ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 1, 1973 Математика

В. В. САРАФЯН

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ В ОТДЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ

§ 1. Введение

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве R^n задан эллиптический оператор

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Мы предполагаем, что оператор L вырождается только в начале координат и коэффициенты его таковы, что $a^{ij}(0) = b^i(0) = 0$, $i, j = 1, \cdots, n$. Обозначим через D ограниченную область с гладкой границей Γ, содержащую начало координат. Коэффициенты оператора L дважды непрерывно дифференцируемы и

$$\max_{\substack{1 \leq i, j, k, l \leq n \\ x \in D \cup \Gamma}} \left\{ \frac{\partial^2 a^{ij}(x)}{\partial x^k \partial x^l};\ \frac{\partial b^i(x)}{\partial x^k} \right\} < K < \infty.$$

Рассмотрим в области D задачу

$$Lu(x) = 0, \quad u(x)|_\Gamma = \varphi(x). \tag{1}$$

Функцию $\varphi(x)$ мы считаем непрерывной. В [4] показано, что если начало координат является асимптотически устойчивым по вероятности, то при некоторых предположениях на скорость вырождения оператора L, для выделения единственного решения задачи (1) нужно задать предел $\lim\limits_{x \to 0} u(x)$. Настоящая работа посвящена изучению некоторых регуляризаций задачи (1). Мы приведем условия, при которых решение задачи (1) является решением задачи Дирихле для возмущенных уравнений $(L + \varepsilon \tilde{L}) u^\varepsilon(x) = 0$, где $\tilde{L}$ — эллиптический, быть может, вырождающийся оператор второго порядка с гладкими коэффициентами. При небольших предположениях о $\tilde{L}$, например, если хотя бы один из его коэффициентов отличен от нуля в начале координат, эта задача уже имеет единственное решение $u^\varepsilon(x)$. Естественно ожидать, что при $\varepsilon \to 0$, $u^\varepsilon(x)$ стремится к некоторому решению задачи (1). Здесь возникают следующие вопросы: 1) К какому решению задачи (1) сходится $u^\varepsilon(x)$? 2) Зависит ли этот предел от возмущающего оператора $\tilde{L}$.

Если L—оператор первого порядка, характеристики которого входят в начало координат, то предел зависит от $\tilde{L}$ (см. [3]). В этом случае $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(x) = \text{const}$.

Одна из целей этой работы—показать, что если L вырождается только в начале координат, то при небольших предположениях о виде вырождения, этот предел не зависит от $\tilde{L}$ и вычислить предельную функцию. Отметим, что не любое решение вырожденной задачи можно построить как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon}(x)$, так как этот предел должен удовлетворять принципу максимума для эллиптических уравнений. Чтобы построить любое решение, можно использовать параболическую регуляризацию. Вместе с задачей (1) рассмотрим в цилиндре $\Pi=[0, \infty)\times D$ первую смешанную задачу для параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu,\ u(0, x)=f(x),\ u(t, x)=\psi(x),$$

где $\psi(x)$—функция, совпадающая с $\varphi(x)$ там, где обе определены. Единственное решение задачи (1) можно выделить как функцию, к которой решение параболической задачи с заданной начальной функцией $f(x)$ сходится при $t\to\infty$.

В заметке рассматривается также регуляризация с помощью малого коэффициента $c(x)<-c_0<0$. А именно, рассматривается следующая задача:

$$(L+\varepsilon c(x))\,u^{\varepsilon}(x)=0,\ u^{\varepsilon}(x)|_{\Gamma}=\varphi(x)$$

и находится предел $u^{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon\to 0$.

В § 2 будет изучено поведение решения задачи (1) вблизи начала координат. В § 3 эти результаты будут перенесены на случай, когда вместо оператора L рассматривается оператор условного процесса. §§ 4, 5 посвящены различным регуляризациям задачи (1).

Автор выражает искреннюю благодарность М. И. Фрейдлину за постановку задачи и помощь при ее решении.

