *с коэффициентами* (2.2) *при условии* (2.3) *сходится равномерно внутри $\widetilde{U}\cup(G^-\setminus\{\omega_k\}_0^\infty)$ и имеют место равенства*

$$f_i(z)=\sum_0^\infty c_k\,M_k^{(1)}(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{\psi(w)-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,\Omega(w, z)}{B(w)}\,dw,\ z\in\widetilde{U}, \qquad (2.18)$$

$$f_e(z)=\sum_0^\infty c_k\,M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{\psi(w)-z}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,\Omega(w, z)}{B(w)}\,dw-\frac{\Phi'(z)\,B[\Phi(z)]}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(z)]},$$

$$z\in G^-\setminus\{\omega_k\}_0^\infty. \qquad (2.19)$$

Доказательство. Умножив обе части равенства (2.7) на $(2\pi i)^{-1}\gamma(w)\,dw$ и проинтегрировав вдоль единичной окружности, получим разложение (2.18). (Законность почленного интегрирования вытекает из того, что разложение (2.7) сходится на $|w|=1$ в метрике $L_{r/(r-1)}$).

Для того чтобы получить разложение (2.19), достаточно проделать ту же процедуру с равенством (2.8) и использовать равенство

$$-\sum_{0}^{\infty} c_k\varphi_k[\Phi(z)]+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{w-\Phi(z)}=$$

$$=\frac{B[\Phi(z)]}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)\,[w-\Phi(z)]},$$

непосредственно вытекающее из (2.5).

Покажем теперь, что ряд (2.1) сходится равномерно внутри $\widetilde{U}$. Аналогично (1.17) имеем при $z\in P$, P — произвольный компакт, принадлежащий $\widetilde{U}$

$$\left|\sum_{0}^{n} c_k M_k^{(1)}(z)\right|\leqslant[d(P)]^{-1}\left\|\sum_{0}^{n} c_k\varphi_k(w)\right\|_r. \qquad (2.20)$$

Из (2.20) и (2.6) вытекает, что

$$\left|\sum_{0}^{n} c_k M_k^{(1)}(z)\right|\leqslant C(P,r)\,\|\gamma(w)\|_r,$$

где $C(P, r)$—постоянная, зависящая от P и r, и последовательность частных сумм ряда (2.1) компакта в $\widetilde{U}$, откуда по теореме Витали следует равномерная сходимость ряда (2.1) внутри $\widetilde{U}$. Равномерная сходимость внутри $G^-\setminus\{\omega_k\}_0^\infty$ устанавливается аналогично. Теорема доказана.

В случае, когда $K=\overline{G^+}$ — замыкание жордановой области со спрямляемой границей, в условиях теоремы 4 можно утверждать наличие в известном смысле „моногенного" продолжения через кривую $\Gamma=\partial G^+$. В терминах работы Г. Шапиро [5] функции $f_i(z)$ и $f_e(z)$ являются псевдопродолжениями одна другой в широком смысле слова.

Теорема 5. *Пусть $K=\overline{G^+}$ — замыкание жордановой области со спрямляемой границей Γ, и справедливы условия теоремы* 4. *Тогда дополнительно к* (2.18) *и* (2.19) *имеем*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[f_i(\zeta_0+i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})-f_e(\zeta_0-i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})]=0, \qquad (2.21)$$

равномерно относительно $\psi_0\left(|\psi_0|\leqslant\frac{\pi}{2}\theta,\ 0<\theta<1\right)$, *где* φ_0 — *угол на-*

клона касательной к кривой Γ в точке ζ_0, причем (2.21) выполняется почти для всех точек $\zeta_0 \in \Gamma$.

Аналогичный результат доказан М. М. Джрбашяном [4] при условии (4) вместо условия (2.2).

Переход к общему случаю связан с дополнительными трудностями, о которых мы уже говорили во введении, поэтому доказательство теоремы 5 существенно отличается от доказательства в [4]. Это же замечание относится и к последующим теоремам § 3.

