Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

ОБ ИНДЕКСЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Операторы вида

$$(H\varphi)(t) = \varphi(t) + \int_{-\infty}^{\infty} l(t, \tau, t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1)$$

рассматриваются в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p < \infty$, в случае, когда функция $l(t, \tau, \xi)$ вырождена по ξ :

$$l(t, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n a_k(t, \tau) h_k(\xi). \quad (2)$$

В этом случае нетеровость оператора H устанавливается без требования гладкости $l(t, \tau, \xi)$ по t, τ , в предположении, что $a_k(t, \tau)$ — существенно ограниченные измеримые функции, имеющие в довольно слабом смысле значения $a_k(+\infty, +\infty)$, $a_k(-\infty, -\infty)$ (определения см. в § 1), а $h_k(\xi) \in L_1(-\infty, \infty)$, $k=1, \dots, n$.

Для оператора H вида (1)–(2) получены необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен индекс. Эти условия и индекс инвариантны относительно изменений функций $a_k(t, \tau)$, сохраняющих значения $a_k(+\infty, +\infty)$, $a_k(-\infty, -\infty)$. Основной для оператора H является теорема 1 § 2. Аналогичный результат (теорема 1 § 2) имеет место для дискретного аналога оператора (1)–(2).

Полученные для оператора H результаты применяются в § 3 к краевой задаче сопряжения аналитических функций, возмущенной интегральными слагаемыми типа свертки, и в § 4 к одному классу интегральных операторов с ядром типа однородной функции. Основные результаты этих параграфов содержатся в теоремах §§ 3 и 4.

Отметим, что операторы вида (1)–(2) были рассмотрены Л. С. Раковщиком [1] в том случае, когда $a_k(t, \tau) = a_k(t)$. Результаты работы [1] были дополнены авторами в [2]–[3]. Краткое сообщение о результатах, излагаемых в настоящей статье, содержится в заметке [4]. По сравнению с [4] здесь для функций $a_k(t, \tau)$ допускается более широкий класс функций, и, кроме того, показано, что условия нормальной разрешимости задачи § 3, полученные в [4] как достаточные, являются и необходимыми.

Заметим, что список литературы носит рабочий характер: он содержит лишь статьи, непосредственно используемые в работе.

§ 1. Пространства $M^{\text{sup}}(R_2)$, $M^{\text{mes}}(R_2)$

Пусть R_2 — евклидова плоскость и $M(R_2)$ — пространство измеримых существенно ограниченных на R_2 функций. Введем классы $M^{\text{sup}}(R_2)$, $M^{\text{mes}}(R_2)$, допускаемые для функций $a(t, \tau)$ в (1)–(2).

Определение 1. Будем говорить, что $a(t, \tau) \in M^{\text{sup}}(R_2)$, если $a(t, \tau) \in M(R_2)$ и существуют значения $a(+\infty, +\infty)$, $a(-\infty, -\infty)$, достигаемые в следующем смысле:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{ess sup}_{\substack{t > m \\ \tau > m}} |a(t, \tau) - a(+\infty, +\infty)| = 0, \quad (3)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{ess sup}_{\substack{t < -m \\ \tau < -m}} |a(t, \tau) - a(-\infty, -\infty)| = 0.$$

Очевидно, эти равенства определяют значения $a(+\infty, +\infty)$, $a(-\infty, -\infty)$ единственным образом.

Заметим, что класс $M^{\text{sup}}(R_2)$ шире класса $M^{\text{sup}}(\bar{R}_2)$, введенного в [4]. Так, функция $a(t, \tau) = \sin(t + \tau)$ при $0 < t < 1$, $\tau > 0$ или $0 < \tau < 1$, $t > 1$ и $a(t, \tau) = 0$ для остальных (t, τ) , принадлежит $M^{\text{sup}}(R_2)$, причем $a(+\infty, +\infty) = a(-\infty, -\infty) = 0$, однако $a(t, \tau) \notin M^{\text{sup}}(\bar{R}_2)$.

Определение 2. Будем говорить, что $a(t, \tau) \in M^{\text{mes}}(R_2)$, если $a(t, \tau) \in M(R_2)$ и существуют значения $a(+\infty, +\infty)$, $a(-\infty, -\infty)$, достигаемые в следующем смысле: либо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes} \{ \tau : \text{ess sup}_{t > m} |a(t, \tau) - a(+\infty, +\infty)| > \varepsilon, \tau > m \} = 0, \quad (4)$$

либо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes} \{ t : \text{ess sup}_{\tau > m} |a(t, \tau) - a(+\infty, +\infty)| > \varepsilon, t > m \} = 0 \quad (4')$$

и аналогично для $a(-\infty, -\infty)$.

Определение 3. Будем говорить, что $a(t, \tau) \in M_0^{\text{sup}}(R_2)$ или $M_0^{\text{mes}}(R_2)$, если $a(t, \tau) \in M^{\text{sup}}(R_2)$ или $M^{\text{mes}}(R_2)$ соответственно и $a(+\infty, +\infty) = a(-\infty, -\infty) = 0$.