§ 2. Теорема об устранимой особенности

В этом параграфе мы покажем, что при определенных условиях на вид вырождения оператора L ограниченное решение задачи (1) непрерывно в начале координат—точке O. Известно, [1], что с каждым дифференциальным оператором второго порядка связан диффузионный процесс; в частности, оператору L соответствует процесс $X=\{x_t;\ P_x\}$, который можно построить с помощью стохастического уравнения

$$x_t-x=\int\limits_0^t \sigma(x_s)\,d\xi_s+\int\limits_0^t b(x_s)\,ds, \tag{2}$$

где $\xi_t=\{\xi_t^1, \xi_t^2, \cdots, \xi_t^n\}$ — n-мерный винеровский процесс, $\sigma(x)$—матрица, такая, что $\sigma(x)\,\sigma^*(x)=\{a^{ij}(x)\}$.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие факты.

Решение $x_t\equiv 0$ уравнения (2) называется асимптотически устойчивым по вероятности, если

1) для любого $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{x\to 0} P_x\{\sup\limits_{t>0}|x_t|>\varepsilon\}=0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} P_x\{\lim\limits_{t\to\infty} x_t=0\}=1$.

Для того чтобы решение уравнения (2) было асимптотически устойчивым по вероятности необходимо и достаточно (см. [2]), чтобы в некоторой окрестности G точки O существовала функция $v(x)$ такая, что: а) $v(O)=0$; б) $v(x)>0$ при $x\neq O$ и $x\in G$; в) $Lv\leqslant 0$ при $x\neq O$ и $x\in G$.

Поведение решения задачи (1) в окрестности точки O в случае, когда решение $x_t\equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности, описывается следующей теоремой [4].

Теорема 1. Пусть решение $x_t\equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности. Предположим, что в некоторой окрестности точки O выполнено условие

$$m_1|x|^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\geqslant\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j\geqslant m_2|x|^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2, \tag{3}$$

где $m_1>m_2>0$. Тогда 1) любое ограниченное решение задачи (1) имеет предел $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$; 2) для выделения единственного решения задачи (1) достаточно задать предел $\lim\limits_{x\to 0} u(x)=\text{const}$.

Основной целью этого параграфа является исследование поведения решения в точке O, когда эта точка недостижима для траекторий процесса X. Для того чтобы точка O была бы недостижима для траекторий процесса X достаточно (см. [2]), чтобы в некоторой окрестности G точки O существовала функция, удовлетворяющая следующим условиям: а) $Lv\leqslant 0$ при $x\in G$ и $x\neq O$; б) $\lim\limits_{x\to 0} v(x)=+\infty$.

Теорема 2. *Если точка O недостижима для траекторий процесса X и выполнено* (3), *то любое ограниченное решение задачи* (1) *непрерывно в точке O.*

Доказательство. Так как точка O недостижима для траекторий процесса X, то с вероятностью 1 процесс X выходит на границу Γ. Поэтому существует единственное решение задачи (1).

Возьмем такую последовательность точек $\{x_k\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$ и пусть $\lim\limits_{k\to\infty} u(x_k)=\bar{u}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое k_0, что при $k\geqslant k_0$

$$|u(x_k)-\bar{u}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Введем следующие обозначения:

$$V_k=\left\{x:\ |u(x)-u(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2}\right\},\ k=k_0,\ k_0+1,\cdots$$

$$F_k=\{x:\ |x|=|x_k|\},\ k=k_0,\ k_0+1,\cdots.$$

Таким образом, при $x\in V_k$, $k=k_0$, $k_0+1,\cdots$,

$$|u(x) - \overline{u}| < \varepsilon. \tag{4}$$

Используя оценку градиента функции $u(x)$, полученную при доказательстве теоремы 1 (см. [4]), имеем, что $V_k = \left\{ x: |x - x_k| < \right.$ $\left. < \frac{\varepsilon}{2} \frac{|x_k|}{R} \right\}$, где R — положительная постоянная.

