ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 1, 1973 Математика

Д. М. ЧАУСОВСКИЙ

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ НА ГРАФАХ

В работах М. С. Лившица и А. Г. Руткаса [1, 2] была указана возможность применения теории характеристических функций линейных операторов к исследованию некоторых классов электрических многополюсников или, в более общей постановке, открытых систем на графах [3].

В настоящей статье теория характеристических функций привлекается для изучения эквивалентных преобразований открытых систем на графах, т. е. преобразований, сохраняющих их передаточные отображения.

I. Основные определения

1. Согласно [1, 4] *операторным узлом*

$$N = N(E, H; J, \Gamma, T) \tag{1}$$

называется совокупность двух гильбертовых пространств E и H и линейных ограниченных операторов J, Γ, T, действующих соответственно в E, из E в H, в H, причем $J^2 = I$, $J^* = J$, $T - T^* = i\Gamma J \Gamma^*$.

Характеристическая функция (х. ф.) узла (1)—это операторнозначная функция комплексного параметра λ

$$W(\lambda) = I - iJ\Gamma^* (T - \lambda I)^{-1} \Gamma. \tag{2}$$

2. *Открытая система* [1]

$$F = F(E, H; S(\lambda), R(\lambda)) \tag{3}$$

— это набор гильбертовых пространств E и H и линейных отображений $S(\lambda)$ E в E и $R(\lambda)$ E в H. E и H называются *внешним* и *внутренним* пространством системы F соответственно. Открытую систему (3) и узел (1) будем называть *соответствующими* друг другу, если $S(\lambda)$—*передаточное отображение системы*—есть х.ф. узла, а $R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1} \Gamma$. Оператор T называется *внутренним оператором* системы, Γ-*оператором связи*, J-*каналовым оператором*. Векторы $\psi = R(\lambda)\varphi$, где $\varphi \in E$, рассматриваются как *внутренние состояния* системы.

3. В этом пункте определяется понятие LC-графа и порождаемого им передаточного отображения. В вопросах, относящихся к графам, мы пользуемся терминологией [5, 6].

Пусть G—конечный ориентированный граф, в котором отмечено $2n$ *внешних* ребер. Из них n ребер $q_1, \cdots, q_n$ назовем *входными*, а остальные $\bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n$ — *выходными*. Оставшиеся (*внутренние*) ребра разобьем на два класса: L-ребра $q_{L1}, \cdots, q_{L\mu}$ и C-ребра $q_{C_1}, \cdots, q_{C_\nu}$. С каждым L-ребром $q_{L\alpha}$ свяжем μ чисел $L_{\alpha k}$ $(1 \leqslant k \leqslant \mu)$, а с каждым C-ребром $q_{C\beta}$ — ν чисел $C_{\beta s}$ $(1 \leqslant s \leqslant \nu)$, так, чтобы матрицы

$$\Lambda = (L_{\alpha k})_1^{\mu},\ \Sigma = (C_{\beta s})_1^{\nu}$$

были эрмитовыми и положительно определенными.

Граф G с отмеченными в нем внешними L и C-ребрами и набором *параметров* $L_{\alpha k}$ и $C_{\beta s}$ назовем LC-графом.

Далее мы будем предполагать, что выполнены условия:

q_1) В графе нет циклов и сечений, образованных входными ребрами;

q_2) В графе нет сечений, образованных выходными ребрами.

Каждому ребру графа q можно поставить в соответствие по два числа I_q и V_q, так, что выполнены условия:

K1. Для каждого цикла Q справедливо равенство $\sum\limits_{q \in Q} (-1)^{\varepsilon(q)} V_q = 0$, где $\varepsilon(q) = 1$, если q—выходное ребро и его направление совпадает с направлением цикла Q или q—не выходное ребро и его направление противоположно направлению цикла; $\varepsilon(q) = 0$— в остальных случаях;

K2. Для каждого сечения S в графе $\sum\limits_{q \in S} (-1)^{\varepsilon(q)} I_q = 0$, где $\varepsilon(q) = 1$, если направление q противоположно направлению S, и $\varepsilon(q) = 0$ — в остальных случаях;

K3.

$$V_{q_{L\alpha}} = i\lambda \sum_{k=1}^{\mu} L_{\alpha k} I_{q_{Lk}}, \quad I_{q_{C\beta}} = i\lambda \sum_{s=1}^{\nu} C_{\beta s} V_{q_{Ls}}.$$

$$(1 \leqslant \alpha \leqslant \mu) \qquad (1 \leqslant \beta \leqslant \nu)$$

Введем обозначения

$$V = \begin{bmatrix} V_{q_1} \\ \vdots \\ V_{q_n} \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} I_{q_1} \\ \vdots \\ I_{q_n} \end{bmatrix},\ \tilde{V} = \begin{bmatrix} V_{\tilde{q}_1} \\ \vdots \\ V_{\tilde{q}_n} \end{bmatrix},\ \tilde{I} = \begin{bmatrix} I_{\tilde{q}_1} \\ \vdots \\ I_{\tilde{q}_n} \end{bmatrix},$$

$$\varphi^- = \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix},\ \varphi^+ = \begin{bmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{I} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Столбцы φ^- и φ^+ будем рассматривать как векторы $2n$-мерного координатного гильбертова пространства E.