Очевидно $M^{\text{sup}}(R_2) \subset M^{\text{mes}}(R_2)$. Мы однако будем использовать оба класса. Это связано с тем, что для функций $a(t, \tau)$ из класса $M^{\text{sup}}(R_2)$ нетеровость оператора (1)–(2) можно получить во всех пространствах $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$, а для функций $a(t, \tau)$ из $M^{\text{mes}}(R_2)$ — лишь в $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$. В статье [3] указан контрпример, когда для $a(t, \tau) = a(t) \in M_0^{\text{mes}}(R_2)$ нарушается в пространстве $M = L_\infty$ основная лемма о полной непрерывности операторов свертки (см. лемму 1 настоящей статьи).

Определение класса $M^{\text{mes}}(R_2)$ корректно в следующих двух отношениях:

а) равенство (4) (равно как и (4')) определяет значение $a(+\infty, +\infty)$ единственным образом;

б) если функция $a(t, \tau) \in M^{\text{mes}}(R_2)$ имеет значение $a(+\infty, +\infty)$ и в смысле (4), и в смысле (4') одновременно, то оно одно и то же*.

Доказательство а) нетрудно получить, применяя неравенство

$$\begin{aligned} \text{mes} \{t: t \in E, |a(t) + b(t)| > \varepsilon\} &\leq \\ &\leq \text{mes} \left\{ t: t \in E, |a(t)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} + \text{mes} \left\{ t: t \in E, |b(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

справедливое для любого измеримого множества E и функций $a(t)$, $b(t)$, измеримых на E .

б) Пусть от противного $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes} Y_{m, \varepsilon} = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes} Y'_{m, \varepsilon} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$, где

$$Y_{m, \varepsilon} = \{\tau: \tau > m, \text{ess sup}_{t > m} |a(t, \tau) - a_1(+\infty, +\infty)| > \varepsilon\},$$

$$Y'_{m, \varepsilon} = \{t: t > m, \text{ess sup}_{\tau > m} |a(t, \tau) - a_2(+\infty, +\infty)| > \varepsilon\}$$

и $a_1(+\infty, +\infty) \neq a_2(+\infty, +\infty)$. Пусть $CY_{m, \varepsilon} = \{t: t > m, \text{ess sup}_{\tau > m} |a(t, \tau) - a_2(+\infty, +\infty)| \leq \varepsilon\}$. Очевидно

$$\text{mes} Y_{m, \varepsilon} > \text{mes} \{ \tau: \tau > m, \text{ess sup}_{t \in CY_{m, \varepsilon}} |a(t, \tau) - a_1(+\infty, +\infty)| > \varepsilon \}. \quad (6)$$

С другой стороны

$$\text{ess sup}_{t \in CY_{m, \varepsilon}} |a(t, \tau) - a_1(+\infty, +\infty)| \geq |a_1(+\infty, +\infty) - a_2(+\infty, +\infty)| - \varepsilon$$

для $\tau > m$, так что $\text{mes} Y_{m, \varepsilon} > \infty$ при всех $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} |a_1(+\infty, +\infty) - a_2(+\infty, +\infty)|$, что невозможно.

Отметим случай $a(t, \tau) = a(\tau)$. Тогда $a(t, \tau)$ заведомо не имеет значения $a(+\infty, +\infty)$ в смысле (4), а (4) принимает вид

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes} \{ \tau: |a(\tau) - a(+\infty)| > \varepsilon, \tau > m \} = 0, \quad (7)$$

что совпадает с определением класса $M^{\text{mes}}(R_1)$ в статьях [2] и [3], где R_1 — прямая. Класс $M^{\text{mes}}(R_1)$ можно эквивалентно определить также следующим образом:

Определение 4. $a(\tau) \in M^{\text{mes}}(R_1)$, если $a(\tau) \in M(R_1)$ и существуют постоянные c_1, c_2 такие, что меры $\text{mes} \{ \tau: \tau > 0, |a(\tau) - c_1| > \varepsilon \}$, $\text{mes} \{ \tau: \tau < 0, |a(\tau) - c_2| > \varepsilon \}$ конечны при любом $\varepsilon > 0$.

* Ясно, что существуют функции $a(t, \tau) \in M^{\text{mes}}(R_2)$, для которых значение $a(+\infty, +\infty)$ достигается только одним из способов (4) — (4'), например

$$a(t, \tau) = \frac{\sin \tau}{1 + |t|}.$$

Доказательство эквивалентности становится очевидным, если воспользоваться равенством:

$$\text{mes } \{\tau: \tau > 0, |a(\tau) - c_1| > \varepsilon\} = \sum_{k=0}^{m-1} \text{mes } \{\tau: k < \tau < k+1, |a(\tau) - c_1| > \varepsilon\} + \text{mes } \{\tau: \tau > m, |a(\tau) - c_1| > \varepsilon\}.$$

§ 2. О непрерывности в L_p оператора H

Рассмотрим оператор

$$(H\varphi)(t) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} a_k(t, \tau) h_k(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (8)$$

в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$. Все последующие выкладки для простоты будем проводить, считая в (8) $n=1$ и обозначив

$$a_1(t, \tau) = a(t, \tau), \quad h_1(t) = h(t) \in L_1.$$

Будем предполагать, что $a(t, \tau) \in M^{\text{огс}}(R_1)$, если допускаются пространства L_p , $1 < p < \infty$ и $a(t, \tau) \in M^{\text{суп}}(R_2)$, если рассматриваются все пространства L_p , $1 \leq p \leq \infty$. Оператор H в таком случае представим в виде суммы парного оператора и вполне непрерывного оператора:

$$H\varphi = H_0\varphi + T_1\varphi + T_2\varphi. \quad (9)$$

Парный оператор H_0 имеет вид

$$(H_0\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) + a(\infty, \infty) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, & t > 0 \\ \varphi(t) + a(-\infty, -\infty) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, & t < 0 \end{cases} \quad (10)$$