Процесс X с вероятностью 1 выходит на Γ и поэтому при $|x| \leqslant |x_k|$

$$P_x \{\text{существует такое } \tau_k(\omega), \text{ что } x_{\tau_k} \in F_k\} = 1. \tag{5}$$

Проведем через точки x_k, x_{τ_k} большую окружность G_k сферы F_k и рассмотрим тело E_k, полученное прямым произведением V_k на окружность G_k. Введем в E_k новые координаты

$$z_i = \frac{x_i}{r_k},\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

где $r_k = \frac{\varepsilon}{2} \frac{|x_k|}{R}$. В новых координатах диаметр V_k равен единице. Поэтому на основании леммы 1 из [4] при $x \in G_k$

$$P_x \{\text{процесс } X \text{ достигнет } V_k \text{ до выхода из } E_k\} \geqslant \delta_1 > 0. \tag{6}$$

Из того, что диффузия и перенос процесса X обращаются в нуль в точке O, следует, что если процесс X выпущен из точки, достаточно близкой к точке O, то он будет сколь угодно долго выходить из любой окрестности точки O. Поэтому из (5) и (6) следует, что с вероятностью как угодно близкой к 1 траектория процесса X, выпущенная из точки достаточно близкой к точке O, побывает в $\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k$.

Рассмотрим теперь в $D \setminus \bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k$ следующую задачу:

$$Lw(x) = 0,\ w(x)|_{\Gamma} = \varphi(x),\ w(x)|_{\Gamma_1} = u(x),$$

где $u(x)$ — решение задачи (1), Γ_1 — граница $\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k$. Пусть $\tau = \inf\left\{ t: x_t \in \bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k \right\}$. Легко проверить, что функция $w(x) = M_x w(x_\tau)$ удовлетворяет уравнению $Aw(x) = 0$, где A инфинитезимальный оператор процесса X, совпадающий с L на дважды непрерывно дифференцируемых функциях из D_A. Так как на Γ_1 $w(x) = u(x)$, то $w(x) = M_x u(x_\tau)$. Отсюда, принимая во внимание (4), заключаем, что при $|x| < |x_k|$

$$|w(x) - \overline{u}| < \varepsilon.$$

Из единственности решения задачи (1) следует, что $u(x)$ совпадает на $D \setminus \bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k$ с $w(x)$ и поэтому для $|x| < |x_k|$

$$|u(x)-\bar{u}|<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 3. Условный процесс, связанный с оператором L

Пусть X—марковский процесс с переходной функцией $\bar{P}(t, x, A)$, $u(x)$—ограниченная, положительная, измеримая, инвариантная функция, т. е. $\int\limits_{R^n} \bar{P}(t, x, dy)\, u(y) = u(x)$ для всех $t \geqslant 0$, $x \in R^n$. Формулой

$$P^u(t, x, A) = \frac{1}{u(x)} \int\limits_A \bar{P}(t, x, dy)\, u(y), \ t>0, \ x \in R^n$$

определяется переходная функция, которой соответствует марковский процесс X^u. В работе [5] показано, что инфинитезимальным оператором процесса X^u будет оператор A^u, который для всякого $g \in D_A$ имеет представление $A^u g = \frac{1}{u} Aug$, где A— инфинитезимальный оператор процесса X.

Пусть решение $x_t \equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности. Функция $V(x) = P_x\{x_\tau \in \Gamma\}$ (τ — момент первого попадания процесса X в O или на Γ) является единственным решением задачи

$$Lv(x) = 0, \ v(x)|_\Gamma = 1, \ v(O) = 0. \tag{7}$$

Так как $P_x\{x_\tau \in \Gamma\}$—инвариантная функция, то можно говорить о процессе X^v. Можно показать (см. [5]), что X^v является диффузионным процессом, для которого точка O является недостижимой, а инфинитезимальный оператор X^v совпадает с оператором L^v на гладких функциях из D_A, где L^v для всякой гладкой функции из D_A имеет представление $L^v g = \frac{1}{v} Lvg$.

