

А. А. ПЕТРОСЯН

ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ЗАДЕРЖКОЙ ИНФОРМАЦИЙ У ИГРОКА P

В обширной литературе по теории дифференциальных игр в основном рассматривались игры с полной информацией, в которых игроки P (преследователь) и E (преследуемый) в каждый момент времени t при выборе управлений $u \in U \subset R^l$, $v \in V \subset R^k$ имеют информацию о состоянии процесса t , $x(t)$, $y(t)$. Иногда дополнительно предполагалось, что один из игроков имеет информацию об управляющей переменной, выбираемой противником. В случае, когда движения игроков P и E независимы, т. е. уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{y} = g(y, v), \quad (1)$$

$x \in R^n$, $y \in R^n$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ и игра имеет предписанную продолжительность T , доказаны теоремы, гарантирующие существование ситуаций ϵ -равновесия для любого $\epsilon > 0$ в классе чистых (нерандомизированных) стратегий (см. [1], [2], [3]). Много сделано также для получения эффективных способов нахождения самих ϵ -оптимальных стратегий (см. [4], [5], [6]). При этом наиболее ощутимые результаты получены в задачах, где оптимальная стратегия E оказывается просто функцией времени. Хотя проблема еще далеко не исчерпана, дальнейшее развитие упомянутых методов сталкивается с обычными комбинаторными трудностями, которые присущи играм с полной информацией.

В то же время с точки зрения приложений предположение о наличии у игроков полной информации является сильной идеализацией.

Поэтому представляется целесообразным постановка и изучение дифференциальных игр преследования с неполной информацией. К числу таких игр относится игра преследования с предписанной продолжительностью с задержкой информации у игрока P .

Состояние информации в игре следующее. Задано некоторое число $l > 0$, называемое задержкой информации. При $0 \leq t \leq l$ игрок P в каждый момент времени t знает свое состояние $x(t)$, время t и состояние игрока E в начальный момент y_0 . При $l < t \leq T$, P в каждый момент t знает свое состояние $x(t)$, время t и состояние игрока E в момент $t-l$, $y(t-l)$. E в каждый момент времени t знает $x(t)$, $y(t)$, t . Выигрыш E равен $\rho(x(T), y(T))$. Игра антагонистическая. Обозначим эту игру через $\Gamma(x_0, y_0, T)$.

Кусочно-программные чистые стратегии. Под кусочно-программной чистой стратегией игрока E , $v(\cdot)$, мы будем понимать пару $[\tau, b]$, где τ — разбиение отрезка времени $[0, T]$ конечным

числом точек $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_s = T$ и b — отображение, которое каждому состоянию $x(t_k)$, $y(t_k)$, t_k ставит в соответствие отрезок измеримого программного управления $v(t)$ игрока E , при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Под кусочно-программной чистой стратегией игрока P , $u(\cdot)$, мы будем понимать пару $\{\sigma, \alpha\}$, где σ — произвольное разбиение отрезка времени $[0, T]$ конечным числом точек $0 = t'_1 < t'_2 < \dots < t'_k = T$ и α — отображение, которое каждому состоянию $x(t_k)$, $y(t_k - l)$, t_k , при $t_k > l$ ставит в соответствие отрезок измеримого программного управления игрока P , $u(t)$, при $t \in [t_k, t_{k+1})$; при $t_k < l$ отображение α ставит в соответствие каждому состоянию $x(t_k)$, y_0 , t_k отрезок измеримого управления игрока P , $u(t)$, при $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Множество всех кусочно-программных чистых стратегий игроков P и E мы будем обозначать, соответственно, через P и E .

Игра развивается в соответствии с уравнениями движения (1), при этом мы будем предполагать выполненными все условия, гарантирующие существование и единственность решения системы (1) на отрезке $[0, T]$ для любой пары измеримых программных управлений $u(t)$, $v(t)$. Это гарантирует существование единственного решения системы (1) при применении игроками P и E кусочно-программных стратегий $u(\cdot) \in P$, $v(\cdot) \in E$ и при заданных начальных условиях x_0, y_0 .

Таким образом, в любой ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$ при заданных начальных условиях x_0, y_0 функция выигрыша определяется однозначно

$$K(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot)) = \rho(x(T), y(T)), \quad (2)$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решение системы (1) из начальных состояний x_0, y_0 в ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$, а ρ — евклидово расстояние.

