ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 1, 1973 Математика

О. А. МУРАДЯН

О РОСТЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ АГРЕГАТОВ В ТЕОРЕМЕ МЮНЦА

Введение

В работах Фань-Цзи и Дейвиса [1], [2] и С. Я. Хавинсона [3], [4], [5] предложен общий метод учета величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в вопросах полноты систем.

Ряд конкретных результатов получен этим методом в [6]—[8]. В работах [9], [10] приводится, в частности, обобщение хорошо известной аппроксимационной теоремы Мюнца (см., например [11]—[16]) в духе указанной теории. При этом, однако, аппроксимация в [9], [10] рассматривалась как и в классическом случае, на отрезке [0,1].

В настоящей работе мы рассматриваем дополнения к аппроксимационной теореме Мюнца, связанные с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих полиномов, в том случае, когда аппроксимация ведется на компактах более общих, чем [0,1].

Согласно соотношениям двойственности из [1]—[5], возможность учета величин коэффициентов аппроксимирующих полиномов связана с такими теоремами единственности теории аналитических функций, в которых заключение $F(z)\equiv 0$ выводится из того, что $F(z)$ достаточно быстро убывает на некотором множестве точек. В связи с этим, основное место в настоящей статье занимает рассмотрение вопросов единственности такого рода для функций, имеющих вид

$$F(z)=\int\limits_{\Gamma} e^{z\ln t}\,d\mu(t), \tag{1}$$

где Γ — некоторый компакт в комплексной плоскости, а μ—произвольная бэровская мера на Γ. Дело в том, что применение теорем из [1]—[5] к аппроксимационной задаче Мюнца приводит к рассмотрению функций вида (1).

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность профессору С. Я. Хавинсону за постановку задачи и помощь при выполнении настоящей работы, а также профессору М. А. Евграфову за ценные советы и консультации.

Для удобства чтения работы приведем ряд теорем единственности, на которых основаны излагаемые далее результаты.

Теорема 1 ([17]). Пусть $\{\zeta_k\}$—последовательность точек единичного круга, лежащих внутри сектора с вершиной в точке $\zeta=1$, образованного двумя хордами окружности $|\zeta|=1$, причем $\zeta_k \to 1$ и выполнены условия:

$$\sum_k 1-|\zeta_k| = \infty, \tag{2}$$

$$\left|\frac{1+\zeta_k}{1-\zeta_k}\right| - \left|\frac{1+\zeta_{k+1}}{1-\zeta_{k-1}}\right| \geqslant d > 0, \tag{3}$$

где d не зависит от k.

В таком случае всякая функция $f(\zeta)$, голоморфная и ограниченная внутри единичного круга, равна тождественно нулю, если выполнено соотношение

$$\lim_{k\to\infty} |1-\zeta_k| \ln |f(\zeta_k)| = -\infty. \tag{4}$$

(Заметим, что в работах [9], [10] теорема, дополняющая аппроксимационную теорему Мюнца, сформулирована неточно, так как при использовании теоремы 1 опущено условие о нахождении точек ζ_k внутри сектора).

В следующей теореме отсутствует предположение о том, что точки ζ_k находятся внутри угла, однако условие несгущаемости (3) имеет другой вид.

Теорема 2([18]). Пусть последовательность $\{\zeta_k\}$, $|\zeta_n|<1$ такова, что

$$\sum_1^\infty 1-|\zeta_k| = \infty, \tag{2}$$

$$\frac{|\zeta_k| - |\zeta_{k-1}|}{(1-|\zeta_k|)(1-|\zeta_{k-1}|)} \geqslant d > 0, \tag{5}$$

где $d>0$ не зависит от k.

Если $f(\zeta)$ — ограниченная в круге $|\zeta|<1$ аналитическая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \ln |f(\zeta_n)| (1-|\zeta_n|) = -\infty, \tag{6}$$

то $f(\zeta)\equiv 0$.

Теоремы 1 и 2 верны, конечно, также и для функций ограниченного вида в круге $|\zeta|<1$.

Теорема 3 ([15], [19], [20]). Пусть $F(z)$ — регулярная в угле $|\arg z| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ функция, и пусть

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(re^{i\theta})|}{r} \leqslant a\cos\theta + b|\sin\theta|, \tag{7}$$

где a и b — конечные числа.

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{z_n} = D > 0, \tag{8}$$

$$|z_n - z_m| \geqslant |n - m|, \ d > 0. \tag{9}$$

Тогда если

$$\pi D > b, \tag{10}$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(r)|}{r}. \tag{11}$$

Теорема 4 ([19], [20]). Пусть $F(z)$ — аналитическая функция в правой полуплоскости $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi$, для которой

$$|F(re^{i\theta})| = O(\exp\{\delta \log r \cos\theta + \pi\sigma |\sin\theta| + \varepsilon |r|\}), \ |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

где $\delta \geqslant 0$, $\sigma \geqslant -\frac{1}{2}\delta$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям (8), (9), где

$$D > \sigma + \frac{1}{2}\delta. \tag{8}$$

Тогда, если

$$F(z_n) = O\ (e^{-k|z_n|\ln|z_n|}), \tag{13}$$

где

$$k > 2\sigma, \tag{14}$$

то $F(z) \equiv 0$.

Замечание. Теоремы 3 и 4 остаются справедливыми ([20]) при замене требования аналитичности в замкнутой полуплоскости требованием непрерывности в замкнутой полуплоскости и аналитичности внутри полуплоскости.