Лемма 1. *Пусть решение $x_t \equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности. Предположим, что выполнено условие* (3), *и $u^0(x)$ — решение следующей задачи в D:*

$$Lu^0(x) = 0, \ u^0(x)|_\Gamma = \varphi(x), \ u^0(O) = 0. \tag{7'}$$

Тогда функция $\frac{u^0(x)}{v(x)}$ непрерывна в точке O.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу в D:

$$\frac{1}{v(x)} Lv(x)\, w(x) = Lw(x) + \frac{1}{v(x)} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x^i} \frac{\partial w}{\partial x^j} = 0, \ w(x)|_\Gamma = \varphi(x).$$

Ясно, что $\frac{u^0(x)}{v(x)}$ будет решением этой задачи. Поэтому, чтобы доказать непрерывность $\frac{u^0(x)}{v(x)}$ в точке O достаточно показать, что выполняются условия теоремы 2. Так как точка O является недостижимой для процесса X^v, управляемого оператором L^v, то достаточно доказать, что при $x \to 0$

$$\left|\frac{1}{v(x)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right| < K|x| \tag{8}$$

и что $\frac{1}{v(x)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}$ имеет ограниченные частные производные в окрестности точки O. Докажем сначала (8). Так как первые частные производные $a^{ij}(x)$ и $b^i(x)$ ограничены, а сами коэффициенты обращаются в нуль в точке O, то справедливы оценки

$$|a^{ij}(x)| < K_1|x|, \ |b^i(x)| < K_1|x|. \tag{9}$$

Разложим $a^{ij}(x)$ по формуле Тейлора, получим

$$a^{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^k}x^k + \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 a^{ij}(y)}{\partial x^k \partial x^l}x^k x^l,$$

где $0 \leqslant |y| \leqslant |x|$. Но из (3) следует, что в некоторой окрестности точки 0 $|a^{ij}(x)| < K_2|x|^2$, поэтому $\left.\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^l}\right|_{x=0} = 0$. Отсюда и из того, что $a^{ij}(x)$ имеет ограниченные частные производные второго порядка следует, что в некоторой окрестности точки O справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^l}\right| < K_3|x|. \tag{10}$$

Используя теперь эти оценки, докажем (8).

Так как $Lv(x) = 0$ в D, то

$$\frac{1}{v(x)}Lv(x) = \frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right) = 0.$$

Пусть G—та окрестность точки O, содержащаяся в D, в которой справедливы оценки (3), (9) и (10). Пусть $y \in G$. Выберем $\delta > 0$ таким, чтобы $\{x: |y-x| \leqslant \delta\} \in G$. Имеем

$$\int_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx = 0.$$

Интегрируя первую сумму по частям, получим

$$\int_{|y-x|=\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx + \int_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v^2(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\right)dx -$$

$$- \int_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^j}\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx + \int_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx = 0.$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v^2(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\right)dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{|y-x|=\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^j}\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx\right|+\left|\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}b^i(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx\right|.$$

Используя теперь оценки (9) и (10), получим

$$\left|\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v^2(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\right)dx\right|\leqslant K_4\int\limits_{|y-x|=\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx+$$

$$+K_4\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx\leqslant K_5\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx.$$

Применяя (3), имеем

$$\int\limits_{|x-y|<\delta}\frac{|x|^2}{v^2(x)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)^2\right]dx\leqslant K_5\int\limits_{|x-y|<\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx.$$

Пользуясь теперь неравенством $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leqslant n\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)$, получим

$$\int\limits_{|x-y|<\delta}\frac{|x|^2}{v^2(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)^2dx\leqslant K_6\int\limits_{|x-y|<\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_{|x-y|<\delta}\left[\frac{|x|^2}{v^2(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)^2-K_6\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)\right]dx\leqslant 0.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна в точке $y\neq 0$, а последнее неравенство верно для всех достаточно малых δ, то

$$\frac{|y|^2}{v^2(y)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)^2-K_6\frac{|y|}{v(y)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)\leqslant 0$$

или

$$\frac{|y|}{v(y)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)\leqslant K_6.$$

Таким образом, в некоторой окрестности точки O выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)\leqslant\frac{K_6}{|y|}v(y). \tag{11}$$

Из (11) и (3) следует (8). Докажем теперь, что $\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{v(x)}\sum\limits_{i=1}^{n}\times\right.$