Доказательство. Пусть $z_1 \in G^+$, $z_2 \in G^-$. Рассмотрим разность $f_i(z_1) - f_e(z_2)$. Вычитая из (2.18) (2.19), имеем

$$f_i(z_1) - f_e(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_1}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_2}\,d\zeta +$$

$$+ \frac{\Phi'(z_2)\,B[\Phi(z_2)]}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(z_2)]} + \left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)}{B(w)}\,\Omega(w, z_2)\,dw - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)}{B(w)}\,\Omega(w, z_1)\,dw\right\}. \qquad (2.22)$$

Заметим теперь, что по теореме И. И. Привалова [8] угловые граничные значения извне единичной окружности $|w|=1$ функции $\Omega(w, z)$ равны

$$\text{v. p.}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]} + \frac{B(w)}{2[\psi(w)-z]}, \quad z \bar{\in} \Gamma. \qquad (2.23)$$

В дальнейшем знак v. p. мы будем опускать. Нам потребуется одно предложение относительно особых интегралов, которые легко можно вывести из одного результата М. Рисса [6]. А именно, если $f(t) \in L_p$, $\varphi(t) \in L_q$ на $|t|=1$ и $1/p + 1/q = 1$, то

$$\int\limits_{|t|=1} f(t)\,dt \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \int\limits_{|\tau|=1} \varphi(\tau)\,d\tau \int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{\tau - t}\,dt \qquad (2.24)$$

(см., например, [11], стр. 17).

Применяя (2.24), имеем, учитывая, что $\Omega(w, z) \in L_p$ для любого $p > 1$ на $|w|=1$ при $z \bar{\in} \Gamma$

$$\int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)}{B(w)}\,dw \int\limits_{|t|=1} \frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]} = \int\limits_{|t|=1} \frac{B(t)\,dt}{\psi(t)-z} \int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-t]} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)\,[w-\Phi(\zeta)]}, \quad z \bar{\in} \Gamma. \qquad (2.24')$$

Преобразуем теперь разность, стоящую в фигурных скобках в (2.22), используя (2.23) и (2.24′). Получим

$$\Delta(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_2}\,d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_2}\,d\zeta\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]} - \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_1}\,d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_1}\,d\zeta\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]}.$$

Пусть теперь $z_1 = \zeta_0 + i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, $z_2 = \zeta_0 - i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, где φ_0, ψ_0, ζ_0 из условия теоремы 5, $\varepsilon > 0$. Тогда по известному свойству интегралов типа Коши [8] при $\varepsilon \to 0^+$

$$\Delta(z_1, z_2) \to -\frac{\gamma[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2} - \frac{B[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta_0)]}.$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0^+$

$$f_i(z_1) - f_e(z_2) \to \gamma[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0) - \frac{\Phi'(\zeta_0)\,B[\Phi(\zeta_0)]\,\gamma[\Phi(\zeta_0)]}{2B[\Phi(\zeta_0)]} +$$

$$+\frac{B[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta_0)]} -$$

$$-\frac{\gamma[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2} - \frac{B[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta_0)]} = 0.$$

Теорема доказана.

§ 3. Разложение в ряды по системе $\{M_k^{(1)}\}_0^\infty$ при условии $\sum\limits_0^\infty (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < \infty$ (продолжение)

Мы будем считать в этом параграфе, что континуум K совпадает с замыканием жордановой области G^+ со спрямляемой границей, причем предполагается выполненным условие (2.3).

Приведем критерий представимости функции в G^+ рядом по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$.

Пусть $f(z)$ представима в G^+ интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,\quad g[\psi(w)]\,\psi'(w) \in L_r,\ r > 1. \tag{3.1}$$

Положим

$$c_k = c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1} g[\psi(w)]\,\psi'(w)\,\overline{\varphi_k(w)}\,|dw|\quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.2}$$

Теорема 6. *Для того чтобы* $f(z)$ *разлагалась в* G^+ *в ряд по системе* $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ *при условии* (2.3)

$$f(z)=\sum_0^\infty c_k(g)\,M_k^{(1)}(z),\quad z\in G^+, \tag{3.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало представление $f(z)$ *интегралом типа Коши*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{g_0(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^+, \tag{3.4}$$

с функцией плотности $g_0(\zeta)$, *совпадающей почти всюду на* Γ *с угловыми граничными значениями извне* Γ *мероморфной функции вида*

$$\frac{B[\Phi(z)]\,\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,\bar F\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right),\quad z\in G^-, \tag{3.5}$$

где $F(w)\in H_r$.

Теорема 6 доказана М. М. Джрбашяном [4] при $r=2$. Для системы $\{M_k^*(z)\}_0^\infty$ впервые подобная теорема была установлена Г. Ц. Тумаркиным [2].

Доказательство. Применим равенство (2.18) к $\gamma(w)=g[\psi(w)]\,\psi'(w)$. Имеем при $z\in G^+$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)}\,\Omega(w,z)\,dw+$$

$$+\sum_0^\infty c_k(g)\,M_k^{(1)}(z), \tag{3.6}$$

где $c_k(g)$ определяются из формул (3.2).

Из (3.6) ясно, что $f(z)$ разлагается в ряд (3.3) в G^+ тогда и только тогда, когда интеграл, стоящий в правой части равенства (3.6) тождественно по $z\in G^+$ равен нулю.

