

Ф. А. ШАМОЯН

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, И СТРУКТУРА ЗАМКНУТЫХ ИДЕАЛОВ В НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть U —открытый единичный круг, Γ —его граница, A —множество функций, аналитических в U и непрерывных в $U \cup \Gamma$. Предположим, что E —замкнутое множество на Γ , n —натуральное число.

Работа посвящена построению последовательности $\{\varphi_s\}$ со следующими свойствами:

$$1^\circ. \varphi_s^{(n)} \in A, s = 1, 2, 3, \dots$$

$$2^\circ. \varphi_s^{(k)}(\zeta) = 0 \text{ при } \zeta \in E, k = 0, 1, \dots, n, s = 1, 2, \dots,$$

$$3^\circ. |\varphi_s^{(k)}(\zeta)| \leq \frac{C^*}{[\rho(\zeta, E)]^k}, k = 0, 1, \dots, n, s = 1, 2, \dots, \zeta \in U \cup \Gamma.$$

$$4^\circ. \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s(\zeta) = 1, \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s^{(j)}(\zeta) = 0, j = 1, 2, \dots, n$$

равномерно относительно ζ из любого компактного множества

$$K \subset U \cup \Gamma, K \cap E = \emptyset.$$

Последовательность $\{\varphi_s\}$ строится при некотором ограничении на скорости убывания дополнительных интервалов множества E (см. теорему 1). Потребность в построении последовательности $\{\varphi_s\}$ со свойствами (1)—(4) возникает при изучении мультипликативных свойств некоторых классов аналитических функций (см. [6], [9]) и при описании замкнутых идеалов в алгебрах функций, аналитических в круге и гладких вплоть до единичной окружности. Так в работах [5], [7], [8] существенную роль играют свойства (1)—(4) последовательности

$$\varphi_s(z) = \left(\frac{z-1}{z-1-\frac{1}{s}} \right)^{2n}, s = 1, 2, \dots$$

В этом случае множество E состоит из единственной точки 1.

Отметим также работу [18], где поставлен вопрос о существовании последовательности $\{\varphi_s\}_{s=1}^\infty$ со свойствами (1)—(4) при условии, что множество E удовлетворяет условию Бёрлинга-Карлесона (см. формулу (1)).

* C —положительное число, не зависящее от ζ , s , $\rho(\zeta, E)$ —расстояние от ζ до множества E .

В § 2 последовательность $|\varphi_s|_{s-1}^{\infty}$ применяется к описанию замкнутых идеалов в следующих алгебрах аналитических функций:

$$а) \quad A^{(n)} = \left\{ f^{(n)} \in A, \|f\|_{A^{(n)}} = \sum_{k=0}^n \max_{\zeta \in \Gamma} \frac{|f^{(k)}(\zeta)|}{k!} \right\},$$

$$б) \quad H_{n+1}^p = \left\{ f \in A : f^{(n+1)} \in H^p, \|f\|_{H_{n+1}^p} = \max_{0 \leq k \leq n+1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(e^{i\theta})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\},$$

$$1 \leq p < +\infty,$$

$$в) \quad \lambda_{\alpha}^{(n)} = \left\{ f^{(n)} \in A : f^{(n)} \in \text{lip}(\alpha, \Gamma), \|f\|_{\lambda_{\alpha}^{(n)}} = \|f\|_{\infty} + \sup_{\theta, t} \frac{|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - f^{(n)}(e^{i\theta})|}{t^{\alpha}} \right\}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$г) \quad \lambda_{\alpha}^{(n)} = \{ f^{(n)} \in A : |f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})| = o(|t|) \}$$

равномерно по $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\|f\|_{\lambda_{\alpha}^{(n)}} = \|f\|_{\infty} + \sup_{\theta, t} \frac{|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})|}{t^{\alpha}}.$$

В дальнейшем через X будем обозначать одну из вышеуказанных алгебр. Для $f \in X$ обозначим $E_m(f)$ ($m=0, 1, \dots, n$) множество нулей f на Γ кратности выше m :

$$E_m(f) = \{ \zeta \in \Gamma : f^{(k)}(\zeta) = 0, k=0, 1, \dots, m \}.$$

Предположим, что I — замкнутый идеал в X , обозначим $E_m(I)$:

$$E_m(I) = \bigcap_{f \in I} E_m(f) \quad (m=0, 1, \dots, n).$$

В теореме 2 описываются замкнутые идеалы, для которых дополнительные интервалы множества $E_n(I)$ удовлетворяют некоторым ограничениям (см. формулы (16), (17)).

В последнее время появился ряд работ, посвященных описанию замкнутых идеалов в алгебрах функций, аналитических в круге и гладких вплоть до его границы.

Так в [5] Б. И. Коренблумом получено полное описание замкнутых идеалов в алгебре функций $f: f^{(1)} \in H^2$, где H^2 — известное пространство Харди. Б. А. Тейлор и Д. Л. Вильямс получили полное описание замкнутых идеалов в алгебре функций, аналитических в единичном круге и бесконечно дифференцируемых вплоть до единичной окружности. В этих работах существенную роль играют теоремы деления о том, что если $f^{(1)} \in H^2$ или же $f \in A^{\infty}$ (A^{∞} — алгебра функций, аналитических в круге и бесконечно дифференцируемых вплоть до окружности) и если J — внутренняя функция (см. [1]), которая делит внутреннюю часть функций f , то $\left(\frac{f}{J}\right)' \in H^2$ соответственно $\frac{f}{J} \in A^{\infty}$.