Если для каждого λ (исключая, возможно, конечное число значений) и для каждого вектора φ^- („входа“) условия $K1$—3 однозначно определяют вектор φ^+ („выход"), то отображение $S(\lambda)$: $\varphi^- \to \varphi^+$ будем называть *передаточным отображением* графа G. Условие q_1) позволяет приписывать координатам φ^- произвольные значения, не вступая в противоречие с условиями $K1$, 2.

В следующем параграфе в терминах структуры графа указаны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы передаточное отображение графа совпадало с х. ф. некоторого операторного узла.

II. Передаточные отображения LC-графов и характеристические функции операторных узлов

1. Для составления полной системы независимых уравнений $K1-3$ построим дерево t графа G со следующими свойствами: а) t содержит все входные ребра и не содержит выходных ребер; б) из всех деревьев, удовлетворяющих условию а), t содержит максимально возможное число C-ребер [7]. Пусть L- и C-ребра, вошедшие в t, таковы: $q_{L_1}, \cdots, q_{L_r}$ и $q_{C_1}, \cdots, q_{C_p}$. L- и C-ребра, оказавшиеся хордами t, обозначим через $q_{L_{r+1}}, \cdots, q_{L_\mu}$ и $q_{C_{p+1}}, \cdots, q_{C_\nu}$.

Введем обозначения

$$V_L=\begin{bmatrix} V_{q_{L1}} \\ \vdots \\ V_{q_{Lr}} \end{bmatrix},\ I_L=\begin{bmatrix} I_{q_{L1}} \\ \vdots \\ I_{q_{Lr}} \end{bmatrix},\ \tilde{V}_L=\begin{bmatrix} V_{q_{Lr+1}} \\ \vdots \\ V_{q_{L\mu}} \end{bmatrix},\ \tilde{I}_L=\begin{bmatrix} I_{q_{Lr+1}} \\ \vdots \\ I_{q_{L\mu}} \end{bmatrix},$$

$$V_C=\begin{bmatrix} V_{q_{C1}} \\ \vdots \\ V_{q_{Cp}} \end{bmatrix},\ I_C=\begin{bmatrix} I_{q_{C1}} \\ \vdots \\ I_{q_{Cp}} \end{bmatrix},\ \tilde{V}_C=\begin{bmatrix} V_{q_{Cp+1}} \\ \vdots \\ V_{q_{C\nu}} \end{bmatrix},\ \tilde{I}_C=\begin{bmatrix} I_{q_{Cp+1}} \\ \vdots \\ I_{q_{C\nu}} \end{bmatrix},$$

$$L=\begin{bmatrix} L_{11}\cdots L_{1r} \\ \cdots\cdots \\ L_{r1}\cdots L_{rr} \end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix} L_{1,\,r+1}\cdots L_{1\mu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ L_{r,\,r+1}\cdots L_{r\mu} \end{bmatrix},\ \tilde{L}=\begin{bmatrix} L_{r+1\ r+1}\cdots L_{r+1,\,\mu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ L_{\mu,\,r+1}\cdots L_{\mu\mu} \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} C_{11}\cdots C_{1p} \\ \cdots\cdots \\ C_{p1}\cdots C_{pp} \end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix} C_{1\,p+1}\cdots C_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_{p,\,p+1}\cdots C_{p\nu} \end{bmatrix},\ \tilde{C}=\begin{bmatrix} C_{p+1,\,p+1}\cdots C_{p+1,\,\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_{\nu,\,p+1}\cdots C_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

при этом $\Lambda=\begin{bmatrix} L & M \\ M^* & \tilde{L} \end{bmatrix}$, $\Sigma=\begin{bmatrix} C & N \\ N^* & \tilde{C} \end{bmatrix}$, и матрицы L, $\tilde{L}$, C, $\tilde{C}$ — эрмитовы и положительны.

Уравнения $K1$, 2, составленные для фундаментальных циклов и сечений, определяемых деревом t, в матричной форме имеют вид

$$[V',\ V'_L,\ V'_C,\ \tilde{V}'_L,\ \tilde{V}'_C,\ -\tilde{V}']'Q'=0,\quad [I',\ I'_L,\ I'_C,\ \tilde{I}'_L,\ \tilde{I}'_C,\ \tilde{I}']'\ S'=0, \tag{1}$$

где

$$Q=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & U & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & U & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & U \end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix} U & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & U & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & U & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

—фундаментальные матрицы циклов и сечений (штрихом $'$ обозначен переход к транспонированной матрице). Разбиение Q и S на блоки выполнено в соответствии с (1). Здесь U—единичная матрица надлежащих размеров.