и

$$(T_1\varphi)(t) = \theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} [a(t, \tau) - a(+\infty, +\infty)] \theta(\tau) h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+ \theta(-t) \int_{-\infty}^{\infty} [a(t, \tau) - a(-\infty, -\infty)] \theta(-\tau) h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

$$(T_2\varphi)(t) = \theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} [a(t, \tau) - a(+\infty, +\infty)] \theta(-\tau) h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+ \theta(-t) \int_{-\infty}^{\infty} [a(t, \tau) - a(-\infty, -\infty)] \theta(\tau) h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

где $\theta(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } t)$. Полная непрерывность оператора T_2 в L_p следует из известного (см. [5]) факта о полной непрерывности в L_p оператора вида $\theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \theta(-\tau) \varphi(\tau) d\tau$ (см. по этому поводу [16], стр. 88—92). Полная непрерывность оператора T_1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Оператор

$$\mathcal{M}(T\varphi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t, \tau) h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

вполне непрерывен в $L_p(-\infty, \infty)$ при $1 < p < \infty$, если $a(t, \tau) \in M_0^{\text{mes}}(R_2)$ и при всех $1 \leq p \leq \infty$, если $a(t, \tau) \in M_0^{\text{sup}}(R_2)$.

Доказательство. Имеем

$$(T\varphi)(t) = (T_m\varphi)(t) + \theta(|t| - m) \int_{|t| > m} a(t, \tau) h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

где

$$(T_m\varphi)(t) = \int_{|t| < m} a(t, \tau) h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau + \theta(m - |t|) \int_{|t| > m} a(t, \tau) h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

— вполне непрерывные в L_p операторы (см. [6], стр. 30. В [6] $a(t, \tau) \equiv 1$, что несущественно, как и при рассмотрении полной непрерывности оператора T_2). Остается показать, что $T_m \rightarrow T$. Это очевидно при $a(t, \tau) \in M_0^{\text{sup}}(R_2)$:

$$\|T - T_m\|_{L_p} \leq \|h\|_{L_1}, \text{ ess sup}_{|t| > m, |\tau| > m} |a(t, \tau)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Пусть $a(t, \tau) \in M_0^{\text{mes}}(R_2)$. Имеем

$$\|(T - T_m)\varphi\|_{L_p} \leq c \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{|t| > m} |a(t, \tau) h(t-\tau)| |\varphi(\tau)|^p d\tau \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $a(t, \tau)$ достигает свои значения $a(+\infty, +\infty) = a(-\infty, -\infty) = 0$ в смысле (4') (если одно из этих значений достигается в смысле (4), то доказательство на соответствующей полуоси получается переходом к сопряженному оператору).

Обозначим

$$X_{m, \varepsilon} = \{t: \text{ess sup}_{|t| > m} |a(t, \tau)| > \varepsilon\},$$

так что $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes } X_{m, \varepsilon} = 0$ для всякого $\varepsilon > 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} \|(T - T_m)\varphi\|_{L_p} &\leq c_1 \varepsilon \|\varphi\|_{L_p} + c_2 \|\varphi\|_{L_p} \sup_{|t| > m} \left(\int_{X_{m, \varepsilon}} |h(t - \tau)| dt \right)^{1/p} = \\ &= \left\{ c_1 \varepsilon + c_2 \sup_{|t| > m} \left(\int_{X_{m, \varepsilon}} |h(t)| dt \right)^{1/p} \right\} \|\varphi\|_{L_p}, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 — постоянные и $\text{mes } \bar{X}_{m, \varepsilon} = \text{mes } X_{m, \varepsilon} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если $a(t) \in M^{\text{mes}}(R_1)$, то оператор

$$\int_{-\infty}^{\infty} [a(t) - a(\tau)] h(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$$

вполне непрерывен в $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$, $h(t) \in L_1$.

Следствие 2. Оператор H вида (8) является оператором локального типа (см. [6]) в $L_p(-\infty, \infty)$ при $1 < p < \infty$, если $a_k(t, \tau) \in M^{\text{mes}}(R_2)$ и при $1 \leq p \leq \infty$, если $a_k(t, \tau) \in M^{\text{sup}}(R_2)$.