Пусть теперь $f(z)$ допускает специальное представление (3.4). Тогда этот интеграл равен

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{B(w)\,\Phi'[\psi(w)]\,\psi'(w)}{w\,B(w)}\,\bar F\left(\frac{1}{w}\right)\Omega(w,z)\,dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{1}{w}\,\bar F\left(\frac{1}{w}\right)\Omega(w,z)\,dw\equiv 0,\quad z\in G^+,$$

так как $\Omega(w,z)\in H_p$ в $|w|>1$ для любого $p>1$ и имеет нуль при $w=\infty$.

Обратно, пусть интеграл в правой части (3.6) тождественно по $z\in G^+$ равен нулю. Запишем этот факт более подробно.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)}\left[\frac{B(w)}{2[\psi(w)-z]}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]}\right]\times$$
$$\times\, dw\equiv 0,\ z\in G^{+}. \tag{3.7}$$

Используя (2.24′), после несложных преобразований получим из (3.7)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\equiv 0,\ z\in G^{+}, \tag{3.8}$$

где

$$\rho(\zeta)=\frac{g(\zeta)}{2}+\frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]}\,.$$

Обозначим

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)[w-t]}\,dw,\ |t|>1.$$

По теореме И. И. Привалова [8]

$$B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)\,F[\Phi(\zeta)]=-g(\zeta)/2+$$
$$+\frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]}\,dw. \tag{3.9}$$

Для окончания доказательства осталось заметить, что, как следует из (3.8) и (3.9)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)-\rho(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in G^{+},$$

$$g(\zeta)-\rho(\zeta)=-B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)\,F[\Phi(\zeta)],\ \zeta\in\Gamma.$$

Функция $F(t)\in H_r$ в $|t|>1$ и имеет на бесконечности нуль. Таким образом $F(t)=t^{-1}\,\tilde F(t^{-1})$, где $\tilde F(w)\in H_r$ в $|w|<1$. Теорема доказана.

Нетрудно, проследив доказательство теоремы 6 и учитывая замечание к теореме 2, прийти к следующему утверждению.

Теорема 6′. *Пусть $f(z)$ представима в G^{+} интегралом типа Коши* (1.21), *кривая Γ удовлетворяет условию* (1.22).

Для того чтобы $f(z)$ разлагалась в G^{+} в ряд (3.3) *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $r>1$, что $f(z)$ представляется в G^{+} интегралом типа Коши* (3.4) *с функцией плотности, удовлетворяющей условию* (3.5).

М. М. Джрбашян [3], [4] ввел класс $\lambda_2\{G^{+}, G^{-}, \omega_k\}$ в известном смысле „моногенных“ функций и показал, что система $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^{\infty}$ образует базис в пространстве $\lambda_2\{G^{+}, G^{-}, \omega_k\}$.

Мы определим аналогично [3], [4] класс функций $\lambda_r\{G^{+}, G^{-}, \omega_k\}$ $(r>1)$ и покажем в частности, что система $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^{\infty}$ образует базис в любом пространстве $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$ $(r>1)$, откуда, учитывая включение $\lambda_{r_1}\{G^+, G^-, \omega_k\}\subset\lambda_{r_2}\{G^+, G^-, \omega_k\}$ при $r_1>r_2>1$, получаем, что система $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ — базис в более широких классах „моногенных" функций, чем в [3] и [4].

Определение. Предполагая выполненным условие (2.3), через $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$ $(r>1)$ будем обозначать класс функций $f(z)$, определенных на $G^+\cup G^-\diagdown\{\omega_k\}_0^\infty$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1. $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^+,$$

2. $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+F(z),\quad z\in G^-\diagdown\{\omega_k\}_0^\infty;$$

3. $g(\zeta)=F(\zeta)$ почти всюду на Γ, где $F(z)$ — мероморфная в G^- функция следующего вида:

$$F(z)=\frac{B[\Phi(z)]\,\Phi'(z)}{\Phi(z)}\tilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right),\ \text{где}\ \tilde{F}(w)\in H_r.$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 7. *Класс функций $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$ $(r>1)$ совпадает с множеством функций, представимых в $G^+\cup G^-\diagdown\{\omega_k\}_0^\infty$ рядами*

$$\sum_0^\infty c_k M_k^{(1)}(z),\tag{3.10}$$

где

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}\gamma(w)\overline{\varphi_k(w)}\,|dw|,\quad \gamma(w)\in L_r\ (k=0,1,2,\cdots).\tag{3.11}$$

Теорема 7 доказана ранее М. М. Джрбашяном [4] при условии $r=2$.