Мы будем рассматривать функции вида (1), считая всегда компакт Γ удовлетворяющим следующему условию (A):

Функция $\arg t$ ($t \in \Gamma$) допускает на $\Gamma \setminus \{0\}$ выделение однозначной и ограниченной ветви $|\arg t| \leqslant b$, $t \in \Gamma$.

Приступая к рассмотрению функций вида (1), сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. *Если* $0 \overline{\in} \Gamma$, *то задаваемая формулой* (1) *функция* $F(z)$ — *целая. Если же* $0 \in \Gamma$, *то* $F(z)$ *аналитична в правой полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$ *и при* $\mu\{0\} = 0$ *непрерывна в замкнутой полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$

Замечание. Рассматривая функцию вида (1) в случае $0 \in \Gamma$ при $\operatorname{Re} z > 0$ мы всегда можем считать, что $\mu\{0\} = 0$. Действительно, обозначим атом меры в точке $t = 0$ через μ_0.
Тогда

$$F(z) = \int_\Gamma e^{z \ln t} d\mu(t) = \mu_0 \cdot 0 + \int_{\Gamma \setminus \{0\}} e^{z \ln t} d\mu(t).$$

Доказательство леммы 1. Пусть

$$x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z,\ \theta = \arg z.$$

Тогда

$$|e^{z \ln t}| = |e^{(x+iy)(\ln|t| + i \arg t)}| = e^{x \ln|t| - y \arg t}. \tag{15}$$

В силу условия (A) $|\arg t| \leqslant b$.

Когда точка $0 \bar{\in} \Gamma$, $|\ln(t)|$ ограничена и (15) показывает, что интеграл (1) абсолютно сходится при любом z, а потому представляет целую функцию.

Если $0 \in \Gamma$, то $-\infty \leqslant \ln|t| \leqslant C < \infty$ $(t \in \Gamma)$ и равенство (15) показывает, что (1) абсолютно сходится при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ и представляет аналитическую функцию $B \operatorname{Re} z > 0$.

Для доказательства непрерывности $F(z)$ при условии $\mu\{0\} = 0$ изолируем точку $t = 0$ сколь угодно малой δ-окрестностью. Часть компакта Γ, которая лежит вне окрестности обозначим через $\Gamma \setminus \Gamma_\delta$. Тогда

$$F_\delta(z) = \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_\delta} e^{z \ln t}\, d\mu(t)$$

— целая функция, так как $0 \bar{\in} \Gamma \setminus \Gamma_\delta$.

Покажем, что в замкнутом полукруге $|z| \leqslant R$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ (R — сколь угодно большое) функция $F_\delta(z)$ равномерно сходится к $F(z)$ при $\delta \to 0$. Оценим разность $F(z) - F_\delta(z)$ (при $\delta < 1$)

$$|F(z) - F_\delta(z)| \leqslant \int\limits_{\Gamma_\delta} |e^{z \ln t}|\, |d\mu(t)| \leqslant \max_{t \in \Gamma_\delta} |e^{z \ln t}| \int\limits_{\Gamma_\delta} |d\mu(t)| \leqslant e^{bR} \int\limits_{\Gamma_\delta} |d\mu(t)|.$$

Так как $\mu\{0\} = 0$, то $\int\limits_{\Gamma_\delta} |d\mu(t)| \to 0$ и $|F(z) - F_\delta(z)| \to 0$ равномерно относительно z, а это доказывает лемму.

В дальнейшем изложении мы считаем, что если $0 \in \Gamma$, то $\mu\{0\} = 0$

Выясним теперь, когда функции вида (1) при любой мере, сосредоточенной на Γ, являются функциями ограниченного вида.

Напомним ([21], [22]), что аналитическая функция $f(z)$ называется функцией ограниченного вида в некоторой области D, если $\ln^+|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту. Это определение инвариантно относительно конформных преобразований области.

Для случая, когда область D — единичный круг, наличие у $\ln^+|f(z)|$ гармонической мажоранты эквивалентно ограниченности интегралов

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant C < +\infty,\ 0 < r < 1. \tag{16}$$

Любая функция ограниченного вида может быть представлена как частное двух ограниченных аналитических функций. (Последнее условие есть необходимый и достаточный признак функций ограниченного вида).

Лемма 2. *Для того чтобы функция вида* (1) *была функцией ограниченного вида в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$ *при любой мере* μ, *сосредоточенной на заданном компакте* Γ, *необходимо и достаточно, чтобы компакт* Γ *лежал на положительной полуоси.*

Доказательство. Пусть сперва $\Gamma \subset [0, \infty)$. Положим

$$\alpha = \sup \Gamma, \quad a = \ln \alpha, \quad C = \int_{\Gamma} |d\mu(t)|.$$

Из оценки (15) получаем

$$|F(z)| \leqslant Ce^{a \operatorname{Re} z}, \tag{17}$$

т. е. $\ln^+ |F(z)| \leqslant a \operatorname{Re} z + \ln C$ и, следовательно, гармоническая функция $a \operatorname{Re} z + \ln C$ есть мажоранта для $\ln^+ |F(z)|$. Поэтому $F(z)$ — функция ограниченного вида.

Допустим теперь, что компакт Γ не лежит на положительной оси, т. е. $\exists t \in \Gamma$, для которого $\arg t \neq 0$; для определенности считаем, что $\arg t > 0$.