Из (9) и из полной непрерывности операторов T_1, T_2 вытекает следующая

Теорема 1. Пусть $h_k(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ и $a_k(t, \tau) \in M^{\text{mes}}(R_2)$ при $1 < p < \infty$ и $a_k(t, \tau) \in M^{\text{sup}}(R_2)$ при $1 \leq p \leq \infty$. Для того чтобы оператор H вида (8) был оператором Нетера в $L_p(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma(\lambda)^+ \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{k=1}^n a_k(+\infty, +\infty) \hat{h}_k(\lambda) \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

$$\sigma(\lambda)^- \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{k=1}^n a_k(-\infty, -\infty) \hat{h}_k(\lambda) \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

где $\hat{h}_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} h(t) dt$. Индекс оператора H вычисляется по формуле

$$\chi_{L_p}(H) = -\frac{1}{2\pi} \Delta \arg \left[\frac{\sigma(\lambda)^+}{\sigma(\lambda)^-} \right]_{-\infty}^{\infty}.$$

Имеет место также дискретный аналог теоремы 1 (ср. [7]). Пусть

$$(H\varphi)_r = a_r \varphi_r + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{r,j}^k h_{r-j}^k \varphi_j \right), \quad r = 0, \pm 1, \dots,$$

где

$$\{\varphi_r\}_{r=-\infty}^{\infty} \in l_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \{h_r^k\}_{r=-\infty}^{\infty} \in l_1, \quad k = 1, \dots, n,$$

$\{a_r\}_{r=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{C}$ и двойные последовательности $\{a_{rj}^k\}_{r, j=-\infty}^{+\infty}$, $k=1, \dots, n$, ограничены и имеют при $(r, j) \rightarrow (+\infty, +\infty)$ и $(r, j) \rightarrow (-\infty, -\infty)$ один из повторных (равномерных в каждом случае) пределов.

Теорема 1'. Для того чтобы оператор $\{(H\varphi)_r\}_{r=-\infty}^{\infty}$ был оператором Нетера в l_p , $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} a_{\pm\infty} + \sum_{k=1}^n a_{\pm\infty, \pm\infty} h^k(t) \neq 0, \quad |t|=1,$$

где $h^k(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l^k t^l$. При этом

$$\chi_{l_p}(H) = -\frac{1}{2\pi} \Delta \left[\arg \frac{\sigma(t)^+}{\sigma(t)^-} \right]_{|t|=1}. \quad (11)$$

Заметим в заключение этого параграфа, что аналогичные результаты имеют место и для многомерных операторов типа (8) в областях с конической структурой на бесконечности. В настоящей статье мы, однако, на этом не останавливаемся.

§ 3. Об индексе краевой задачи Римана с интегральными слагаемыми

Применим результаты § 2 к вычислению индекса следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} (A\varphi)(t) \equiv \varphi^+(t) + \int_{-\infty}^{\infty} a(t, \tau) h_1(t-\tau) \varphi^+(\tau) d\tau - \\ - \left[G(t) \varphi^-(t) + \int_{-\infty}^{\infty} b(t, \tau) h_2(t-\tau) \varphi^-(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varphi^{\pm}(t) \in L_p^{\pm}(-\infty, +\infty)$, $p > 1$; $L_p^{\pm} = (I \pm S) L_p$, S — сингулярный оператор с ядром Коши. Предполагается, что $h_1(t)$, $h_2(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ и что

$$\begin{aligned} a(t, \tau), b(t, \tau) \in M^{\text{mes}}(R_2), \\ a(+\infty, +\infty) = a(-\infty, -\infty), b(+\infty, +\infty) = b(-\infty, -\infty), \end{aligned} \quad (13)$$

$$G(t) \in M^{\text{mes}}(R_1) \cap A_p, G(+\infty) = G(-\infty).$$

Здесь $M^{\text{mes}}(R_2)$ — класс, введенный в § 1 определением 2. Определение класса A_p см. в [8]. В частности можно считать $G(t)$ непрерывной на сомкнутой оси функцией, $G(t) \neq 0$.

Задачи вида (12) рассматривались ([9], § 35) в случае конечного контура и фредгольмовских ядер в гельдэровских классах. Естественно, что индекс таких задач определялся коэффициентом $G(t)$ краевой задачи,

Мы покажем, что даже добавление нефредгольмовских интегральных слагаемых с разностным ядром, таких как в (12), не меняет индекса краевой задачи. Этот индекс, по-прежнему, равен индексу (Коши) коэффициента $G(t)$. Однако условие нормальной разрешимости зависит от интегральных слагаемых. Будет также рассмотрен случай $a(t, \tau) = \text{const}$, $b(t, \tau) = \lambda G(t)$, когда уравнение (12) решается в замкнутой форме.

В силу результатов § 2 о полной непрерывности операторов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} [a(t, \tau) - a(\infty, \infty)] h(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \text{ достаточно вместо индекса оператора (12) вычислить индекс оператора } (A_1 \varphi)(t) = \varphi^+(t) - G(t)\varphi^-(t) + a(\infty, \infty) \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau) \varphi^+(\tau) d\tau - b(\infty, \infty) \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t-\tau) \varphi^-(\tau) d\tau.$$

Из условия $G(t) \in A_p$ следует, что $G(\infty) \neq 0$, так что оператор A_1 вполне непрерывным слагаемым $[G(t) - G(\infty)] \frac{b(\infty, \infty)}{G(\infty)} (h_2 * \varphi^-)$ отличается от оператора

$$(A_2 \varphi)(t) = \varphi^+(t) + a(\infty, \infty) \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau) \varphi^+(\tau) d\tau - G(t) \left[\varphi^-(t) + \frac{b(\infty, \infty)}{G(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t-\tau) \varphi^-(\tau) d\tau \right]. \quad (14)$$