Хорошо известно, и это можно показать на простейших примерах, что, вообще говоря

$$\sup_{v(\cdot) \in E} \inf_{u(\cdot) \in P} K(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot)) \neq \inf_{u(\cdot) \in P} \sup_{v(\cdot) \in E} K(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot)), \quad (3)$$

поскольку рассматриваемая игра $\Gamma(x_0, y_0, T)$ не является игрой с полной информацией. Из (3) следует, что, вообще говоря, ε -ситуации равновесия в этой игре существуют не для всех $\varepsilon > 0$. Поэтому мы пойдем по пути, предложенному Ф. Нейманом и О. Моргенштерном для конечных позиционных игр с неполной информацией. Мы расширим пространства стратегий P, E до так называемых смешанных кусочно-программных стратегий поведения (СКПСП), которые включают в себя возможность случайного выбора управления на каждом шаге. Далее мы покажем, что в таком классе стратегий равенство (3) выполняется.

СКПСП. Под СКПСП игрока P мы будем понимать пару $\mu(\cdot) = \{\tau, \alpha\}$, где τ — произвольное разбиение отрезка времени $[0, T]$ конечным числом точек $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = T$, и α — отображение, ставящее в соответствие состоянию $x(t_k)$, $y(t_k - l)$, t_k , при $t_k > l$, и состоянию $x(t_k)$, y_0 , t_k при $t_k < l$ вероятностное распределение $\alpha_k(\cdot)$, сосредоточенное на конечном числе измеримых программных управлений

$u(t)$, при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Аналогично под СКПСП игрока E мы будем понимать пару $v(\cdot) = \{\alpha, \beta\}$, где α есть произвольное разбиение отрезка времени $[0, T]$ конечным числом точек $0 = t_1' < t_2' < \dots < t_s' = T$ и β отображение, ставящее в соответствие состоянию $x(t_k)$, $y(t_k)$, t_k вероятностное распределение $\nu_k(\cdot)$, сосредоточенное на конечном числе измеримых программных управлений $v(t)$, при $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Множества СКПСП игроков P и E мы будем обозначать соответственно через $\bar{P}$ и $\bar{E}$.

Каждая пара СКПСП $(\mu(\cdot), \nu(\cdot))$ при фиксированных начальных условиях x_0, y_0 индуцирует распределение вероятностей на пространстве кусочно-программных стратегий $u(\cdot), v(\cdot)$, поэтому под выигрышем $M(x_0, y_0; \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ в СКПСП мы будем понимать математическое ожидание выигрыша $K(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot))$, усредненное по распределениям на пространствах P, E , которые индуцируются СКПСП $\mu(\cdot), \nu(\cdot)$.

Определив пространства стратегий $\bar{P}, \bar{E}$ и выигрыш M , мы для некоторых начальных условий x_0, y_0, T определили смешанное расширение $\bar{\Gamma}(x_0, y_0, T)$ игры $\Gamma(x_0, y_0, T)$.

Введем в рассмотрение следующую вспомогательную величину. Пусть $C_E^T(y)$ — множество достижимости игрока E . Обозначим через $\bar{C}_E^T(y)$ выпуклую оболочку множества $C_E^T(y)$. Положим

$$\gamma(y, T) = \min_{\eta' \in \bar{C}_E^T(y)} \max_{\eta'' \in C_E^T(y)} \rho(\eta', \eta''). \quad (4)$$

Пусть $\gamma(y, T)$ достигается в точках $(\bar{y}, \bar{y})$, так что

$$\min_{\eta' \in \bar{C}_E^T(y)} \max_{\eta'' \in \bar{C}_E^T(y)} \rho(\eta', \eta'') = \rho(\bar{y}, \bar{y}). \quad (5)$$

Из определения $\bar{y}$ следует, что это центр минимальной сферы, содержащей множество $C_E^T(y)$. Отсюда получаем, что точка $\bar{y}$ единственна. В то же время существуют по крайней мере две точки касания этого множества с минимальной содержащей его сферой, которые совпадают с точками $\bar{y}$.