Возьмем меру μ, сосредоточенную в одной этой точке t, пусть $\mu\{t\} = 1$. Тогда

$$F(z) = e^{z \ln t}.$$

Сделаем конформное отображение на единичный круг $|\zeta| < 1$

$$z = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad \zeta = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Для функции $f(\zeta) = f(\rho e^{i\varphi}) = F\left(\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$ получаем

$$|f(\rho e^{i\varphi})| = e^{\ln |t| \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2} - \arg t \frac{2\rho \sin\varphi}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}}.$$

Покажем, что для $f(\zeta)$ не выполняется условие (16). Действительно

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi \geqslant \int_{\pi}^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\pi}^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi = \int_{\pi}^{2\pi} \ln |t| \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\, d\varphi +$$

$$+ |\arg t| \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2\rho\,|\sin\varphi|}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\, d\varphi. \tag{18}$$

(Мы взяли интервал $[\pi, 2\pi]$, чтобы второй член (18) имел положительный знак). Но второй интеграл в (18) стремится к ∞ при $\rho\to 1$, а первый ограничен.

Основываясь на теоремах единственности для функций ограниченного вида (теоремы 1, 2) и лемме 2, можно доказать следующие две теоремы.

Теорема 5. *Пусть компакт* Γ *расположен на луче* $\arg t = c = \text{const}$, *а последовательность точек* $\{z_k\} \to \infty$, $z_k \neq 0$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\{z_k\} \text{ лежит в угле } |\arg z| \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}, \tag{19}$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|z_k|} = \infty, \tag{20}$$

$$|z_{k+1}| - |z_k| \geqslant d > 0. \tag{21}$$

Если для функции вида (1) *выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln |F(z_k)|}{|z_k|} = -\infty, \tag{22}$$

то $F(z)\equiv 0$ *и мера* $\mu\equiv 0$. *В то же время, если* 0 — *предельная точка, то для любого сколь угодно большого* $N>0$ *существует функция* $F(z)\not\equiv 0$ *вида* (1), *для которой*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln |F(z_k)|}{|z_k|} < -N. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай, когда Γ содержится в $[0, \infty)$ $(c=0)$. Тогда по лемме 2 $F(z)$—функция ограниченного вида в $\operatorname{Re} z>0$ и справедливость первого утверждения нашей теоремы получается из теоремы 1, если условия (2), (3) и (4) пересчитать с помощью конформного отображения $\zeta = \dfrac{z-1}{z+1}$ круга $|\zeta|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$. Условие (19) получается из требования в теореме 1 расположения точек $\{\zeta_k\}$ в секторе с вершиной в $\zeta=1$.

Если компакт лежит на луче $\arg t = c\neq 0$, то при помощи функции

$$t = t' e^{i\arg t} = t' e^{ic},\ t\in\Gamma,\ t'\in[0, \infty)$$

отобразим Γ на положительную ось. Образ компакта Γ обозначим Γ'. Получаем

$$F(z) = \int_\Gamma e^{z\ln t}\, d\mu(t) = \int_{\Gamma'} e^{z\ln (t' e^{ic})}\, d\mu(t' e^{ic}) =$$

$$= \int_{\Gamma'} e^{z\ln t'} e^{icz}\, d\mu(t' e^{ic}),$$

отсюда

$$F(z)=G(z)\,e^{izc}, \tag{24}$$

где $G(z)=\int\limits_{\Gamma'} e^{z\ln t'}\,d\mu(t'e^{ic})$ — функция ограниченного вида.

Из (24) имеем

$$\ln\frac{|G(z_k)|}{|z_k|}=\frac{\ln|F(z_k)|}{|z_k|}-\frac{\ln|e^{iz_kc}|}{|z_k|},$$

но $|e^{iz_kc}|=e^{\operatorname{Re}(iz_k c)}=e^{-c\operatorname{Im} z_k}$.

Значит

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|G(z_k)|}{|z_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|F(z_k)|}{|z_k|}+\lim_{k\to\infty}c\frac{\operatorname{Im} z_k}{|z_k|}.$$

Следовательно, в силу (22)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|G(z_k)|}{|z_k|}=-\infty,$$

так как $\dfrac{\operatorname{Im} z_k}{|z_k|}$ ограничено.

Поэтому $G(z)\equiv 0$ и, следовательно, $F(z)\equiv 0$.

Докажем теперь, что из равенства $F(z)\equiv 0$ следует, что и $\mu(t)\equiv 0$.

В частности, из $F(z)\equiv 0$ вытекает, что $F(n)=0$, $n=1,2,\cdots$. Это дает $\int\limits_{\Gamma} t^n\,d\mu(t)=0$, $n=1,2,\cdots$. Если $\int\limits_{\Gamma} d\mu(t)=B\neq 0$, то присоединим к Γ точку 0 (если $0\notin\Gamma$) и положим $\Gamma_1=\Gamma\cup\{0\}$. На Γ_1 определим меру μ_1, положив

$\mu_1\{0\}=-B$, $\mu_1(e)=\mu(e)$, если $e\subset\Gamma$. Тогда получаем

$$\int\limits_{\Gamma_1} t^n\,d\mu_1(t)=0,\ n=0,\,1,\,2,\cdots.$$

Так как компакт не имеет внутренних точек и не разбивает плоскость, то система степеней $\{t^n\}$ на нем полна (в силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса-Лаврентьева (см. [12]) и поэтому мера $\mu_1\equiv 0$. Но тогда и мера $\mu\equiv 0$, и первая часть теоремы доказана.