Так как $QS'=0$ [5], то

$$B_{ki}=-A'_{ik}\ (k,\ i=1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Как вытекает из свойства б), определяющего дерево t,

$$A_{22}=0,\ B_{22}=0. \tag{3}$$

Уравнения (1) и $K3$ с учетом (3) записываются так:

$$
\begin{gathered}
A_{11}V+A_{12}V_L+A_{13}V_C+\tilde{V}_L=0, \quad I+B_{11}\tilde{I}_L+B_{12}\tilde{I}_C+B_{13}\tilde{I}=0,\\
A_{21}V+A_{23}V_C+\tilde{V}_C=0, \quad I_L+B_{21}\tilde{I}_L+B_{23}\tilde{I}=0,\\
A_{31}V+A_{32}V_L+A_{33}V_C-\tilde{V}=0, \quad I_C+B_{31}\tilde{I}_L+B_{32}\tilde{I}_C+B_{33}\tilde{I}=0,
\end{gathered} \tag{4}
$$

$$
\begin{gathered}
V_L=i\lambda\,(LI_L+M\tilde{I}_L), \quad I_C=i\lambda\,(CV_C+N\tilde{V}_C),\\
\tilde{V}_L=i\lambda\,(M^*I_L+\tilde{L}\tilde{I}_L), \quad \tilde{I}_C=i\lambda\,(N^*V_C+\tilde{C}\tilde{V}_C).
\end{gathered} \tag{5}
$$

Исключив из (4), (5) V_L, $\tilde{V}_L$, I_C, $\tilde{I}_C$, $\tilde{I}_L$, V_C, получим

$$
\begin{gathered}
\begin{bmatrix} i\lambda A_{32}(M-LB_{21}) & A_{33} \\ B_{11} & i\lambda B_{12}(N^*-\tilde{C}A_{23}) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i\lambda\Delta_L & A_{13} \\ B_{31} & i\lambda\Delta_C \end{bmatrix}^{-1}\times\\
\times\begin{bmatrix} -A_{11} & i\lambda\,(A_{12}L+M^*)\,B_{23} \\ i\lambda\,(N+B_{32}\tilde{C})\,A_{21} & B_{33} \end{bmatrix}\times\\
\times\begin{bmatrix} V \\ \tilde{I} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A_{31} & -i\lambda A_{32}\tilde{L}B_{23} \\ -i\lambda B_{12}\tilde{C}A_{21} & B_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\tilde{V} \\ I \end{bmatrix}=0,
\end{gathered} \tag{6}
$$

где

$$\Delta_L=[A_{12}\ U]\begin{bmatrix} L & M \\ M^* & \tilde{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A'_{12} \\ U \end{bmatrix}, \quad \Delta_C=[U,\ B_{32}]\begin{bmatrix} C & N \\ N^* & \tilde{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ B'_{32} \end{bmatrix} \tag{7}$$

—положительно определенные матрицы.

2. Теорема 1. *Для того чтобы передаточное отображение LC-графа G существовало и совпадало с х. ф. некоторого операторного узла, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$G1$) *В графе нет циклов, содержащих наряду с входными ребрами еще лишь C-ребра;*

$G2$) *Для каждой пары q_k и $\tilde{q}_k$ внешних ребер существует* *цикл, содержащий, кроме q_k и $\tilde{q}_k$, еще лишь C-ребра, и в этом цикле q_k и $\tilde{q}_k$ имеют одинаковую ориентацию*.*

Необходимость. Если передаточное отображение $S(\lambda)$ графа совпадает с х. ф. операторного узла, то, согласно (1.2) и (1.4)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tilde{V} = V, \ \lim_{\lambda\to\infty} \tilde{I} = I. \tag{8}$$

Разделим (6) на $i\lambda$ и устремим λ к ∞. Получим

$$A_{32}\{L-(M-LB_{21})\,\Delta_L^{-1}(M^* + A_{12}L)\}\,A'_{32}\,V = 0, \tag{9}$$

$$B_{13}\{\tilde{C}-(N^*-\tilde{C}A_{23})\,\Delta_C^{-1}(N+B_{32}\tilde{C})\}\,B'_{12}I=0. \tag{10}$$

Так как

$$L-(M-LB_{21})\,\Delta_L^{-1}(M^*+A_{12}L) = \left\{[U\,B_{21}]\begin{vmatrix} L & M \\ M^* & \tilde{L}\end{vmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} U \\ B'_{21}\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

и

$$\tilde{C}-(N^*-\tilde{C}A_{23})\,\Delta_C^{-1}(N+B_{32}\tilde{C}) = \left\{[A_{23}\,U]\begin{vmatrix} C & N \\ N^* & \tilde{C}\end{vmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A'_{23} \\ U\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

—положительно определенные матрицы, то из (9) и (10) имеем

$$A'_{32}\,V = 0, \ B'_{12}\,I=0.$$

Ввиду произвольности V и I

$$A_{32}=0, \ B_{23}=0, \ A_{21}=0, \ B_{12}=0. \tag{11}$$

Соотношение (6) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{33} \\ B_{11} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\lambda\Delta_L & A_{13} \\ B_{31} & i\lambda\Delta_C\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -A_{11} & 0 \\ 0 & B_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ \tilde{I}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{31} & 0 \\ 0 & B_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ \tilde{I}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{V} \\ I\end{bmatrix} = 0. \tag{12}$$

При $\lambda\to\infty$ с учетом (8) уравнение (12) приводится к виду

$$\begin{bmatrix} A_{31} & 0 \\ 0 & B_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V \\ I\end{bmatrix} = 0.$$

Так как V и I произвольны, то

$$A_{31}=U, \ B_{13}=-U. \tag{13}$$

Итак, фундаментальная матрица циклов Q графа G имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & U & 0 \\ U & 0 & A_{33} & 0 & 0 & U\end{bmatrix}. \tag{14}$$

---

* В [3] эти условия были указаны лишь как достаточные.