Доказательство. Заметим вначале, что сумма ряда (3.10) с коэффициентами (3.11) (сходимость которого вытекает из теоремы 5) представляется в G^+ интегралом типа Коши.

В самом деле, из (2.18) имеем, используя (2.24')

$$\sum_0^\infty c_k M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)}{B(w)}\,dw\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]}-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\overline{g}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^+,\tag{3.12}$$

где

$$\bar{g}(\zeta)=\frac{\gamma\,[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{2}-\frac{B\,[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]},\ \zeta\in\Gamma.$$

Из (2.19) аналогичным образом выводим при $z\in G^-\diagdown\{\omega_k\}_0^\infty$

$$\sum_0^\infty c_k\,M_k^{(1)}(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{\Phi'(z)\,B\,[\Phi(z)]}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(z)]}. \quad (3.13)$$

Из (2.12) и (2.13) следует, что сумма ряда (3.10) принадлежит классу $\lambda_r\,\{G^+,\ G^-,\ \omega_k\}$, поскольку функция

$$F(z)=\frac{\Phi'(z)\,B\,[\Phi(z)]}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)\,[w-\Phi(z)]},\ z\in G^-,$$

удовлетворяет пункту 3 определения $\lambda_r\,\{G^+,\ G^-,\ \omega_k\}$.

Пусть теперь функция $f(z)\in\lambda_r\,\{G^+,\ G^-,\ \omega_k\}$. По теореме 6 имеет место разложение при $z\in G^+$

$$f(z)=\sum_0^\infty c_k(g)\ M_k^{(1)}(z). \quad (3.14)$$

Но ряд (3.14) по теореме 5 сходится также внутри $G^-\diagdown\{\omega_k\}_0^\infty$. В силу определения класса $\lambda_r\,\{G^+,\ G^-,\ \omega_k\}$ $f(z)$ при $z\in G^-$ является псевдоаналитическим продолжением $f(z)$ при $z\in G^+$. Этим же свойством обладает сумма ряда

$$\sum_0^\infty c_k(g)\ M_k^{(1)}(z).$$

Отсюда, в силу свойства единственности псевдоаналитического продолжения (которое легко вывести из теоремы Лузина-Привалова [8]) и в силу равенства (3.14), имеем

$$f(z)=\sum_0^\infty c_k(g)\,M_k^{(1)}(z),\quad z\in G^-\diagdown\{\omega_k\}_0^\infty.$$

Теорема доказана.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических
измерений

Поступила 20.XII.1972

Ա. Մ. ԼՈՒԿԱՑԿԻ. Ըստ Մ. Մ. Ջրբաշյանի ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգի, շարքերի վերլուծման մասին *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանը [1], [3], [4] աշխատանքներում կառուցել է ուղղելի եզրով տված ժորդանյան տիրույթի համար ռացիոնալ ֆունկցիաների հատուկ համակարգեր՝ $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0 < s < 1)$:

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է ըստ Մ. Մ. Ջրբաշյանի կամայական կոնտինուումի համար կառուցված $\{M_n^{(1)}(z)\}_0^\infty$ համակարգի շարքերի վերլուծության զուգամիտությունը, գործակիցների վրա ավելի ընդհանուր պայմանների դեպքում, քան [3] և [4] աշխատանքներում։

A. M. LUKACKIĬ. *On the expansion in series by M. M. Džrbašian's system of rational functions* (summary)

The spetial systems $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0 < s < 1)$ of rational functions for a given Jordanian domain with rectifiable boundary were constructed by M. M. Džrbašian in [1], [3], [4]. In this paper the convergence of the series expansion by M. M. Džrbašian's system $\{M_n^{(1)}(z)\}_0^\infty$, in studied for an arbitrary continuum under looser conditions on the coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О разложении аналитических функций в ряд по рациональным, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат., 10:1, 1957, 21—29.
2. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат., 14: 1, 1961, 9—31.
3. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 143: 1, 1962, 17—20.
4. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
5. *H. S. Shapiro.* Generalized analytic continuation, Fifth Matscience Symposium, Plenum Press, New York, 1968.
6. *M. Risz.* Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschr, Bd 27, 1927.
7. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948.
8. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
9. *Г. Ц. Тумаркин.* Описание класса функций, допускающих приближение дробями с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер., матем., 1, № 2, 1966.
10. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация функций в комплексной области, М., 1961.
11. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, Тр. Тбил. матем. ин-та, 23, 1956.
12. *А. М. Лукацкий.* Разложения в ряды по системе рациональных функций, мат., 90 (132), № 4, 1973.
13. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации, М., 1965.