Для того чтобы убедиться в справедливости второй части теоремы, рассмотрим последовательность точек $\{t_m\}$ компакта Γ, сходящуюся к нулю. Пусть μ сосредоточена в единственной точке

$$t_m\colon\ t_m=|t_m|\,e^{ic},\ \mu\{t_m\}=1,\ 0<t_m<1.$$

Тогда $F(z)$ имеет вид

$$F(z)=e^{z\ln t_m},\ \text{где}\ \ln|t_m|<-N,$$

N — сколь угодно большое число. Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\ln|F(z_m)|}{|z_m|}\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\ln|t_m|(\operatorname{Re} z_n-c\operatorname{Im} z_n}{|z_n|}\right)\leqslant$$

$$\leqslant -N\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\operatorname{Re} z_n}{|z_n|}-c\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\operatorname{Im} z_n}{|z_n|}\leqslant N\cos\delta-c\sin\delta.$$

Значит $F(z)=e^{z\ln t_m}$ удовлетворяет условию (23) и $F(z)\not\equiv 0$.

Замечание. В случае, когда 0 не является предельной точкой для Г не трудно понять, что условие

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\ln|F(z_n)|}{|z_n|}=-\infty$$

не является необходимым для того, чтобы $F(z)$ вида (1) была тождественным нулем.

Такими же рассуждениями, как в теореме 5, но основываясь вместо теоремы 1 на теореме 2, придем к следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть компакт* Г, *по-прежнему расположен на луче* $\arg t=c$, *а* $z_k\to\infty$, *последовательность* $\{z_k\}$, $z_k\neq 0$ *такова, что*

$$\sum_n \frac{\operatorname{Re} z_n}{|z_n|^2}=\infty, \tag{25}$$

$$\frac{|z_{k-1}|^2}{\operatorname{Re} z_{k-1}}-\frac{|z_k|^2}{\operatorname{Re} z_k}\geqslant d>0,\ d \textit{ не зависит от } k. \tag{26}$$

Если для функции вида (1)

$$\lim_{n\to\infty}\ln|F(z_n)|\,\frac{\operatorname{Re} z_n}{|z_n|^2}=-\infty, \tag{27}$$

то $F(z)\equiv 0$ *и мера* $\mu\equiv 0$.

Замечание. В случае, когда точки z_k лежат на вещественной оси, или более обще, расположены на некотором угле $|\arg z|\leqslant\delta<\frac{\pi}{2}$, то относительно точности теоремы 6 можно сказать то же самое, что было сказано в теореме 5.

В том случае, когда компакт Г не умещается на луче, свести задачу единственности для $F(z)$ вида (1) к задаче для функции ограниченного вида простейшими приемами не удается. Более того, уже простейшие примеры показывают, что для этого случая теоремы с условиями (19)—(23), или (25)—(27) для интегралов (1) не справедливы.

Пример. Рассмотрим компакт, состоящий из двух симметричных точек $t_1=e^{i\alpha}$, $t_2=e^{-i\alpha}$. Возьмем $\mu\{t_1\}=\frac{1}{2}$ и $\mu(t_2)=\frac{1}{2}$. Из $F(z)=\int\limits_{\Gamma} e^{z\ln t}\,d\mu(t)$ получаем

$$F(z)=\frac{1}{2}\left(e^{z\ln e^{i\alpha}}+e^{z\ln e^{-i\alpha}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha z}+e^{-i\alpha z}\right),$$

откуда $F(z)=\cos\alpha z$. Нули функции $F(z)=\cos\alpha z$ — следующие: $z_n=\frac{\pi}{\alpha}\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Они удовлетворяют условиям (19) — (21), но $\cos\alpha z\not\equiv 0$.

Перейдем теперь к нашей основной теореме, касающейся произвольного компакта Г, удовлетворяющего условию (A).

Только что приведенный пример показывает, что если мы хотим делать заключение $F(z)\equiv 0$ из условия (20) для любого $F(z)$ вида (1), то мы должны изменить условия на расположения точек $\{z_n\}$. Опять-таки рассмотрение указанного примера приводит к мысли, что условие (20) следует заменить условием типа

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{|z_n|}\geqslant D>0,$$

где D зависит от b (на $\Gamma\setminus\{0\}$ $|\arg t|\leqslant b$ согласно условию (A)).

В этом направлении имеет место следующая теорема, в доказательстве которой используется теорема 3.

Для случая произвольного компакта Г, удовлетворяющего условию (A), имеем для функции $F(z)$ вида (1) следующую оценку роста

$$|F(re^{i\theta})|\leqslant\int_{\Gamma}|e^{z\ln t}||d\mu(t)|=\int_{\Gamma}e^{x\ln|t|-y\arg t}|d\mu(t)|\leqslant$$

$$\leqslant e^{ax+b|y|}=e^{(a\cos\theta+b|\sin\theta|)r}, \tag{28}$$

где $a=\sup\limits_{t\in\Gamma}\ln|t|$.

Теорема 7. *Пусть Г — компакт, не разбивающий плоскость, не имеющий внутренних точек и удовлетворяющий условию* (A), *и пусть* $F(z)$ *имеет вид* (1). *Пусть, далее, последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}$ *удовлетворяет условиям* (8), (9), (10). *Тогда, если*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|F(z_n)|}{|z_n|}=-\infty, \tag{22}$$

то $F(z)\equiv 0$ *и мера* $\mu\equiv 0$ (*предполагается, что* $\mu\{0\}=0$).

Доказательство. В интеграле (1) делаем замену переменной $\ln t=u$. Компакт Г переходит в некоторое множество, которое обозначим через E. Тогда

$$F(z)=\int_{E}e^{uz}\,d\mu(e^u). \tag{29}$$

Множество E является замкнутым, не имеет внутренних точек и имеет связное дополнение (не разбивает плоскость). Если $0\in\Gamma$, то $\infty\in E$.