Принимая во внимание соответствие между ребрами графа и столбцами матрицы Q (см. (1)), мы из строения Q непосредственно усматриваем выполнение условий $G1$) и $G2$).

Достаточность. Если для графа G выполнены условия $G1$) и $G2$), то фундаментальная матрица циклов Q-графа G, построенная по дереву t, имеет вид (14). Уравнения (4) записываются так:

$$\begin{aligned} &A_{11}V+A_{12}V_L+A_{13}V_C+\tilde{V}_L=0, && I+B_{11}\tilde{I}_L-\tilde{I}=0, \\ &A_{23}V_C+\tilde{V}_C=0, && I_L+B_{21}\tilde{I}_L=0, \\ &V+A_{33}V_C-\tilde{V}=0, && I_C+B_{31}\tilde{I}_L+B_{32}\tilde{I}_C+B_{33}\tilde{I}=0. \end{aligned} \tag{15}$$

После исключения из (5) и (15) V_L, $\tilde{V}_L$, I_C и $\tilde{I}_C$ получим

$$i\begin{bmatrix} 0 & \Delta_L^{-1}A_{13} \\ \Delta_C^{-1}(B_{31}+B_{33}B_{11}) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{I}_L \\ V_C\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}\tilde{I}_L \\ V_C\end{bmatrix}= =i\begin{bmatrix} -\Delta_L^{-1}A_{11} & 0 \\ 0 & -\Delta_C^{-1}B_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V \\ I\end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{V} \\ \tilde{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V \\ I\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & A_{33} \\ B_{11} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{I}_L \\ V_C\end{bmatrix}. \tag{17}$$

Здесь Δ_L и Δ_C—те же матрицы, что и в (7).

Введем в рассмотрение координатное пространство вектор-столбцов H, размерность которого равна числу элементов столбца $\begin{bmatrix}\tilde{I}_L \\ V_C\end{bmatrix}$. Заметим, что $\dim H$ однозначно определяется графом G. Зададим в H скалярное произведение равенством

$$(\psi_1, \psi_2)=\psi_2^*\begin{bmatrix}\Delta_L & 0 \\ 0 & \Delta_C\end{bmatrix}\psi_1.$$

Здесь, как и выше, * означает переход к эрмитово сопряженной матрице.

Пусть T, Γ, J—линейные операторы в H, из E в H и в E, матрицы которых в координатных базисах таковы

$$T=i\begin{bmatrix} 0 & \Delta_L^{-1}A_{13} \\ \Delta_C^{-1}(B_{31}+B_{33}B_{11}) & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma=i\begin{bmatrix} -\Delta_L^{-1}A_{11} & 0 \\ 0 & -\Delta_C^{-1}B_{33}\end{bmatrix},$$

$$J=\begin{bmatrix}0 & U \\ U & 0\end{bmatrix}. \tag{18}$$

Положим $\psi=\begin{bmatrix}\tilde{I}_L \\ V_C\end{bmatrix}$. Уравнения (16), (17) в операторной форме перепишутся так

$$(T-\lambda I)\psi=\Gamma\varphi^-,\quad \varphi^+=\varphi^--iJ\Gamma^\times\psi. \tag{19}$$

(Здесь и далее $\times$ обозначает переход к сопряженному оператору).

Используя матричные представления операторов, находим, что

$$J^2=I,\ J^\times = J,\ T-T^\times = i\Gamma J\Gamma^\times,$$

так что совокупность

$$N_G = N_G(E,\ H;\ J,\ \Gamma,\ T) \tag{20}$$

есть операторный узел.

Из (19) следует, что вектор $\varphi^+ = \begin{bmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{I} \end{bmatrix}$ однозначно определяется вектором $\varphi^- = \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$, причем передаточное отображение

$$S(\lambda) = I - iJ\Gamma^\times (T-\lambda I)^{-1}\Gamma$$

есть х. ф. узла (20). Теорема доказана.

LC-граф G, удовлетворяющий условиям $G1$) и $G2$), будем называть *графом класса* Ω. Открытую систему

$$F_G = F_G(E,\ H;\ S(\lambda),\ R(\lambda)), \tag{21}$$

соответствующую узлу (20), назовем *открытой системой на графе G класса* Ω.

III. Эквивалентность открытых систем на графах класса Ω

1. Операторные узлы

$$N_j = N_j(E,\ H_j;\ J,\ \Gamma_j,\ T_j),\ j=1,\ 2 \tag{1}$$

(и соответствующие им открытые системы F_j) называются *эквивалентными*, если их х. ф. (передаточные отображения систем) совпадают.

Для формулировки условий эквивалентности узлов (систем) приведем некоторые определения [1].