Пусть $y(t)$ — некоторая траектория игрока E , $y(0) = y_0$, $0 \leq t \leq T$. Когда E перемещается вдоль $y(t)$, величина $\gamma(y(t), T - t)$ также изменяется. Пусть $\bar{y}(t)$ — траектория точки $\bar{y}$ из (5), соответствующая траектории $y(t)$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь случай, когда для всех траекторий $y(t)$, $\bar{y}(T) \in C_P^T(x)$. Назовем точку $\bar{M}$ центром преследования, если в ней достигается

$$\gamma(\bar{M}, l) = \max_{y' \in C_E^{T-l}(y)} \gamma(y', l).$$

Таким образом

$$\gamma(\bar{M}, l) = \max_{y' \in C_E^{T-l}(y)} [\min_{\eta' \in \bar{C}_E^T(y')} \max_{\eta'' \in C_E^l(y')} \rho(\eta' \cdot \eta'')].$$

Рассмотрим вспомогательную одновременную игру преследования на выпуклой оболочке множества $C_E^T(y)$. Игрок P выбирает некоторую точку $\eta' \in \bar{C}_E^T(y)$ и игрок E выбирает точку $\eta'' \in C_E^l(y)$. Выборы совершаются одновременно, и игрок P при выборе η' не знает выбора η'' и наоборот. Игрок E выигрывает величину $\rho(\eta', \eta'')$. Обозначим значение этой игры через $V(y, T)$, чтобы подчеркнуть зависимость значения от параметров y, T , определяющих множества стратегий игроков P и E , $\bar{C}_E^T(y)$ и $C_E^l(y)$. Игра в нормальной форме записывается следующим образом:

$$\Gamma(y, T) = \langle C_E^T(y), C_E^l(y), \rho(y', y'') \rangle.$$

Множество стратегий минимизирующего игрока P , $\bar{C}_E^T(y)$ выпукло как выпуклая оболочка множества $C_E^T(y)$, функция $\rho(y', y'')$ также выпукла по своим аргументам и непрерывна. Для таких игр мы можем применить следующую теорему (см. [7]).

Теорема 1. В игре $\Gamma(y, T)$ существует ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Оптимальная стратегия P — чистая, а оптимальная стратегия E предписывает положительную вероятность не более, чем $n+1$ -ой точке множества $C_E^l(y)$ ($C_E^l(y) \subset R^n$). Значение игры равно

$$V(y, T) = \min_{\eta' \in \bar{C}_E^T(y)} \max_{\eta'' \in C_E^l(y)} \rho(\eta', \eta'')$$

или $\gamma(y, T) = V(y, T)$.

Таким образом получаем, что оптимальная стратегия P в игре $\Gamma(y, T)$ совпадает с выбором точки y (которая единственная), а оптимальная стратегия игрока E предписывает положительные вероятности не более, чем $n+1$ точке из точек $\bar{y}$ касания минимальной сферы, содержащей множество $C_E^l(y)$, с центром в точке $\bar{y}$. Значение игры равно радиусу этой сферы.

Рассмотрим одновременную игру $\Gamma(\bar{M}, l)$, где $\bar{M}$ — центр преследования, определенный в (6). Обозначим через $\bar{y}_1(\bar{M}), \dots, \bar{y}_{n+1}(\bar{M})$ точки из $C_E^l(\bar{M})$, которые входят в спектр оптимальной смешанной стратегии E в $\Gamma(\bar{M}, l)$ и через $\bar{y}(\bar{M})$ — центр минимальной сферы, содержащей множество $\bar{C}_E^l(\bar{M})$, т. е. оптимальную стратегию P в игре $\Gamma(\bar{M}, l)$.

Определение. Траектория $y_k^*(t)$ называется условно-оптимальной, если $y^*(0) = y_0$, $y^*(T-l) = \bar{M}$, $y^*(T) = \bar{y}_k$ для некоторого k из $k=1, \dots, n+1$. Для каждого k может существовать несколько условно-оптимальных траекторий игрока E .

Теорема 2. Пусть $T \gg l$ и для любого $\varepsilon > 0$ игрок P к моменту времени T может гарантировать ε -встречу с центром $\bar{y}(t)$ минимальной сферы, содержащей множество $C_E^l(y(t))$, тогда игра $\Gamma(x_0, y_0, T)$ имеет ситуацию равновесия в кусочно-программных смешанных стратегиях. ε -оптимальная стратегия игрока P — чистая и совпадает с любой стратегией P , гарантирующей $\frac{1}{2}\varepsilon$ -встречу с точкой $\bar{y}(t)$; оптимальная стратегия игрока E — смешанная: в течение времени $0 \leq t \leq T-l$ перемещаться в точку $\bar{M}$ по любой из условно-оптимальных траекторий $y^*(t)$ и далее выбирать с вероятностями $p_1, \dots, p_{n+1}$ (оптимальная стратегия E в игре $\Gamma(\bar{M}, l)$) одну из условно-оптимальных траекторий, переводящих точку $y^*(T-l) = \bar{M}$ в точки $\bar{y}_k(\bar{M})$, $k=1, \dots, n+1$, входящие в спектр оптимальной смешанной стратегии игрока E в игре $\Gamma(\bar{M}, l)$. Значение игры при этом равно $\gamma(\bar{M}, l)$.