Из условия (22) в силу теоремы 3 вытекает, что функция $F(z)$ на вещественной оси убывает по закону

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln|F(x)|}{x}\to-\infty. \tag{30}$$

Последнее можно написать в таком виде

$$|F(x)|\leqslant e^{-Mx} \tag{31}$$

для достаточно больших x, где $M>0$ — сколь угодно большое число.

В силу условия (31) интеграл

$$\int_0^\infty F(x)\,e^{-x\zeta}\,dx$$

равномерно сходится вместе со всеми производными по ζ в круге $|\zeta|<M$. Это означает, что функция

$$\Phi(\zeta)=\int_0^\infty F(x)\,e^{-x\zeta}\,dx$$

регулярна в круге $|\zeta|<M$, а поскольку M произвольно, $\Phi(\zeta)$ — целая функция. С другой стороны

$$\Phi(\zeta)=\int_0^\infty F(x)\,e^{-x\zeta}\,dx=\int_0^\infty\left[\int_E e^{ux}\,d\mu(e^u)\right]e^{-x\zeta}\,dx=$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_E e^{(u-\zeta)x}\,d\mu(e^u)\right]dx.$$

Оценим подынтегральное выражение во внутреннем интеграле

$$|e^{(u-\zeta)x}|=e^{x\,\mathrm{Re}\,(u-\zeta)}.$$

При $\mathrm{Re}\,\zeta>a$, где $a=\sup\ln|t|$, $\mathrm{Re}\,(u-\zeta)<0$ и значит внутренний интеграл существует.

По теореме Фубини возможна перемена порядка интегрирования

$$\Phi(\zeta)=\int_E\left[\int_0^\infty e^{(u-\zeta)x}\,dx\right]d\mu(e^u)=\int_E\frac{d\mu(e^u)}{\zeta-u}. \tag{32}$$

Мы доказали это равенство при условии, что $\mathrm{Re}\,\zeta>a$, но по принципу аналитического продолжения, это равенство имеет место всюду, где сходится последний интеграл, т. е. везде вне множества E, поскольку это множество не разбивает плоскости.

Доказательство теоремы завершает следующая

Лемма 3. *Пусть E — замкнутое множество, не разбивающее плоскость и не имеющее внутренних точек. Пусть целая функция $\Phi(\zeta)$ представима вне E интегралом типа Коши-Стильтьеса*

$$\Phi(\zeta) = \int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta - u},$$

где мера μ, заданная на E, имеет конечную вариацию

$$\int_E |d\mu(u)| < +\infty,$$

и если $\infty \in E$, то $\mu\{\infty\} = 0$. Тогда $\mu \equiv 0$.

Доказательство. Если $\infty \notin E$, то утверждение леммы следует хотя бы из того, что в ∞ получаем $\Phi(\infty) = 0$ и, следовательно, $\Phi(\zeta) = 0$ (по теореме Лиувилля). Отсюда следует, что $\int_E u^n d\mu = 0, n = 0, \cdots,$ и в силу полноты системы $\{u^n\}$ на E (теорема М. А. Лаврентьева, см., например, [23]) $\mu \equiv 0$.

Рассмотрим случай, когда $\infty \in E$. Разлагаем $\int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta - u}$ в степенной ряд по степеням $\zeta - u_0$, где $u_0 \notin E$. Получаем

$$\Phi(\zeta) = \int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta - u} \int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta - u_0 - (u - u_0)} = \int_E \sum_0^\infty \frac{(\zeta - u_0)^n}{(u - u_0)^{n+1}} d\mu(u) =$$

$$= \sum_0^\infty (\zeta - u_0)^n \int_E (u - u_0)^{-n-1} d\mu(u). \qquad (33)$$

В (33) сделаем замену переменной $v = \frac{1}{u - u_0}$. Замкнутое множество E переходит в компакт F. Точке ∞ на E соответствует точка 0 на F. В силу условия леммы

$$\mu\{0\} = 0. \qquad (34)$$

Из (33) получаем

$$\Phi(\zeta) = \sum_0^\infty (\zeta - u_0)^n \int_F v^{n+1} d\mu\left(\frac{1}{v}\right), \qquad (35)$$

где

$$c_n = \int_F v^{n+1} d\mu\left(\frac{1}{v}\right), \quad n = 0, 1, \cdots \qquad (36)$$

—коэффициенты разложения целой функции $\Phi(\zeta)$. Поэтому $c_n; n = 0, 1, \cdots$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0. \qquad (37)$$

Используем теперь следующую теорему С. Я. Хавинсона ([9]).

Пусть Γ — компакт в комплексной плоскости, и μ—некоторая борелевская комплексная мера на Γ. Положим

$$c_n = \int\limits_{\Gamma} z^n \, d\mu, \quad n=1, 2, \cdots,$$

и пусть $\overline{\lim} \sqrt[n]{c_n} = R$. Относительно устройства Γ предположим следующее. Пусть D — круг $|z| < R$ и Γ' — часть, лежащая вне D. Если Ω—дополнительная к $D \cup \Gamma$ область содержащая ∞, то $\Gamma \subset \partial\Omega$. При выполнении всех этих условий замкнутый носитель меры μ содержится в D.

В нашем случае, в силу (37), $R = 0$ и замкнутый носитель меры μ есть точка 0. Но нам дано, что $\mu\{0\} = 0$, следовательно, $\mu \equiv 0$.