Введем обозначения $a(\infty, \infty) h_1(t) = h(t)$, $\frac{b(\infty, \infty)}{G(\infty)} h_2(t) = k(t)$, $H\varphi = h * \varphi$, $K\varphi = k * \varphi$. Заметим, что для $h(t), k(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ оператор свертки коммутирует с сингулярным оператором:

$$HS\varphi = SH\varphi, KS\varphi = SK\varphi, \varphi \in L_p(-\infty, \infty), 1 < p < \infty,$$

и, следовательно

$$H, K \in [L_p^\pm \rightarrow L_p^\pm].$$

Введем оператор

$$B = (I+H)P_+ + (I+K)P_-$$

и сингулярный оператор

$$N = P_+ - GP_-,$$

где G — оператор умножения на функцию $G(t)$, $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$. Нетрудно видеть, что

$$A_2 = NB = BN + T, \quad (15)$$

где T — вполне непрерывный оператор (в силу леммы 1). Поэтому оператор A_2 нетеров тогда и только тогда, когда нетеровы N и B . Так как $G(t) \in A_p$, то оператор N нетеров в L_p и его индекс равен индексу (в смысле [8]) функции $G(t)$:

$$x = x_{L_p}(N) = \text{ind } G(t). \quad (16)$$

Что же касается оператора B , то его нетеровость совпадает с обратимостью. Именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Оператор B нетеров в $L_p(-\infty, \infty)$ тогда и только тогда, когда он обратим в $L_p(-\infty, \infty)$. Необходимое и достаточное условие обратимости имеет вид*

$$1 + \hat{h}(x) \neq 0, \quad x > 0,$$

$$1 + \hat{k}(x) \neq 0, \quad x \leq 0. \quad (17)$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что при выполнении условий (17) оператор B обратим. Применим следующую очевидную лемму

Лемма 2. *Пусть E — банахово пространство, распадающееся на прямую сумму $E_+ \oplus E_-$ двух своих подпространств с проекторами $P_{\pm}$ соответственно. Если M_1, M_2 — операторы, коммутирующие с проекторами P_+, P_- соответственно, то оператор $B = M_1 P_+ + M_2 P_-$ обратим в E тогда и только тогда, когда операторы M_1 и M_2 обратимы в E_+ и E_- соответственно.*

В силу этой леммы достаточно показать, что уравнение вида

$$(I + H)\varphi^+ \equiv \varphi^+(t) + (h * \varphi^+)(t) = f^+(t),$$

где $h \in L_1$ разрешимо в L_p^+ , когда $1 + \hat{h}(x) \neq 0, x \geq 0$. Это очевидно при $p=2$. При $p \neq 2$ построим обратный оператор, ограниченный в $L_p^+, 1 < p < \infty$. Заметим для этого, что всякую функцию $\hat{h}(x) \in R_0^*$, удовлетворяющую условию $1 + \hat{h}(x) \neq 0, 0 \leq x \leq \infty$, можно продолжить для $x < 0$:

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \hat{h}(x), & x > 0 \\ \Psi(x), & x < 0 \end{cases}$$

так, чтобы $\tilde{h}(x) \in R_0$ и $1 + \tilde{h}(x) \neq 0$ для всех $x, -\infty < x < \infty$. Тогда в силу теоремы Винера-Леви $[1 + \tilde{h}(x)]^{-1} \hat{h}(x) \in R_0$ и обратный оператор имеет вид

$$(I + H)^{-1} f^+ = f^+(t) - (m * f^+)(t),$$

где $m(t) \in L_1$ и $\hat{m}(x) = [1 + \tilde{h}(x)]^{-1} \hat{h}(x)$.

* R_0 — кольцо преобразований Фурье функций из $L_1(-\infty, \infty)$.

Таким образом, из условий (17) следует обратимость оператора B и тем более его нетеровость.

Остается показать, что из нетеровости оператора B вытекают условия (17). Этим доказательство теоремы будет завершено.

Пусть оператор B нетеров в L_p . Так как B коммутирует с P_+ , то нетеров в L_p^+ оператор $P_+BP_+ = P_+(I+H)P_+$. Покажем, что нетеровость последнего влечет первое из условий (17): $1 + \hat{h}(x) \neq 0, x > 0$. Доказательство этого проведем по схеме, по которой проводится доказательство необходимости условий нетеровости для различных операторов в [10]. Предположим от противного, что $1 + \hat{h}(x_0) = 0, x_0 \geq 0$ и оператор $P_+(I+H)P_+$ нетеров в L_p^+ .

Обозначим $c_m = 1 + \int_{|t|>m} e^{ix_0 t} h(t) dt$, $\hat{h}_m(x) = \int_{-m}^m h(t) e^{ix_0 t} dt$. Так как $P_+(c_m I + H_m)P_+ \rightarrow P_+(I+H)P_+$ при $m \rightarrow \infty$, где $(H_m \varphi)(x) = \int_{-m}^m h_m(x-t) \varphi(t) dt$, то при достаточно большом m оператор $P_+(c_m I + H_m)P_+$ будет нетеров, причем по построению $c_m + \hat{h}_m(x_0) = 0$. Функция $c_m + \hat{h}_m(x)$ уже допускает выделение нуля (см. [11], лемма 4.1):

$$c_m + \hat{h}_m(x) = (x - x_0) \int_{-m}^m g_m(t) e^{ix_0 t} dt, \text{ где } g_m(t) \in L_1.$$