$\times a^{ij}(x)\dfrac{\partial v}{\partial x^i}\Big)$ ограничена в окрестности точки O. Для этого разложим функцию $\dfrac{1}{v(x)}\sum\limits_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\dfrac{\partial v}{\partial x^i}$ по формуле Тейлора

$$\frac{1}{v(x)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{v(y)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(y)\frac{\partial v(y)}{\partial x^i}\right)x^k,$$

где $0<|y|<|x|$. Используя (8), получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{v(y)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(y)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)x^k\right|<K_1|x|.$$

Отсюда и следует ограниченность $\dfrac{\partial}{\partial x^s}\left(\dfrac{1}{v(x)}\sum\limits_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\dfrac{\partial v}{\partial x^i}\right)$ в окрестности точки O. Лемма доказана.

§ 4. Регуляризация с помощью возмущенных уравнений

В этом параграфе мы приведем условия, при которых решение задачи (1) является пределом решений задачи Дирихле для возмущенных уравнений $(L+\varepsilon\tilde{L})\,u^\varepsilon(x)=0$, где $\tilde{L}$ — эллиптический, быть может, вырождающийся оператор второго порядка с гладкими коэффициентами. Введем понятие устойчиво регулярной граничной точки. Это понятие необходимо, чтобы $u^\varepsilon(x)$ удовлетворяла принципу максимума для эллиптических уравнений. Пусть $\tau_D^\varepsilon=\inf\{t:\ x_t^\varepsilon\notin D\}$. Множество предельных точек траекторий x_t^ε при $t\to\tau_D^\varepsilon$ обозначим $\gamma_D^\varepsilon(\omega)$. Точка $x_0\in\Gamma$ называется устойчиво регулярной, если при любом $\delta>0$ и для любого оператора $\tilde{L}$

$$\lim_{x\to x_0,\ \varepsilon\to 0} P_x^\varepsilon\{\gamma_D^\varepsilon\subset G_\delta(x_0)\cap\Gamma\}=1, \tag{12}$$

где $G_\delta(x_0)$ — δ-окрестность точки x_0. Если (12) выполняется равномерно по $x_0\in\tilde{\Gamma}\subset\Gamma$, то множество $\tilde{\Gamma}$ называется равномерно устойчиво регулярным.

Для устойчивой регулярности точки $x_0\in\Gamma$ достаточно (см. [6]), чтобы в окрестности точки x_0 направляющие косинусы внешней нормали $n(x)=(n_i(x))$ были бы дважды непрерывно дифференцируемы и выполнялось хотя бы одно из следующих условий:

а) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)\,n_i(x_0)\,n_j(x_0)\neq 0$; б) точка x_0 содержалась в замыкании открытого множества, на котором

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\,n_i(x)\,n_j(x)=0 \quad\text{и}\quad \sum_{i=1}^{n} b^i(x_0)\,n_i(x_0)>0.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая теорема, доказательство которой близко к доказательству соответствующей теоремы в [6].

Теорема 3. *Пусть* $u^{\varepsilon}(x)$ — *решение следующей задачи в* $D \setminus G_{\delta}(O)$:

$$(L+\varepsilon \tilde{L})\, u^{\varepsilon}(x)=0, \ u^{\varepsilon}(x)/_{\Gamma \cup \Gamma_{\delta}} = \varphi(x),$$

где Γ_{δ} — *граница* $G_{\delta}(O)$. *Если* $\Gamma \cup \Gamma_{\delta}$ — *равномерно устойчивое регулярное множество, то* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(x) = u(x)$, *где* $u(x)$ *решение следующей задачи в* $D \setminus G_{\delta}(O)$:

$$Lu(x) = 0, \ u(x)/_{\Gamma \cup \Gamma_{\delta}} = \varphi(x).$$

Основным результатом этого параграфа является следующая.