Обозначим через H_j^0 замыкание линейной оболочки векторов вида $(T_j-\lambda I)^{-1}\Gamma_j\varphi$ ($\varphi\in E,\ \lambda\bar{\in}\sigma(T_j)$) или, что то же, векторов вида $T_j^m\Gamma_j\varphi$ ($\varphi\in E,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots$). H_j^0 называется *простой компонентой* H_j. Это—наименьшее подпространство в H_j, вмещающее все внутренние состояния открытой системы, соответствующей узлу N_j. H_j^0-инвариантно относительно T_j и $T_j^\times$. Пусть P_j^0—ортопроектор из H_j на H_j^0. Положим $\Gamma_j^0 = P_j^0\Gamma_j$, $T_j^0 = T_j P_j^0$. Совокупность

$$N_j^0 = N_j^0(E,\ H_j^0;\ J,\ \Gamma_j^0,\ T_j^0) \tag{2}$$

является узлом [1]. Он называется *простой частью* узла N_j.

Операторный узел называется *простым*, если он совпадает со своей простой частью.

Открытая система F_j^0, соответствующая узлу N_j^0, называется *простой частью* системы F_j, соответствующей узлу N_j. Система, совпадающая со своей простой частью, называется *простой*.

Узлы (1) *унитарно эквивалентны*, если существует изометрический оператор W, отображающий H_1 на H_2, такой, что

$$T_2 = WT_1W^{-1}, \ \Gamma_2 = W\Gamma_1. \tag{3}$$

Теорема 2 [1] (об унитарной эквивалентности операторных узлов).

Для того чтобы операторные узлы N_1 и N_2 были эквивалентными , необходимо и достаточно, чтобы их простые части были унитарно эквивалентными.

Теорема 2 будет использована нами для изучения эквивалентных преобразований открытых систем на графах класса Ω.

2. Сохраним обозначения предыдущего параграфа.

Столбцы матрицы Γ (II. 18) суть векторы пространства H. Первые n из них обозначим через $g_1, \cdots, g_n$, последние n—через $f_1, \cdots, f_n$. Пусть H^L— подпространство векторов из H с равными нулю последними p координатами, а H^C—подпространство векторов с равными нулю первыми $\mu - r$ координатами (напомним, что μ—общее число L-ребер графа, r—число L-ребер, вошедших в дерево t, p — число C-ребер дерева). Тогда

$$H = H^L \oplus H^C, \ g_k \in H^L, f_k \in H^C, \ T(H^L) \subset H^C, \ T(H^C) \subset H^L. \tag{4}$$

Простая компонента H—подпространство H_0—есть линейная оболочка векторов вида $T^l g_k$, $T^l f_k$ ($k = 1, 2, \cdots, n$; $l = 0, 1, 2, \cdots$).

При этом

$$T^{2l} g_k \in H^L, \ T^{2l+1} f_k \in H^L, \tag{5}$$

$$T^{2l+1} g_k \in H^C, \ T^{2l} f_k \in H^C. \tag{6}$$

Линейную оболочку векторов вида (5) обозначим через H_0^L, векторов вида (6)—через H_0^C. Имеем

$$H_0^L \subset H^L, \ H_0^C \subset H^C, \ H_0 = H_0^L \oplus H_0^C. \tag{7}$$

Очевидно, $\mu - r \geqslant \dim H_0^L$, $p \geqslant \dim H_0^C$, так что и подавно

$$\mu \geqslant \dim H_0^L, \ \nu \geqslant \dim H_0^C \tag{8}$$

(ν—общее число C-ребер графа).

3. Рассматривая одновременно с системой F_a на графе $G \in \Omega$ систему $F_{\hat{a}}$ на графе $\hat{G} \in \Omega$ с тем же внешним пространством и канальным оператором J, все объекты, относящиеся к $F_{\hat{a}}$, будем обозначать теми же символами, что и аналогичные объекты для F_a, с добавлением значка $\wedge$.

Теорема 4. *Если $F_{\hat{a}}$ —открытая система на графе $\hat{G} \in \Omega$,* *эквивалентная системе F_a на графе $\hat{G}$ (п. 2), то число $L=(C\text{-})$ ребер графа $\hat{G}$ не меньше* $\dim H_0^L$ ($\dim H_0^C$), *так что общее число внутренних ребер графа $\hat{G}$ не меньше размерности простой компоненты H_0 внутреннего пространства H системы F_a.*

Доказательство. Пусть системы F_a и $F_{\hat{a}}$ эквивалентны. Согласно теореме 3 простые части соответствующих узлов N_a и $N_{\hat{a}}$ унитарно эквивалентны. Пусть W—изометрический оператор, отображающий H_0 на $\hat{H}_0$, такой, что

$$\hat{T}=WTW^{-1} \text{ (на } \hat{H}_0), \quad \hat{\Gamma}=W\Gamma. \tag{9}$$

Из (9) и строения матрицы $\hat{\Gamma}$ (см. (II. 18)),

$$\hat{\Gamma}=-i\begin{bmatrix} \hat{\Delta}_L^{-1}\hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{\Delta}_C^{-1}\hat{B}_{22} \end{bmatrix},$$

следует, что

$$\hat{g}_k=Wg_k\in \hat{H}_0^L,\quad \hat{f}_k=Wf_k\in \hat{H}_0^C \quad (k=1,\cdots,n). \tag{10}$$

Отсюда следует, что W отображает H_0^L на $\hat{H}_0^C$ взаимно однозначно, так что

$$\dim \hat{H}_0^L=\dim H_0^L. \tag{11}$$

Аналогично

$$\dim \hat{H}_0^C=\dim H_0^C. \tag{12}$$

Неравенство (8), записанное для $F_{\hat{a}}$, имеет вид $\hat{\mu}\geqslant \dim \hat{H}_0^L$ $\hat{\nu}\geqslant \dim \hat{H}_0^C$. С учетом (11) и (12) имеем

$$\hat{\mu}\geqslant \dim H_0^L,\ \hat{\nu}\geqslant \dim H_0^C, \tag{13}$$

что доказывает теорему.