Но тогда

$$c_m + \hat{h}_m(x) = \frac{x - x_0}{x + i} (c_m + \hat{\psi}_m(x)), \quad (18)$$

где $\hat{\psi}(x) \in R_0$. Пусть H_{x_0} и $c_m I + \Psi_m$ — операторы свертки, отвечающие символам $\frac{x - x_0}{x + i}$ и $c_m + \hat{\psi}_m(x)$ соответственно:

$$H_{x_0} \varphi = \varphi(x) + i(x_0 + i) \int_{-x}^x e^{t-x} \varphi(t) dt,$$

$$(c_m I + \Psi_m) \varphi = c_m \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x-t) \varphi(t) dt.$$

В силу (18) имеем

$$P_+(c_m I + H_m)P_+ = (P_+H_{x_0}P_+)[P_+(c_m I + \Psi_m)P_+] = \\ = [P_+(c_m I + \Psi_m)P_+](P_+H_{x_0}P_+).$$

Отсюда вытекает, что оператор $P_+H_{x_0}P_+$ нетеров (теорема Аткинсона) в L_p^+ . Покажем, что тогда и H_{x_0} нетеров в L_p .

Пусть вначале $x_0 > 0$. Тогда символ оператора H_{x_0} отличен от нуля при $x \leq 0$ и поэтому согласно уже доказанному оператор $P_-H_{x_0}P_-$ обратим (и тем более нетеров) в L_p^- . А из нетеровости операторов $P_+H_{x_0}P_+$, $P_-H_{x_0}P_-$ в L_p^+ , L_p^- соответственно следует с учетом коммутации H_{x_0} с $P_{\pm}$ нетеровость H_{x_0} в L_p , что невозможно.

Остался случай $x_0 = 0$. Поступая как и раньше (выделяя $\frac{x}{x+i}$ вместо $\frac{x}{x+i}$) получим, что нетеров как оператор $P_+H_0P_+$ в L_p^+ , где

$(H_0 \varphi)(x) = \varphi(x) - \int_{-\infty}^x e^{t-x} \varphi(t) dt$, так и оператор $P_+H^0P_+$ в L_p^+ , где

$(H^0 \varphi)(x) = \varphi(x) - \int_x^{\infty} e^{x-t} \varphi(t) dt$. А так как $P_-H_0P_- = QP_+H^0P_+Q$, где

$Q\varphi = \varphi(-t)$, то оператор $P_-H_0P_-$ нетеров в L_p^- . Но тогда, как и выше, оператор H_0 нетеров в L_p , что невозможно.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 и из представления (15) вытекает следующая

Теорема 3. Пусть $h_1(t), h_2(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, $a(t, \tau), b(t, \tau), G(t)$ удовлетворяют условиям (13). Для того чтобы задача (12) была нетерова в L_p , $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$1 + a(\infty, \infty) \hat{h}_1(x) \neq 0, \quad x \geq 0,$$

$$G(\infty) + b(\infty, \infty) \hat{h}_2(x) \neq 0, \quad x \leq 0.$$

При выполнении этих условий

$$\kappa_{L_p}(A) = \text{ind } G(t).$$

Рассмотрим в заключение случай $a(t, \tau) = \text{const}$, $b(t, \tau) = iG(t)$. Задача (12) принимает вид

$$\begin{aligned} (A\varphi)(t) &\equiv \varphi^+(t) + \int_{-\infty}^t h(t-\tau) \varphi^+(\tau) d\tau - \\ &- G(t) \left[\varphi^-(t) + \int_{-\infty}^t k(t-\tau) \varphi^-(\tau) d\tau \right] = f(t). \end{aligned} \quad (19)$$

К оператору A применимо представление (15): $A = NB$, где

$$N = \frac{1}{2}(I+G) + \frac{1}{2}(I-G)S, \quad B = (I+H)P_+ + (I+K)P_-.$$

Если выполнены условия $1 + \hat{h}(x) \neq 0, x \geq 0$, $1 + \hat{k}(x) \neq 0, x \leq 0$, то оператор B обратим: $B^{-1} = (I+H)^{-1}P_+ + (1+K)^{-1}P_-$, где $(I+H)^{-1}$,

$(I+K)^{-1}$ строятся как и при доказательстве теоремы 2. Следовательно, оператор A имеет d -характеристику вида $(x, 0)$ при $x \geq 0$ и $(0, |x|)$ при $x \leq 0$. Решения уравнения $Az = f$ находятся в замкнутой форме: $\varphi = A^{-1}f = B^{-1}N^{-1}f$.

Обозначим еще $\alpha_1(t) = \frac{1}{2}[1 + G(t)]$, $\alpha_2(t) = \frac{1}{2}[1 - G(t)]$. Тогда задача (19) равносильна уравнению

$$\alpha_1(t)\varphi(t) + \frac{\alpha_2(t)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2}(H + GK)\varphi + \frac{1}{2}(H - GK)S\varphi = f.$$

В случае $G(t) = \text{const}$ и $H - GK = 0$ последнее уравнение было рассмотрено другим путем Г. И. Савельевым [12] в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

§ 4. Об одном обобщении интегральных уравнений с однородным ядром

Рассмотрим оператор

$$(K\psi)(x) \equiv \psi(x) + \int_0^a \gamma(x, y)k(x, y)\psi(y)dy = g(x), \quad 0 < x < a < (\infty), \quad (20)$$

где $k(x, y)$ — однородная функция произвольного порядка α : $k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha k(x, y)$, $-\infty < \alpha < \infty$. Функция $\gamma(x, y)$ будет принадлежать некоторому подклассу измеримых в основном квадрате функций, ограниченных всюду, кроме, быть может, начала координат.