Доказательство. Обозначим через $u_*(\cdot)$ одну из стратегий игрока P , существование которой предполагается в теореме, и через $v^*(\cdot)$ СКПСИ игрока E , оптимальность которой мы собираемся показать. Необходимо доказать, что

$$M(x_0, y_0; \mu(\cdot), v^*(\cdot)) + \varepsilon \geq M(x_0, y_0; u_*(\cdot), v^*(\cdot)) > \\ > M(x_0, y_0; u_*(\cdot), v(\cdot)) - \varepsilon \quad (7)$$

для всех $\mu(\cdot), v(\cdot)$. Известно, однако (см. [8]), что для доказательства справедливости (7) достаточно доказать (7) не для всех СКПСИ, а только для чистых КПС игроков P и E , т. е. достаточно доказать, что

$$M(x_0, y_0; u(\cdot), v^*(\cdot)) + \varepsilon > M(x_0, y_0; u_*(\cdot), v^*(\cdot)) > \\ > M(x_0, y_0; u_*(\cdot), v(\cdot)) - \varepsilon, \quad (8)$$

для всех $u(\cdot) \in P, v(\cdot) \in E$. Обозначим через $x^*(t)$ траекторию P в ситуации $(u_*(\cdot), v^*(\cdot))$. Тогда

$$M(x_0, y_0; u_*(\cdot), v^*(\cdot)) = \sum_{k=1}^{n+1} p_k p(x^*(T), \bar{y}_k). \quad (9)$$

Пусть R — радиус минимальной сферы, содержащей множество $C_E^l(\bar{M})$, т. е. $R = \gamma(\bar{M}, l)$, тогда $R - \varepsilon \leq p(x^*(T), \bar{y}_k) \leq R + \varepsilon$ для всех $k=1, \dots, n+1$. Из (9) имеем $\left(\sum_{k=1}^{n+1} p_k = 1 \right)$

$$R - \varepsilon \leq M(x_0, y_0; u_*(\cdot), v^*(\cdot)) \leq R + \varepsilon. \quad (10)$$

Пусть теперь $Q(\cdot)$ — вероятностная мера, индуцированная СКПСИ $v(\cdot)$ на множестве $C_E^l(\bar{M})$. Из оптимальности смешанной стратегии $p = (p_1, \dots, p_{n+1})$ в игре $\Gamma(\bar{M}, l)$ имеем, что

$$R = \sum_{k=1}^{n+1} p_k \rho(\bar{M}, \bar{y}_k) > \int_{C_E^I(\bar{M})} \rho(\bar{M}, y) dQ. \quad (11)$$

Однако $\rho(x^*(T), \bar{M}) \leq \varepsilon$, поэтому

$$\rho(x^*(T), y) \leq \varepsilon + \rho(\bar{M}, y) = R + \varepsilon. \quad (12)$$

Из (10), (11), (12) имеем

$$M(x_0, y_0; u_i^*(\cdot), v^*(\cdot)) > \int_{C_E^I(M)} \rho(x^*(T), y) dQ - \varepsilon, \quad (14)$$

однако

$$\int_{C_E^I(\bar{M})} \rho(x^*(T), y) dQ = M(x_0, y_0; u_i^*(\cdot), v^*(\cdot)). \quad (15)$$

Из (14) и (15) получаем правую часть неравенства (7). Левая часть (8) непосредственно следует из определения стратегии $u_i^*(\cdot)$.

Замечание. При $T < l$ решение игры существенно не отличается и формулировка теоремы сохраняет силу, если вместо $C_E^I(y_0)$, $\bar{C}_E^I(y_0)$, $\gamma(\bar{M}, l)$, $y(T-l)$ понимать соответственно $C_E^I(y_0)$, $\bar{C}_E^I(y_0)$, $\gamma(\bar{M}, T)$, y_0 .