Теорема 4. *Пусть в некоторой окрестности* G *точки* O *существует функция* $v(x)$ *такая, что: а)* $v(O)=0$; *б)* $v(x)>0$ *при* $x \neq O$ *и* $x \in G$; *в)* $Lv(x)<0$ *при* $x \neq O$ *и* $x \in G$. *Обозначим* $u^{\varepsilon}(x)$ *решение в* D *задачи*

$$(L+\varepsilon \tilde{L})u^{\varepsilon}(x) = 0, \ u^{\varepsilon}(x)|_{\Gamma} = \varphi(x). \tag{13}$$

Предположим, что для оператора L *выполнено условие* (3) *и что хотя бы один из коэффициентов эллиптического, быть может, вырождающегося оператора* $\tilde{L}$ *не равен нулю в точке* O. *Тогда, если* Γ *равномерно устойчиво регулярное множество, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(x) = u^{\circ}(x) + [1 - v(x)]\, w(O),$$

где $w(x)$ *есть решение следующей задачи в* D:

$$\frac{1}{v(x)}\, Lv(x)\, w(x) = 0 \quad w(x)|_{\Gamma} = \varphi(x), \tag{14}$$

а $v(x)$ *и* $u^{0}(x)$ *есть решение задачи* (7) *и* (7′) *соответственно.*

Доказательство. Используя вероятностные представления соответствующих задач, получим следующие оценки. Пусть γ_{+} — граница области $G_{2\delta}(O)=\{x;\ |x|<2\delta\}$, γ_{-} — граница области $G_{\delta}(O)$. В силу леммы 1 по $\alpha>0$ можно выбрать такое $\delta_1>0$, что при $x, y \in \gamma_{+}$

$$\left|\frac{M_x \varphi(x_{\tau_D})}{P_x\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}} - \frac{M_y \varphi(x_{\tau_D})}{P_y\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}\right| < \frac{\alpha}{4}, \tag{15}$$

где τ_D — момент первого попадания на Γ или в точку O.

Так как точка недостижима для траекторий условного процесса, то решение задачи (14) можно построить как предел решений следующей задачи в $D_{\delta} = D \setminus G_{\delta}(O)$:

$$\frac{1}{v(x)}\, Lv(x)\, w^{\delta}(x) = 0, \ w^{\delta}(x)|_{\Gamma} = \varphi(x), \ w^{\delta}(x)|_{\gamma_{-}} = 0.$$

Поэтому можно выбрать такое $\delta_2>0$, что при $\delta<\delta_2$ и $x \in \gamma_{+}$

$$\left|\frac{M_x \varphi(x_{\tau_{D_\delta}})}{P_x\{x_{\tau_{D_\delta}} \in \Gamma\}} - \frac{M_x \varphi(x_{\tau_D})}{P_x\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}\right| < \frac{\alpha}{4}, \tag{16}$$

где $\tau_{D_\delta} = \inf\{t:\ x_t \overline{\in} D_\delta\}$.

Положим $\tau^\varepsilon_{D_\delta} = \inf\{t : x^\varepsilon_t \overline{\in} D_\delta\}$. Используя теорему 3, легко показать, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$, $x \in \gamma_+$

$$\left|\frac{M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}})}{P_x\{x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}} \in \Gamma\}} - \frac{M_x \varphi(x_{\tau_{D_\delta}})}{P_x\{x_{\tau_{D_\delta}} \in \Gamma\}}\right| < \frac{\alpha}{4}. \tag{17}$$

Собирая вместе (15), (16), (17) получим, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $x,\ y \in \gamma_+$

$$\left|\frac{M_y \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}})}{P_y\{x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}} \in \Gamma\}} - \frac{M_x \varphi(x_{\tau_D})}{P_x\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}\right| < \alpha. \tag{18}$$

Определим последовательность марковских моментов τ^k_+ и τ^k_- следующими равенствами: $\tau^0_+ = \inf\{t : x^\varepsilon_t \in \gamma_+\}$,

$$\tau^k_+ = \inf\{t > \tau^k_-,\ x^\varepsilon_t \in \gamma_+\},\quad \tau^k_- = \inf\{t > \tau^{k-1}_+,\ x^\varepsilon_t \in \gamma_-\}.$$