Лемма доказана, а с ней завершено и доказательство теоремы 7.

Условие $\pi D > b$ в теореме 7 является существенным. Чтобы убедиться в этом рассмотрим компакт из двух точек $e^{i\alpha}$ и $e^{-i\alpha}$.

Как уже отмечали, функция

$$E(z) = \cos \alpha z \not\equiv 0$$

имеет вид (1).

К нулям этой функции теорема 7 неприменима, так как нули функции $\cos \alpha z$ не имеют необходимой плотности: не выполняется условие $\pi D > b$. Для нулей $\cos \alpha z$; $z_n = \frac{\pi}{\alpha}\left(n + \frac{1}{2}\right)$,

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{z_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\frac{\pi}{\alpha}\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\alpha}{\pi}.$$

индикатор $\cos \alpha z$ есть $h(\theta) = \alpha(\sin \theta)$, следовательно здесь $b = \alpha$, значит $\pi \cdot D = \frac{\pi \cdot \alpha}{\pi} = \alpha = b$ и условие $\pi D > b$ не выполнено.

Важно отметить, что наша теорема 7 существенно связана с видом (1) нашей функции, а не просто с оценкой роста (28). Так, скажем, функция $e^{-z \ln z}$ удовлетворяет оценке (28), но убывает на вещественной оси как $e^{-x \ln x}$.

Но еще важным представляется то обстоятельство, что и для функций вида (1), где компакт Γ разбивает плоскость, теорема (7) перестает быть верной.

Рассмотрим следующий пример. Компакт Γ — контур сектора единичного круга, симметричный относительно оси OX, раствор угла $2\pi\sigma$, где σ — положительное число, мера

$$d\mu(t) = \frac{e^{-(-t)^{-\rho}}}{t^{\rho+1}} \, dt,$$

где $t = |t| e^{\pm i\pi\sigma}$ на боковых сторонах сектора и $t = e^{i\theta}, -\pi\sigma < \theta \leqslant \pi\sigma$ — на дуге единичной окружности и функция

$$G(z) = \int_\Gamma \frac{e^{\rho z \ln t}\ e^{-(-t)^{-\rho}}}{t^{\rho+1}}\, dt. \tag{38}$$

Выясним, когда мера μ будет иметь ограниченную вариацию, т. е. когда

$$\int_\Gamma \left|\frac{e^{-|-t|^{-\rho}}}{t^{\rho+1}}\right| |dt| < \infty.$$

Рассмотрим выражение

$$\left|\frac{e^{-(-t)^{-\rho}}}{t^{\rho+1}}\right| = |e^{-(-t)^{-\rho}}\ e^{-(\rho+1)\ln t}| = |e^{-(-t)^{-\rho}-(\rho+1)\ln t}| = e^{\operatorname{Re}(-t)^{-\rho}-(\rho+1)\ln|t|}. \tag{39}$$

Но $\operatorname{Re}(-t)^{-\rho} = |t|^{-\rho}\cos\rho\arg(-t) = |t|^{-\rho}\cos\pi\rho\sigma$.

Из (30) получаем

$$\left|\frac{e^{-(-t)^{-\rho}}}{t^{\rho+1}}\right| \leqslant e^{|t|^{-\rho}\cos\pi\sigma\rho-(\rho+1)\ln|t|} = e^{|t|^{-\rho}[\cos\pi\sigma\rho-(\rho+1)|t|^{\rho}\ln|t|]}. \tag{40}$$

Если $|t|\to 0$, то $|t|^{-\rho}\ln|t|\to 0$, а $|t|^{-\rho}\to\infty$. Тогда (40) показывает, что мера μ будет иметь ограниченную вариацию, если

$$\cos\pi\sigma\rho > 0, \text{ т. е. } \rho > \frac{1}{2\sigma}.$$

Считая далее $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$, сделаем в (38) замену переменной

$$t = -u^{-1/\rho}. \tag{41}$$

Компакт Γ переходит в контур C, состоящий из окружности некоторого радиуса δ и двубережного разреза по лучу $[\delta, +\infty)$. Контур C пробегается так, чтобы движение по окружности происходило по часовой стрелке.

Из $t = -u^{-1/\rho}$ имеем

$$dt = \frac{1}{\rho} u^{-1/\rho-1}\, du,\quad t^{\rho z} = (-u^{-1/\rho})^{\rho z} = (-u)^{-z},$$

$$t^{\rho+1} = -u^{-1-1/\rho},\quad e^{-(-t)^{-\rho}} = e^{-u},$$

отсюда

$$G(z) = -\frac{1}{\rho}\int_C \frac{(-u)^{-z}\, e^{-u}\, u^{-1/\rho-1}}{u^{-1-1/\rho}}\, du = -\frac{1}{\rho}\int_C (-u^{-z}\, e^{-u}\, du. \tag{42}$$

При этом мы можем фактически считать радиус δ окружности, входящий в C сколь угодно малым. В теории гамма-функции Эйлера (см. [25]) известна формула

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi}\int_C (-u)^{-z} e^{-u}\, du \quad \text{(представление Ханкеля).}$$

Следовательно, из (42)

$$G(z)=\frac{2\pi i}{\rho\Gamma(z)}. \tag{43}$$

Для функции $\Gamma(z)$ известна асимптотическая формула Стирлинга ([24], [25]): $\ln\Gamma(z)\approx z\ln z$. Из (43) получаем, что на вещественной оси

$$\ln G(x)\approx -x\ln x.$$

Таким образом, условие (22) для произвольной последовательности $\{x_n\}\to\infty$ на вещественной оси выполнено, но $G(z)\not\equiv 0$.