При $l \rightarrow 0$ диаметр $D[C_E^I(\bar{M})]$ множества $C_E^I(\bar{M})$ стремится к нулю, что, в свою очередь, влечет стремление к нулю значения вспомогательной игры $\Gamma(\bar{M}, l)$. Однако значение вспомогательной одно-временной игры $\Gamma(\bar{M}, l)$ относительно множеств $\bar{C}_E^I(\bar{M})$, $C_E^I(\bar{M})$ равно значению игры преследования с задержкой информации l , которое мы обозначим $\text{Val } \Gamma(x_0, y_0, T) = V_l(x_0, y_0, T)$ (здесь индекс l означает задержку информации).

Отсюда имеем

$$\lim_{l \rightarrow 0} V_l(x_0, y_0, T) = 0. \quad (16)$$

Поскольку $\lim_{l \rightarrow 0} D[C_E^I(\bar{M})] = 0$, то смешанная оптимальная стратегия E в игре $\Gamma(\bar{M}, l)$, сосредотачивающая свою массу на не более чем $n+1$ точках из $C_E^I(\bar{M})$ в пределе сосредотачивает всю массу в одной точке $\bar{M}$, т. е. превращается в чистую стратегию. Это, в свою очередь, влечет существование, при $l \rightarrow 0$ чистой оптимальной стратегии E в игре $\Gamma(x_0, y_0, T)$, что вполне согласуется с тем фактом, что при $l \rightarrow 0$ игра $\Gamma(x_0, y_0, T)$ превращается в игру с полной информацией.

Простейшим примером развитой в настоящей работе теории является пример простого преследования, опубликованный в заметке [9].

Пример 1. Уравнения движения имеют вид

$$P: \dot{x} = u, |u| \leq \alpha,$$

$$E: \dot{y} = v, |v| < \beta, \alpha > \beta, x \in R^1, y \in R^2.$$

Пусть x_0, y_0 — начальное состояние игры, время T удовлетворяет условию

$$T > \frac{\rho(x_0, y_0)}{\alpha - \beta} + l \quad (17)$$

(здесь ρ — евклидово расстояние между точками x_0, y_0). Множество достижимости $C_E^l(y_0) = \bar{C}_E^l(y_0)$ и совпадает с кругом с центром y_0 и радиусом βt . Значение игры $\Gamma(y, l)$ равно радиусу круга $C_E^l(y)$, т. е.

$$\text{Val } \Gamma(y, l) = \beta l. \quad (18)$$

Мы видим, что $\text{Val } \Gamma(y, l)$ не зависит от y , следовательно любая точка множества $C_E^{T-l}(y_0)$ может служить в качестве точки $\bar{M}$. Оптимальная стратегия P в игре $\Gamma(y, l)$ заключается в выборе y , а оптимальная стратегия E — смешанная и заключается в выборе двух любых диаметрально противоположных точек круга $C_E^l(y)$ с вероятностями $(1/2, 1/2)$.

В соответствии с этим, оптимальная чистая стратегия P в игре $\Gamma(x_0, y_0, T)$ заключается в погонном наделении на точку $y(t-l)$, $l \leq t \leq T$ (при $0 \leq t < l$ на точку y_0) до встречи с этой точкой и до момента T оставаться в ε -окрестности этой точки. Оптимальная стратегия E есть КПССП и заключается в течении времени $T-l$ в переходе из y_0 в произвольную точку $\bar{M} \in C_E^{T-l}(y_0)$ и далее в выборе двух направлений на две диаметрально противоположные точки круга $C_E^l(\bar{M})$ с вероятностями $(1/2, 1/2)$.

При этом

$$\text{Val } \Gamma(x_0, y_0, l) = \beta l.$$

Очевидно имеем

$$\lim_{l \rightarrow 0} V_l(x_0, y_0, T) = \lim_{l \rightarrow 0} \beta l = 0$$

и в предельной игре с полной информацией P , для любого $\varepsilon > 0$, гарантирует ε -встречу с E , в то же время при $l > 0$, P может гарантировать встречу на расстоянии не менее чем βl .

Пример 2. Уравнения движения имеют вид

$$P: \begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \end{aligned} \quad u_1^2 + u_2^2 \leq \alpha^2, \quad (19)$$

$$E: \begin{aligned} \dot{y}_1 &= v y_2 + y_1, \\ \dot{y}_2 &= -1, \end{aligned} \quad -1 \leq v \leq +1. \quad (20)$$