Положим $y^\varepsilon_n = x^\varepsilon_{\tau^n_+}$, $\nu = \sup\{n,\ \tau^n_+ < \tau^\varepsilon_D\}$. Так как хотя бы один из коэффициентов оператора $\bar{L}$ отличен от нуля в точке O, то решение задачи (13) существует и единственно. Используя вероятностное представление функции $u^\varepsilon(x)$, можно записать

$$u^\varepsilon(x) = M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_D}) = M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} M_x \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^0_+\}} M_{y_1} \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^1_+\}} \cdots M_{y_n} \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^n_+\}} M_{y_{n+1}} \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}),\ y_i \in \gamma_+.$$

Отсюда и из (18) при $z \in \gamma_+$ имеем

$$u^\varepsilon(x) = M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}) + \frac{M_z \varphi(x_{\tau_D})}{P_z\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}\,(1 + O_{\varepsilon,\delta}(1)) \times$$

$$\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} M_x \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^0_+\}} M_{y_1} \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^1_+\}} \cdots M_{y_n} \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^n_+\}} P_{y_{n+1}}\{x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}} \in \Gamma\}\right) =$$

$$= M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}) + \frac{M_z \varphi(x_{\tau_D})}{P_z\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}\,(1 + O_{\varepsilon,\delta}(1)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_x\{\nu = n,\ \tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^n_+\}\right) =$$

$$= M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}) + \frac{M_z \varphi(x_{\tau_D})}{P_z\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}\,(1 + O_{\varepsilon,\delta}(1))\,(1 - P_x\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} < \tau^0_+\}),$$

где $O_{\varepsilon,\delta}(1)$ — величина, стремящаяся к нулю при $\varepsilon,\ \delta \to 0$ равномерно по $x \in \gamma_+$. Так как $P_x\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} < \tau^0_+\} = P_x\{x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}} \in \Gamma\}$, то

$$u^{\varepsilon}(x) = M_x \varphi(x_{\tau_{D_\delta}^\varepsilon}) + \frac{M_x \varphi(x_{\tau_D})}{P_x\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}(1 + O_{\varepsilon,\delta}(1))(1 - P_x\{x_{\tau_{D_\delta}}^\varepsilon \in \Gamma\}).$$

Переходя теперь к пределу сначала при $\varepsilon \to 0$, а затем при $\delta \to 0$ и применяя теорему 3, получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(x) = u^0(x) + w(O)(1 - v(x)).$$

Теорема доказана.

§ 5. Параболическая регуляризация и регуляризация с малым $c(x)$

Рассмотрим сначала параболическую регуляризацию. Для этого вместе с задачей (1) рассмотрим в цилиндре $\Pi = [0, \infty) \times D$ первую смешанную задачу для параболических уравнений

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Lu(t, x); \; u(0, x) = f(x), \; u(t, x)|_{\Gamma} = \varphi(x), \tag{19}$$

где $\varphi(x)$—граничная функция, совпадающая с граничной функцией задачи (1), $f(x)$—непрерывная функция.

Теорема 5. *Пусть* $u(t, x)$ — *решение задачи* (19). *Тогда, если решение* $x_t \equiv 0$ *уравнения* (2) *асимптотически устойчиво по вероятности и выполнено условие* (3), *то* $\lim\limits_{t \to \infty} u(t, x) = u(x)$, *где* $u(x)$ *есть решение следующей задачи в* D:

$$Lu(x) = 0, \; u(x)|_{\Gamma} = \varphi(x), \; \lim_{x \to 0} u(x) = f(O). \tag{20}$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что задача (20) имеет единственное решение. Используя вероятностное представление, решение задачи (19) можно записать в виде

$$u(t, x) = M_x f(x_t) \chi_{\tau_D > t} + M_x \varphi(x_{\tau_D}) \chi_{\tau_D < t}, \tag{21}$$