Для случая произвольного компакта Γ, удовлетворяющего условию (A), оценка (28) показывает, что имеет место и оценка (12) со сколь угодно малым δ и $\pi\sigma=b$, а $\varepsilon=0$. Поэтому справедлива следующая теорема (нам удобно обозначить k из теоремы 4 через $\frac{1}{\rho}$).

Теорема 8. *Пусть дана функция вида* (1), *где* Γ — *произвольный компакт, удовлетворяющий условию* (*A*). *Пусть* $\{z_n\}$ *удовлетворяет условиям* (8), (9). *Если*

$$F(z_n)=O\left(e^{-1/\rho\,|z_n|\lg|z_n|}\right) \tag{13}$$

и $\rho<\frac{1}{2\sigma}$, *то* $F(z)\equiv 0$.

Наш пример показывает точность этой теоремы. Действительно, теорема утверждает, что при соответствующих условиях $F(z)\equiv 0$, если $\rho<\frac{1}{2\sigma}$. Пример показывает, что если $\rho>\frac{1}{2\sigma}$, то существует функция вида (1), не равная тождественно нулю и убывающая на вещественной оси со скоростью (13).

Покажем теперь, основываясь на теории двойственности из [1] — [6], применения теорем 5 — 7 в вопросах, связанных с учетом величин коэффициентов в аппроксимационной теореме Мюнца (для более общих компактов, чем [0,1]).

Приведем здесь нужные нам понятия и факты из [9], [10].

Пусть X — нормированное пространство. Рассмотрим, наряду с X, последовательность n-мерных пространств E_n, состоящих из точек $(\lambda_1\cdots\lambda_n)$, $n=1, 2,\cdots$. В E_n считаем заданной норму (или полунорму) $p(\lambda_1\cdots\lambda_n)$, причем предполагаем выполненным следующее условие согласования:

$$p(\lambda_1\cdots\lambda_n)=p(\lambda_1\cdots\lambda_n,\underbrace{0\cdots 0}_{m-n})$$

для $\forall\, m>n$ и любых $\lambda_1\cdots\lambda_n$. Сопряженное к E_n пространство обозначим через E_n^*, а норму в E_n^* — через p^*. Выделим в X систему элементов $\{\varphi_j\}$, $j=1, 2,\cdots$.

Определение. Мы скажем, что система $\{\varphi_j\}$ будет $o\,(p)$ полна в X, если для $\forall\, \omega \in X$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ существует многочлен $\sum\limits_1^n \lambda_l\, \varphi_l$ такой, что

$$\Big\| \omega - \sum_1^n \lambda_l \varphi_l \Big\| < \varepsilon \text{ и } p\,(\lambda_1 \cdots \lambda_n) < \varepsilon. \tag{44}$$

Теорема 9 ([9], [10]). Для того чтобы система $\{\varphi_j\}$ была $0\,(p)$ полна в банаховом пространстве X необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\, l \in X^*$ из условий

$$p^*\,(l\,(\varphi_1) \cdots l\,(\varphi_n)) \leqslant 1, \; n = 1, 2, \cdots, \tag{45}$$

следовало бы, что $l \equiv 0$.

В качестве X будем рассматривать пространство $C\,(\Gamma)$ непрерывных на компакте Γ функций.

Теорема 10. *Пусть относительно компакта* Γ *и последовательности точек* $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \cdots$ *выполнены условия теорем* 5 *или* 6. *Пусть дана также последовательность положительных чисел* ν_k, $k = 1, 2, \cdots$, $\nu_k \to \infty$. *Положим*

$$p\,(\lambda_0, \lambda_1 \cdots \lambda_n) = p\,(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \sum_1^n e^{-\nu_n |z_n|}\, |\lambda_n|. \tag{46}$$

Система степеней

$$1, t^{z_1} \cdots t^{z_n}, \ldots \tag{47}$$

будет $o\,(p)$ *полной в пространстве* $C\,(\Gamma)$. *Если* 0 — *предельная точка* Γ, $\{z_n\}$ *удовлетворяет условию* (19) *и при сколь угодно большом* $N > 0$ *положим*

$$p_1\,(\lambda_0, \lambda_1 \cdots \lambda_n) = p\,(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \sum_1^n e^{-N |z_n|}\, |\lambda_n|, \tag{48}$$

то система (47) *не будет* $o\,(p_1)$ *полна в* $C\,(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть l — произвольный линейный функционал над $C\,(\Gamma)$. Он имеет вид:

$$l\,(f\,(t)) = \int_\Gamma f\,(t)\, d\mu\,(t), \tag{49}$$

где $\mu\,(t)$ — некоторая бэровская мера на Γ. Условия (45) примут теперь вид

$$l\,(1) = 0,$$

$$e^{\nu_n |z_n|}\, |\, l\,(t^{z_n})| \leqslant 1, \; n = 1, 2, \cdots \tag{50}$$

(первое из этих условий получается потому, что в устройстве p член с λ_0 отсутствует, т. е. соответствующий вес при λ_0 равен нулю).