Уравнение (20) было изучено Л. Г. Михайловым [13]—[14] в предположении, что $\alpha = -1$ и $\gamma(x, y)$ — непрерывная функция*. Заметим, что если $x^{1+\alpha}\gamma(x, y)$ — непрерывная функция, то утверждения этого параграфа можно получить с помощью результатов работы [14]. Мы, однако, будем пользоваться другими соображениями. Именно, мы приведем уравнение (20) к уравнению (1), изученному в § 2, что позволит рассматривать более широкий для $\gamma(x, y)$ класс функций.

Используем для этой цели известный [15] способ сведения уравнения с однородным ядром к уравнению типа свертки. В связи с этим будем считать, что для ядра $k(x, y)$ найдется число β такое, что выполняется одно из условий суммируемости:

$$k_\beta = \int_0^{\infty} |k(1, y)|y^{-\beta} dy < \infty, \quad (21)$$

* При этих предположениях в [13]—[14] рассмотрены также уравнения в случае $a < x, y < b, a < 0 < b$.

$$k'_\beta = \int_0^\infty |k(x, 1)| x^{\beta-1} dx < \infty \quad (21')$$

(при $\alpha = -1$ условия (21)–(21') совпадают). Соответствующее уравнение в свертках имеет вид

$$(H\varphi)(t) = \varphi(t) + \int_0^\infty \alpha(t, \tau) h(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad t > 0,$$

где

$$\begin{aligned} x &= \alpha e^{-t}, \quad y = \alpha e^{-\tau}, \\ \varphi(t) &= e^{-\beta t} \psi(x), \quad f(t) = e^{-\beta t} g(x), \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} h(t) &= k(1, e^t) e^{(1-\beta)t}, \quad \|h\|_{L_1} = k_\beta, \\ \alpha(t, \tau) &= \alpha^{1+\alpha} e^{-(1+\alpha)\tau} \gamma(\alpha e^{-t}, \alpha e^{-\tau}) \end{aligned} \quad (23)$$

в случае ядра $k(x, y)$, удовлетворяющего условию (21), и

$$h(t) = k(e^{-t}, 1), \quad \|h\|_{L_\beta} = k'_\beta$$

в случае (21'). Замена (22) устанавливает изометрию между пространством $L_p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$ и весовым пространством

$$L_p^\beta(0, \alpha) = \{\psi(x) : x^{\beta-1/p} \psi(x) \in L_p(0, \alpha)\}.$$

(В частности при $\beta = \frac{1}{p}$ имеем изометрию между $L_p(0, \infty)$ и $L_p(0, \alpha)$).

Очевидно $\|\varphi\|_{L_p(0, \infty)} = \|\psi\|_{L_p^\beta(0, \alpha)}$. Пусть U —оператор, осуществляющий изометрию $L_p^\beta(0, \alpha)$ на $L_p(0, \infty)$. Тогда $K = U^{-1} H U$, $\|K\|_{L_p^\beta \rightarrow L_p^\beta} = \|H\|_{L_p \rightarrow L_p}$.

Обозначим через Q основной квадрат $Q = \{(x, y) : 0 < x < \alpha, 0 < y < \alpha\}$.

Определение 4. Будем говорить, что $b(x) \in M^{\text{sup}}(0, \alpha)$, если $b(x)$ измерима, существенно ограничена на $[0, \alpha]$ и существует предельное значение $b(0)$ в следующем смысле:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{ess sup}_{0 < x < \frac{1}{m}} |b(x) - b(0)| = 0.$$

Определение 5. Будем говорить, что $\gamma(x, y) \in M^{\text{sup}}(Q)$, если:
1) $\gamma(x, y)$ —измеримая, существенно ограниченная на Q функция;
2) $\gamma(x, y)$ имеет предельное значение $\gamma(0, 0)$, достигаемое в следующем смысле:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{ess sup}_{\substack{0 < x < \frac{1}{m} \\ 0 < y < \frac{1}{m}}} |\gamma(x, y) - \gamma(0, 0)| = 0.$$

Очевидно, класс $M^{\text{sup}}(Q)$ содержит в себе класс непрерывных ограниченных в $\overline{Q}$ функций, имеющих в начале координат один из повторных (равномерных) пределов.