Множество достижимости игрока P то же, что и в игре из примера 1. Найдем множество достижимости игрока E . Имеем

$$y_2(t) = y_2(0) - t, \quad (21)$$

положим $v = +1$ и подставим (21) в первое из уравнений (20).
Получим

$$y_1(t) = t + 1 + y_2(0) + [y_1(0) + y_2(0) - 1] e^t. \quad (22)$$

Полагая $v = -1$, получим

$$y_1(t) = -t - 1 + y_2(0) + [y_1(0) - y_2(0) + 1] e^t. \quad (23)$$

Можно показать, что множество достижимости $C_E^T(y_1(0), y_2(0))$ совпадает с отрезком, соединяющим точки

$$\begin{aligned} A &= t + 1 - y_2(0) + (y_1(0) + y_2(0) - 1) e^t, \\ B &= -t - 1 + y_2(0) + (y_1(0) - y_2(0) + 1) e^t. \end{aligned}$$

Радиус минимальной сферы, содержащей $C_E^T(y_1(0), y_2(0))$ равен половине длины отрезка $[A, B]$

$$R[C_E^T(y_1(0), y_2(0))] = |1 - y_2(0) + t - (1 - y_2(0)) e^t|.$$

Таким образом, значение вспомогательной одновременной игры $\Gamma(y_1(0), y_2(0); l)$ равно

$$\text{Val } \Gamma(y_1(0), y_2(0); l) = |1 - y_2(0) + l - (1 - y_2(0)) e^l|.$$

Для того чтобы найти значение игры преследования надо определить

$$\begin{aligned} & \max_{(y_1, y_2) \in C_E^{T-l}(y_1(0), y_2(0))} \text{Val } \Gamma(y_1, y_2; l) = \\ & = \max_{(y_1, y_2) \in C_E^{T-l}(y_1(0), y_2(0))} |1 - y_2 + l - (1 - y_2) e^l|. \end{aligned} \quad (24)$$

Однако множество достижимости $C_E^{T-l}(y_1(0), y_2(0))$ состоит только из точек вида $\{y_1, y_2 = y_2(0) - T + l\}$, поэтому максимум в (24) равен просто

$$|1 + T - y_2(0) - (1 + T - l - y_2(0)) e^l|.$$

Оптимальная стратегия P заключается в преследовании центра множества достижимости $C_E^l(y_1, y_2)$ (середина отрезка $[A, B]$). (Предполагается, что за время T , P может гарантировать встречу с этим центром).

Оптимальная стратегия E , при $t \in [0, T-l]$ произвольна, в момент времени $T-l$, E выбирает с вероятностями $1/2, 1/2$ одно из двух возможных значений управления $v = +1, v = -1$, на оставшемся промежутке времени $(T-l, T]$ игрок E выбирает $v(t)$ тождественно равное управлению, выбранному им в момент $T-l$ в результате применения случайного механизма.

1. Հ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Հետապնդման խաղեր P խաղացողի տեղեկության ուշացումով (ամփոփում)

Դիտվում է P խաղացողի տեղեկության ուշացումով դիֆերենցիալ խաղերի մի դաս: Խաղի լուծումը գտնվում է խառ վարելակերպերի (ստրատեգիաների) դասում: Ապացուցվում է լուծման գոյությունը և տրվում է կոնստրուկտիվ մեթոդ վերջինս գտնելու համար:

L. A. PETROSIAN. Pursuit games with an information lag (summary)

We consider pursuit games with perscribed duration T and information lag l about the evaders position. The payoff is equal to the distance between the players at moment T . The game has incomplete information, thus no solution in pure strategies exists. We prove that there exist the optimal mixed strategy for the evader and an optimal pure strategy for the pursuer, and give a constructive method of finding this strategies,

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. Н. Петров. О существовании значения игры преследования, ДАН СССР, 190, № 6, 1970.
2. О. А. Малафеев. О существовании обобщенного значения игры преследования, Управляемые системы, вып. 4—5, 1970.
3. P. P. Varaiya. On the existence of solutions to a differential game, SIAM Journal on Control, vol. 5, 1967.
4. Н. Н. Красовский. Игровые задачи о встрече движений, изд. „Наука“, 1970.
5. Б. Н. Пшеничный. Структура дифференциальных игр, ДАН СССР, 184, № 2, 1969.
6. Л. А. Петросян. Топологические игры и их приложения к задачам преследования, 1, Вестник АГУ, № 19, вып. 4, 1969.
7. Д. Мак-Кинси. Введение в теорию игр, М., ФМ, 1960.
8. Н. Н. Воробьев. Конечные бескоалиционные игры, УМН, 14, № 4, 1959.
9. Л. А. Петросян. Дифференциальные игры с неполной информацией, ДАН СССР, 195, № 3, 1970.