Теорема 4 дает оценку снизу для числа L- (C-) ребер графа класса Ω, реализующего открытую систему, эквивалентную заданной системе на графе того же класса.

4. Число внутренних ребер графа $G\in\Omega$ может превышать размерность внутреннего пространства H открытой системы на G ($\dim H$ есть сумма числа C-ветвей и L-хорд дерева t, см. II, п. I). Граф $G\in\Omega$ назовем *полусокращенным*, если в нем нет сечений, образованных L-ребрами, и циклов, состоящих из C-ребер. Полусокращенный граф G характеризуется тем, что число его внутренних ребер совпадает с размерностью внутреннего пространства F_a, так как все его C-ребра войдут в дерево t, а все L-ребра окажутся хордами t.

Теорема 5. *Открытая система F_a на графе $G\in\Omega$ эквивалентна открытой системе на полусокращенном графе.*

Граф G класса Ω с матрицей циклов (II. 14) подвергнем следующему преобразованию. Стянем все L-ветви дерева t и удалим все C-хорды. Граф G преобразуется в граф $\hat{G}$, а дерево t— в дерево $\hat{t}$. При этом новые матрицы циклов и сечений будут иметь вид

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & U & 0 \\ U & A_{33} & 0 & U \end{bmatrix}, \hat{S} = \begin{bmatrix} U & 0 & B_{11} & U \\ 0 & U & B_{31} & B_{33} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Граф $\hat{G}$—полусокращенный. Его L-(C-) ребрам в качестве матриц параметров припишем матрицы Δ_L (Δ_C) (II. 7). Для открытой системы $F_{\hat{G}}$ на графе $\hat{G}$ внутреннее пространство, внутренний оператор T, оператор связи Γ и каналовый оператор J—те же, что и для системы F_G (II. 18). Поэтому передаточные отображения F_G и $F_{\hat{G}}$ совпадают.

Теорема доказана.

Как видно из теоремы 4, простая открытая система на полусокращенном графе не допускает уменьшения числа внутренних ребер (L-ребер и C-ребер) графа без изменения передаточного отображения. В этом смысле полусокращенный граф, реализующий простую систему F, можно назвать минимальным. В связи с этим представляются интересными условия простоты систем на полусокращенных графах, а также отыскание простых систем, эквивалентных заданной системе.

5. Напомнив о соглашении об обозначениях, принятом в начале п. 3, рассмотрим эквивалентные системы F_G и $F_{\hat{G}}$ на графах G и $\hat{G}$.

Выберем в H_0^L и H_0^C (см. п. 2) базисы

$$e_1, \cdots, e_a \text{ и } h_1, \cdots, h_b \quad (a = \dim H_0^L, \ b = \dim H_0^C). \tag{15}$$

Изометрический оператор W (п. 3) переводит их в базисы

$$\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_a \text{ и } \hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_b \tag{16}$$

пространств $\hat{H}_0^L$ и $\hat{H}_0^C$. Матрицы

$$(e_1, \cdots, e_a, h_1, \cdots, h_b) \text{ и } (\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_a, \hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_b)$$

имеют вид

$$\begin{array}{c} \mu-r \\ p \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \\ a \ \ b \end{array} \text{ и } \begin{array}{c}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{E}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \\ a \ \ b \end{array}\begin{array}{c} \hat{\mu}-\hat{r} \\ \hat{p} \\ \end{array} \tag{17}$$

Пусть P и $\hat{P}$—ортопроекторы из H в H_0 и из $\hat{H}$ в $\hat{H}_0$ соответственно. В координатных базисах они задаются матрицами

$$P = \begin{vmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^*\Delta_L & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\Delta_C \end{vmatrix},$$

$$\hat{P} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{E}}^*\hat{\Delta}_L\hat{\mathbf{E}})^{-1}\hat{\mathbf{E}}^*\hat{\Delta}_L & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{H}}^*\hat{\Delta}_C\hat{\mathbf{H}})^{-1}\hat{\mathbf{H}}^*\hat{\Delta}_C \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Равенства $\Gamma = P\Gamma$ и $PTP = TP$, первое из которых означает, что область значений Γ лежит в H_0, а второе выражает инвариантность H_0 относительно T, в матричной форме принимают вид (см. (II. 18))

$$\Delta_L^{-1}A_{11} = \mathbf{E}(\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^*A_{11},\quad \Delta_C^{-1}B_{33} = \mathbf{H}(\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*B_{33},$$

$$\Delta_L^{-1}A_{13}\mathbf{H} = \mathbf{E}(\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^*A_{13}\mathbf{H},\quad \Delta_C^{-1}B_{31}\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*B_{31}\mathbf{E}. \qquad (19)$$

Аналогичные соотношения верны и для системы $F_{\hat{C}}$.