где $\tau_D = \inf\{t : x_t \notin D\}$. Положим $\tilde{\varphi}(\omega)$ равным $\varphi(x_{\tau_D})$, если траектория процесса X выходит на Γ и $f(O)$—если траектория попадает в точку O. Таким образом, $\tilde{\varphi}(\omega)$ определена для всех $\omega \in \Omega$ (Ω — выборочное пространство). Очевидно, что $u(x) = M_x \tilde{\varphi}(\omega)$ есть решение задачи (20). Из того, что кроме точки O, траектория процесса X, выходящая из любой точки $x \in D$, других предельных точек не имеет, следует, что переходя к пределу при $t \to \infty$ в (21) получим $\lim\limits_{t \to \infty} u(t, x) = u(x)$. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению регуляризации с помощью малого коэффициента $c(x)$. Рассмотрим следующую задачу в D:

$$(L + \varepsilon c(x)) u^{\varepsilon}(x) = 0, \; u^{\varepsilon}(x)|_{\Gamma} = \varphi(x), \tag{22}$$

где $c(x) < -c_0 < 0$ —непрерывная функция.

Теорема 6. *Пусть решение $x_t \equiv 0$ уравнения* (2) *асимптотически устойчиво по вероятности и выполнено условие* (3). *Тогда* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x) = u^0(x)$, *где* $u^0(x)$ — *решение задачи* (7′).

Доказательство. Определим функцию $\bar\varphi(x)$ следующим образом: $\bar\varphi(O) = 0$, $\bar\varphi(x) = \varphi(x)$ при $x \in \Gamma$. Тогда, используя вероятностное представление, решения задач (22) и (7′) можно записать в виде

$$u^0(x) = M_x \bar\varphi(x_\tau), \quad u^\varepsilon(x) = M_x e^{\varepsilon \int\limits_0^\tau c(x_s)\,ds} \bar\varphi(x_\tau),$$

где $\tau = \inf\{t: x_t \in D \setminus O\}$. Единственной предельной точкой для траекторий процесса X, выходящих из $x \in D$, при $t \to \infty$ может быть точка O. Поэтому, если процесс X выходит на Γ, то τ конечно и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} M_x e^{\varepsilon \int\limits_0^\tau c(x_s)\,ds} \varphi(x_\tau) =$$

$$= M_x \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon \int\limits_0^\tau c(x_s)\,ds} \varphi(x_\tau) = M_x \varphi(x_\tau).$$

Предположим теперь, что X попадает в точку O. Так как решение $x_t \equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности, то существует такое $\delta_1 > 0$, что при $|x| < \delta_1$ $P_x\left\{\tau > \frac{1}{\varepsilon^2}\right\} > 1 - \varepsilon$. Поэтому при $|x| < \delta_1$

$$|u^\varepsilon(x)| < \max_\Gamma |\varphi(x)|\, e^{-\frac{1}{\varepsilon} c(\theta)},$$

где $|\theta| < \delta_1$. Таким образом, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x\to 0}} u^\varepsilon(x) = 0$. Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 12.X.1972

Վ. Վ. ՍԱՐԱՖՅԱՆ. Առանձին կետերում վերասերված հավասարումների եզրային խնդիրների կանոնավորման մասին (*ամփոփում*)

Դիցուք $D \in R^n$ *տիրույթում տրված է*

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Լիպտիկ օպերատորը, որի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի $O \in D$ *կետում։ Հոդվածում ուսումնասիրվում են առաջին եզրային խնդրի տարբեր կանոնավորումները։*

V. V. SARAFIAN. *On regularization boundarg-value problems for equations degenarating in some points* (summary)

This paper studies some regularizations of the boundary-value problem for the equation

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \, \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0,$$

when all the coefficients of the operator L vanish at O.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Б. Дынкин.* Марковские процессы, Физматгиз, 1963.
2. *Р. З. Хасьминский.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, изд. „Наука", 1969.
3. *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин.* О малых случайных возмущениях динамических систем, УМН, 25, № 1 (151), 1970, 3—55.
4. *В. В. Сарафян.* Диффузионные процессы и дифференциальные уравнения, вырождающиеся в отдельных точках, Теория вероятн. и ее примен., 17, № 4, 1972.
5. *J. Doob.* Conditional Brownian motion and boundary limits of harmonic functions, Bull. Soc. Math. France, 85, 1957, 431—458.
6. *М. И. Фрейдлин.* Диссертация, МГУ, 1971.