Применение теоремы 1 § 2 дает следующую теорему:

Теорема 4. Пусть $k(x, y)$ — однородная функция, удовлетворяющая условию (21), и пусть $\gamma_1(x, y) = x^{1+\alpha} \gamma(x, y) \in M^{\text{sup}}(Q)$. Для того чтобы оператор K был оператором Нетера в пространстве $L_p^{\alpha}(0, a)$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma(\lambda) = 1 + \gamma_1(0, 0) \mathfrak{X}(\lambda - \beta + 1) \neq 0, \quad -\infty \leq \lambda \leq \infty,$$

где $\mathfrak{X}(s) = \int_0^a k(1, y) y^{s-1} dy$ — преобразование Меллина функции $k(1, y)$. Индекс оператора K вычисляется по формуле

$$\chi_{L_p}^{\beta}(K) = -\frac{1}{2\pi} \Delta [\arg \sigma(\lambda)] \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Теорема 4 для определенности сформулирована для ядра $k(x, y)$, удовлетворяющего условию (21). Она справедлива и в случае (21'), если в ее формулировке заменить $\gamma_1(x, y)$ на

$$\gamma_2(x, y) = y^{1+\alpha} \gamma(x, y) \text{ и } \mathfrak{X}(\lambda - \beta + 1) \text{ на } \mathfrak{X}_1(-\lambda + \beta),$$

где $\mathfrak{X}_1(s) = \int_0^a k(x, 1) x^{s-1} dx$.

Нетрудно видеть, что результаты § 4 переносятся на оператор K вида

$$(K\psi)(x) = \psi(x) + \sum_{j=1}^n \int_0^a \gamma_j(x, y) k_j(x, y) \psi(y) dy,$$

где $k_j(x, y)$ — однородные функции порядков α_j , удовлетворяющие условию суммируемости (21) для $1 \leq j \leq m$ и условию (21') для $m+1 \leq j \leq n$, где $1 \leq m \leq n$. При этом от функций $\gamma_j(x, y)$ придется, очевидно, потребовать, чтобы

$$\gamma_j(x, y) x^{1+\alpha_j} \in M^{\text{sup}}(Q), \quad j=1, 2, \dots, m,$$

$$\gamma_j(x, y) y^{1+\alpha_j} \in M^{\text{sup}}(Q), \quad j=m+1, \dots, n.$$

Наконец, заметим, что аналогичным образом рассматривается случай, когда $\alpha = \infty$. При этом поведение $\gamma(x, y)$ в точке (∞, ∞) следует задавать согласно определению 1 § 1.

Ростовский государственный
университет

Поступила 24.IX.1971

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ, Ս. Գ. ՍԱՄԿՈՒ. Ինտեգրալ օպերատորների դասերի ինդեքսի մասին (սա-
փոփոխ)

$$\text{Գտնված են } l(t, \tau, t - \tau) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t, \tau) h_k(t - \tau) \text{ տեսքի կորիզներով փաթեթի}$$

տիպի ընդհանրացված օպերատորների մի դասի ներտրանսիանի անհրաժեշտ և բավարար

պայմաններ և հաշված է նրանց ինդեքսը $\alpha_k(t, \tau)$ -ի՝ անվերջում վարքի վրա արված շատ բույլ ենթադրությունների դեպքում, Այդ արդյունքները կիրառվում են անալիտիկ ֆունկցիաների լծորդման փաթեթի օպերատորներով զրգրված եզրային խնդրի, ինչպես համասեռ ֆունկցիայի տիպի կորիզով ինտեգրալ օպերատորների ստամեսադրման համար:

N. K. KARAPETIANČ, S. G. SAMKO. *On the index of some classes of integral operators (summary)*

The necessary and sufficient conditions for a class of generalized convolution operators with the kernel $l(t, \tau, t - \tau) = \sum_{k=1}^n a_k(t, \tau) h_k(t - \tau)$ to be noethorian are obtained under rather weak assumptions on the behaviour of $a_k(t, \tau)$ at infinity and the formula for the index is found. These results are applied to the investigation of the boundary value problem of conjugation analytic functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. С. Раковщик. К теории интегральных уравнений типа свертки, УМН, XVIII, вып. 4 (112), 1963, 171—178.
2. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко. Об одном классе интегральных уравнений типа свертки и его приложения, ДАН СССР, 193, № 5, 1970, 981—984.
3. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко. Об одном классе интегральных уравнений типа свертки и его приложения, Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 1971.
- [4. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко. Об индексе некоторых классов интегральных операторов, ДАН СССР, 194, № 3, 504—507.
5. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Парное интегральное уравнение и его транспонирование, Журн. теоретич. и прикл. матем., № 1, 59—91, 1953, Львов.
6. И. Б. Симоненко. Операторы типа свертки в конусах, Мат. сб., 174 (116), № 2, 1967, 298—313.
7. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко. О дискретных операторах Винера-Хопфа с осциллирующей коэффициентом, ДАН СССР.
8. И. Б. Симоненко. Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее приложение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами, Изв. АН СССР, серия матем., 28, № 2, 1964, 277—366.]
9. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, ФМ, М., 1963.
10. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, изд. "Наука", М., 1971.
11. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 5 (83), 1958, 3—120.
12. Г. И. Савельев. Об одном классе линейных сингулярных интегральных уравнений, Тр. Новочеркасского политех. ин-та, 109, 1960, 3—10.
13. А. Г. Михайлов. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени—1, изд. АН Тадж.ССР, Душанбе, 1966.
14. А. Г. Михайлов. Интегральные уравнения с локально-однородными ядрами степени—1. В сб. "Дифференц. и интегральн. уравнения с сингулярными коэффициентами", изд. АН Тадж.ССР, Душанбе, 1969, 54—72.
15. Е. Титчмарш. Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
16. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., изд. "Наука", 1966.