Изометричность оператора W равносильна выполнению равенств

$$\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E}^* = \hat{\mathbf{E}}^*\hat{\Delta}_L\hat{\mathbf{E}},$$

$$\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}^*\hat{\Delta}_C\mathbf{H}. \qquad (20)$$

Равенство (9) вместе с (20) приводит к соотношениям

$$\hat{\Delta}_L^{-1}\hat{A}_{11} = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^*A_{11},\quad \hat{\Delta}_C^{-1}\hat{B}_{33} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H})^{-1}H^*B_{33}, \qquad (21)$$

$$\hat{\Delta}_L^{-1}\hat{A}_{13}\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^*A_{14}\mathbf{H},\quad \hat{\Delta}_C^{-1}\hat{B}_{31}\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*B_{11}\mathbf{E}. \qquad (22)$$

Равенства (20), (21), (22) не только необходимы, но и достаточны для эквивалентности систем F_G и $F_{\hat{G}}$. Точнее, имеет место

Теорема 6. *Пусть F_G и $F_{\hat{G}}$ — открытые системы на графах G и $\hat{G}$. Матрицу*

$$\begin{array}{r c} \mu - r & \left[\begin{array}{cc} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{array}\right] \\ p & \\ & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \end{array} \qquad (23)$$

определим по графу G, как это сделано в (17). *Если существует матрица вида*

$$\begin{array}{r c} \hat{\mu} - \hat{r} & \left[\begin{array}{cc} \hat{\mathbf{E}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{H}} \end{array}\right], \\ \hat{p} & \\ & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \end{array} \qquad (24)$$

такая, что выполнены равенства (20), (21), (22), *то системы F_G и $F_{\hat{G}}$* эквивалентны.

Из (20) следует, что столбцы матрицы (24) линейно независимы. Будем рассматривать их как векторы в $\hat{H}$ — $\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_a$ и $\hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_b$. Линейную оболочку этих векторов обозначим через $\hat{H}_0$, а ортопроектор на $\hat{H}_0$ — через $\hat{P}$. Матрица $\hat{P}$ имеет вид (18). Определим оператор W из H_0 в $\hat{H}_0$, положив

$$We_k = \hat{e}_k,\ 1 \leqslant k < a;\quad Wh_j = \hat{h}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant b,$$

и продолжим его по линейности. В силу (20) W — изометрический оператор, отображающий H_0 на $\hat{H}_0$. Из (19) и (21)

$$\hat{\Gamma} = W\Gamma, \tag{25}$$

а из (19) и (22)

$$\hat{T}\hat{P} = WTW^{-1}\hat{P}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) $\hat{T}\hat{\Gamma} = WTW^{-1}\hat{P}W\Gamma = WT\Gamma$ и, вообще, $\hat{T}^k\hat{\Gamma} = WT^k\Gamma$. Из (25) $\hat{\Gamma}^\times = \Gamma^\times W^{-1}\hat{P}$. Поэтому $\hat{\Gamma}^\times\hat{T}^k\hat{\Gamma} = \Gamma^\times T^k\Gamma$. Отсюда вытекает совпадение передаточных отображений $\hat{S}(\lambda)$ и $S(\lambda)$ систем F_O и $F_{\hat{O}}$. Теорема доказана.

6. Существует ли простая система на (полусокращенном) графе $\hat{G}$, эквивалентная заданной системе на графе G?

Теорема 7. *Пусть F_O — открытая система на полусокращенном графе G и матрица*

$$\begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array}\begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \tag{27}$$

определена, как это сделано в (17) (ввиду полусокращенности графа $r=0$, $p=\nu$). Для существования графа $\hat{G}$, порождающего простую систему $F_{\hat{O}}$, эквивалентную системе F_O, необходимо и достаточно, чтобы можно было указать невырожденные квадратные матрицы A и B порядков a и b соответственно, такие, чтобы матрица

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{E}^*A_{11} & A\mathbf{E}^*A_{13}\mathbf{H}B & U & 0 \\ U & A_{33}\mathbf{H}B & 0 & U \end{bmatrix} \tag{28}$$

допускала реализацию как матрица циклов некоторого графа.

Необходимость. Пусть $F_{\hat{O}}$ — простая система на полусокращенном графе, эквивалентная F_O. В обозначениях (17) $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ — невырожденные матрицы порядков a и b. Из (20), (21), (22)

$$\hat{A}_{11} = \hat{\mathbf{E}}^{*-1}\mathbf{E}^*A_{11},\quad \hat{A}_{33} = A_{33}\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1},\quad \hat{A}_{13} = \hat{\mathbf{E}}^{*-1}\mathbf{E}^*A_{13}\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}.$$

Положим $A = \hat{\mathbf{E}}^{*-1}$, $B = \hat{\mathbf{H}}^{-1}$. Матрица (28) есть матрица циклов графа $\hat{G}$.