Рассмотрим на Γ меру $\mu_1(e)=\mu(e)-\mu(e\cap\{0\})$, не имеющую атома в 0 (если $0\in\Gamma$). Для этой меры

$$\int_\Gamma t^{2n}\, d\mu_1(t) = \int_\Gamma t^{2n}\, d\mu(t),\quad n=1,2,\cdots \tag{51}$$

(см. замечание после леммы 1). Если ввести аналитическую функцию

$$F(z) = \int_\Gamma e^{z\ln t}\, d\mu_1(t), \tag{1}$$

то из условия (50) следует, что

$$|F(z_n)| = |l(z^n)| \leqslant e^{-\lambda_n|z_n|}, \tag{52}$$

и поэтому по теореме 5 (или 6) $\mu_1\equiv 0$. Но тогда в силу первого из условий (50) $\mu\equiv 0$.

Мы доказали первую часть теоремы 10. Доказательство второй части строится снова на использовании теоремы 9 и второй части теоремы 5.

Теорема 11. *Пусть относительно компакта* Γ *и последовательности точек* $\{z_k\}$, $k=1,2,\cdots$ *выполнены условия теоремы* 7. *Определим* p *и* p_1 *равенствами* (46) *и* (48) *соответственно. Система степеней* (47) *будет* $o(p)$ *полна в* $C(\Gamma)$, *и если* O*—предельная точка* Γ, *не будет* $o(p_1)$ *полной в* $C(\Gamma)$ *при сколь угодно большом* $N>0$.

Доказательство дословно такое же, как в теореме 10, но с сылкой на теорему 7 вместо теоремы 5 или 6.

Мы не остановились здесь на аппроксимационной интерпретации теоремы 8, она связана уже не со всем пространством $C(\Gamma)$, а с пространством функций, непрерывных на Γ и аналитических во внутренних точках Γ.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института
им. К. Маркса

Поступила 16.X.1972

Օ. Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ. Մյունցի թեորեմում՝ մոտարկող ագրեգատների գործակիցների աճի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է Մյունցի մոտարկման թեորեմայի մեջ գործակիցների թույլատրելի արժեքների հարցը։ Ընդ որում, t^{λ_n} *աստիճանների գործակիցները, ընդհանրապես ասած կոմպլեքս թվեր են, իսկ մոտարկումը կատարվում է* [0, 1] *հատվածից ավելի ընդհանուր կոմպակտների վրա։ Նշված հարցը երկակիորեն կապված է միակության այն թեորեմների հետ, որոնցում* $f(z)\equiv 0$ *մտահանգումը հետևում է* $\{f(z_n)\}$*-ի բավականաչափ արագ նվազումից։* Γ*-ի և* $\{z_n\}$ *հաջորդականության վրա դրվող որոշ պայմանների դեպքում նրանից, որ ֆունկցիան այդ հաջորդականության վրա նվազում է տված ձևով, հետևում է ֆունկցիայի նույնաբար զրո լինելը։*

О. А. MURADIAN. *On the grouth of coefficients of approximating aggregates in Müntz theorem* (summary)

The article sudies the coefficients in the Müntz approximation problem, in which the exponents t^{z_n} are in general complex numbers, and approximation is carried out on the compacts more general then [0, 1]. The main result (theorem 7) states the conditions on $\{z_n\}$ and Γ, under which from the given rate of decrease of $f(z)$ is follows, that $f(z) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ky Fan* and *Ph. Davis*. Complete sequences and approximation in normed linear spaces, Duke Math. Journ., 24, № 2, 1957, 183—192.
2. *Ky Fan*. Linear inequalities and closure properties in normed linear spaces, Seminars on analytic functions, Institute for advanced study, Princeton, 2, 1958, 202—213.
3. *С. Я. Хавинсон*. Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 137, № 4 1961.
4. *С. Я. Хавинсон*. Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, 60, 1961, 304—324.
5. *С. Я. Хавинсон*. Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, ДАН СССР, 135, № 2, 1960.
6. *С. Я. Хавинсон*. Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций, Матем. заметки, 6, № 5, 1969, 619—625.
7. *Е. Ш. Чацкая*. Об одновременной аппроксимации непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, XVII, № 4, 1964. 9—22.
8. *Е. Ш. Чацкая*. Некоторые вопросы аппроксимации на множествах комплексной плоскости, ДАН СССР, 162, № 4, 1965, 30—32.
9. *С. Я. Хавинсон*. О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимируюших полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, №№2—3, 1971.
10. *С. Я. Хавинсон*. Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов, ДАН СССР, 196, № 6, 1971, 1283—1286.
11. *C. H. Müntz*. Über den Approximationssatz von Weirstrass, H. A. Schwarz Festchrift, Berlin, 1914, 303—312.
12. *И. П. Натансон*. Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.
13. *Н. Винер, Р. Пели*. Преобразование Фурье в комплексной области, М., 1964.
14. *М. А. Евграфов*. Аналитические функции, М., 1968.
15. *R. P. Boas*. Entire functions, Academic Press, New Jork, 1954.
16. *Н. И. Ахиезер*. Лекции по теории аппроксимации, М., 1965.
17. *И. В. Ушакова*. Теорема единственности для ограниченных аналитических функций в круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960, 29—32.
18. *С. Я. Хавинсон*. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, XVIII, вып. 2 (110), 1964, 25—98.

19. *V. Bernstein.* Lecons sur les progres recents de la theorie des series de Dirichlet, Paris, 1933.
20. *W. Levinson.* Gap and density theorems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 26, New Jork, 1940.
21. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
22. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических ·функций, М., 1968.
23. *М. А. Лаврентьев.* Sur les fonctions d'one variable complex repre'sentabels par des se'ries de polynomes, P., 1936.
24. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., 1962.
25. *Э. Уитекер* и *Дж. Ватсон.* Курс современного анализа, т. II, М., 1962.