Достаточность. Пусть (28) — матрица циклов некоторого графа $\hat{G}$. Ребра, отвечающие столбцам ее блоков

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{E}^*A_{11} \\ U \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} A\mathbf{E}^*A_{13}\mathbf{H}B \\ A_{33}\mathbf{H}B \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix},$$

назовем соответственно входными, L-, C-и выходными ребрами. Очевидно, $\hat{G}\in\Omega$. Поставим в соответствие C- и L- ребрам матрицы параметров

$$\hat{\Delta}_C = B^*\mathrm{H}^*\Delta_C\mathrm{H}B,\ \hat{\Delta}_L = A\mathrm{E}^*\Delta_L\mathrm{E}A^*. \tag{29}$$

Полагая $\hat{\mathrm{E}} = A^{*-1}$, $\hat{\mathrm{H}} = B^{-1}$, убеждаемся в выполнении условий теоремы 7. Поэтому система $F_{\hat{G}}$ эквивалентна системе F_G. Система $F_{\hat{G}}$ — простая, ибо для нее $\hat{H} = \hat{H}_0^L \oplus \hat{H}_0^C = \hat{H}_0$ (см. (16)).

Теорема доказана.

7. Укажем некоторые условия простоты открытой системы на графе. Известно [4], что для простоты операторного узла (1.1) и соответствующей ему открытой системы (1.2) необходимо и достаточно, чтобы внутренний оператор T не имел нетривиального инвариантного подпространства, на котором аннулировался бы оператор $\Gamma^\times$. Если внутреннее пространство H конечномерно, это условие равносильно следующему: оператор T не имеет собственного вектора, на котором аннулируется оператор $\Gamma^\times$. Используя матричное представление операторов T и Γ (II. 18), мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 8. *Открытая система F_G* (II. 21) *проста тогда и только тогда, когда для каждого λ система уравнений*

$$A_{13}\psi_2=\lambda\Delta_L\psi_1,\ B_{31}\psi_1=\lambda\Delta_C\psi_2,\ B_{11}\psi_1=0,\ A_{33}\psi_2=0 \tag{30}$$

имеет лишь тривиальное решение относительно ψ_1 и ψ_2.

Отсюда, в частности, следует, что если система F_G на полусокращенном графе G проста, то в графе нет ни L-циклов, ни C-сечений.

Действительно, если в графе имеется L-цикл (т. е. цикл из L-ребер), то, как видно из (14), между строками матрицы (A_{11}, A_{13}) имеется линейная зависимость. Пусть первые s строк ее линейно независимы, а остальные суть их линейные комбинации. Матрицы, образованные первыми s строками матриц A_{11} и A_{12}, обозначим через a_{11} a_{13}. Тогда

$$A_{11}=\begin{pmatrix} U \\ K \end{pmatrix} a_{11},\ A_{13}=\begin{pmatrix} U \\ K \end{pmatrix} a_{13},$$

где K—некоторая матрица.

Система (30) при $\lambda=0$ допускает ненулевое решение: ψ_1—какой-нибудь столбец матрицы $\begin{pmatrix} -K' \\ U \end{pmatrix}$, $\psi_2=0$, так что система не проста. Аналогично доказывается отсутствие C-сечений.

Полусокращенный граф класса Ω назовем *сокращенным*, если в нем нет ни L-циклов, ни C-сечений. С помощью теоремы 6 можно показать, что всякая система на графе $G\in\Omega$ эквивалентна системе на сокращенном графе.

Заметим, что сокращенность графа лишь необходима, но не достаточна для простоты порождаемой им системы.

Донецкий государственный
университет

Поступила 22.VI.1972

Դ. Մ. ՉԱՈՒՍՈՎՍԿԻ. Բաց համակարգերի համարժեք ձևափոխումներ գրաֆների վրա *(ամփոփում)*

Հոդվածում նշվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի LC-գրաֆով ծնված փոխանցման ֆունկցիան համընկնի որոշ օպերատորային հանգույցի բնութագրիչ ֆունկցիայի հետ, Մ. Ս. Բրոդսկու և Մ. Ս. Լիվշիցի իմաստով։

Այդպիսի գրաֆների համար, օպերատորային հանգույցների ունիտար համարժեքության մասին թեորեմի օգնությամբ, ուսումնասիրված են փոխանցման ֆունկցիան պահպանող ձևափոխություններ, մասնավորապես՝ գրաֆի ներքին կողերի քանակի կրճատման հետ կապված ձևափոխությունները։

D. M. CHAUSOVSKII. *Equivalent transformations of open systems on graphs* (summary)

The necessary and sufficient conditions for the trans for function, generated by *LC*-graph to coincide with charakteristic function of some operator nodus are pointed out. Transformations, which retain the transfer function are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Лившиц.* Операторы, колебания, волны (открытые системы), изд. „Наука", 1966.
2. *А. Г. Руткас.* Несамосопряженные операторы в теории многополюсников, Записки Харьковского математического общества, т. XXXII, 1965.
3. *Д. М. Чаусовский.* Открытые системы на графах, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", 2, № 2, 1967.
4. *М. С. Бродский, Ю. Л. Шмульян.* Инвариантные подпространства линейного оператора и делители его характеристической функции, УМН, XIX, I (115), 1964.
5. *С. Сешу, Н. Балабанян.* Анализ линейных цепей, Госэнергоиздат, 1963.
6. *Myril B. Reed.* The Seg: A new class of graphs, IRE Transactions on C. T., v. CT–8, 1961.
7. *David P. Brown.* Derivative—explicit differential equations for RLC—graphs, J. Franklin Inst, 275, № 6, 1963.