В § 2 при описании замкнутых идеалов алгебры X не используется теорема деления в X^* (так для двух из рассматриваемых алгебр, как нам известно, теоремы такого типа до сих пор не доказаны).

Основные результаты данной статьи, в несколько менее общем виде, были анонсированы в заметке [10].

§ 1. Построение последовательности $\{\varphi_s\}$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1. Пусть E — замкнутое множество на Γ , и пусть $\{l_k\}$ — последовательность длин дополнительных интервалов множества E . Предположим, что

$$\sigma(E) = 0,$$

$$mq^k \leq l_k \leq Mq^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где E — линейная мера Лебега на Γ , m, M, q — положительные числа, причем $0 < q < 1$, тогда существует последовательность $\{\varphi_s\}$ со свойствами (1)–(4).

Замечание. Отметим, что из теоремы Бёрлингга-Карлесона (см. [16]) следует, что для существования нетривиальной функции, нули которой содержат множества E и которая удовлетворяет условию Липшица порядка α в $U \cup \Gamma$ при некотором $\alpha > 0$, необходимы следующие условия:

$$\sigma(E) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} l_k |\log l_k| < +\infty. \quad (1)$$

Нам не известно, являются ли эти условия достаточными для существования последовательности $\{\varphi_s\}$ со свойствами (1°)–(4°)?

Лемма 1. Пусть E — замкнутое множество на Γ , удовлетворяющее условию (1). Пусть $\{(e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k})\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность дуг окружности Γ , дополнительных к E ($-\pi \leq \alpha_k < \beta_k \leq \pi$). Предположим

$$h_k(t) = \begin{cases} \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k}\right) + \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - t}\right) & \text{при } \alpha_k < t < \beta_k \\ +\infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Пусть n — натуральное число, тогда

1°. $h_k \in L^1(-\pi, \pi)$ при любом $\delta > 0$.

2°. Пусть $f_n(z) = \exp \left[-\frac{n+1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_k(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right]$,

* После того как работа была сдана в печать, как сообщил автору рецензент, вышла из печати работа Б. И. Коренблюма (журн. „Функциональный анализ и его приложения“, 6: 3, 1972), где другим методом описаны замкнутые идеалы алгебры $A^{(n)}$.

тогда

$$f_i^{(n)} \in A, f_i^{(k)}(z) = 0, z \in E \text{ и, кроме того}$$

$$3^\circ. |f_i^{(k)}(z)| \leq C_i [\rho(z, E)]^{2(n+1-k)}, z \in U \cup \Gamma,$$

$k=0, 1, 2, \dots, n$, где C_i — положительное число, зависящее только от δ .

$$4^\circ. |f_i(z)| \leq 1 \text{ при всех } \delta > 0 \text{ и } z \in U \cup \Gamma,$$

$$f_i(z) \rightarrow 1 \text{ при } \delta \rightarrow 0$$

равномерно относительно z из любого компактного множества

$$K \subset U \cup \Gamma, K \cap E = \emptyset.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |h_i(t)| dt &= \int_{-\pi}^{\pi} h_i(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left[\log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) + \right. \\ &+ \left. \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - t} \right) \right] dt = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta \log \left(1 + \frac{\beta_k - \alpha_k}{\delta} \right) < +\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Итак, утверждение 1° доказано.

Обозначим через $m_k(z)$ следующую функцию:

$$m_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} h_i \left(\frac{\log \zeta}{i} \right) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3)$$

Здесь L_k — дуга единичной окружности $(e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k})$. Ветвь функций $\log \zeta$ следует выбирать из условия $\log e^{i\alpha} = i\alpha$. Пусть

$$\tilde{h}_i(\zeta) = \frac{1}{\zeta} h_i \left(\frac{\log \zeta}{i} \right) (\zeta \in L_k).$$

Заметим, что после проведения разрезов $\arg \zeta = \alpha_k, \arg \zeta = \beta_k$ функция $\tilde{h}(\zeta)$ может быть продолжена с дуги L_k как однозначная аналитическая функция на множестве, определяемом неравенствами

$$|\zeta| \geq 1, \alpha_k \leq \arg \zeta \leq \beta_k, \zeta \neq e^{i\alpha_k}, \zeta \neq e^{i\beta_k}.$$

Мы покажем, что $\tilde{h}_i(\zeta)$ суммируема на отрезках L_k^1, L_k^3 лучей $\arg \zeta = \alpha_k, \arg \zeta = \beta_k$, определяемых неравенством

$$1 \leq |\zeta| \leq e^{\beta_k - \alpha_k},$$

и по дуге окружности

$$|\zeta| = e^{\beta_k - \alpha_k}, \alpha_k < \arg \zeta < \beta_k.$$

(Идея деформации дуг L_k^1 была предложена Б. С. Павловым, см. [12]).

Оценим интеграл по L_k^1

$$\begin{aligned}
\int_{L_k^1} |\tilde{h}_0(z)| |dz| &= \int_1^{e^{\beta_k - \alpha_k}} \frac{1}{x} \left| \log \left(1 + \frac{i\delta}{\log x} \right) + \right. \\
&+ \left. \log \left(1 + \frac{\delta}{\frac{\log x}{i} + \beta_k - \alpha_k} \right) \right| dx \leq 2 \int_1^{e^{\beta_k - \alpha_k}} \log \left(1 + \frac{\delta}{\log t} \right) dt + \\
&+ \int_1^{e^{\beta_k - \alpha_k}} \left| \arg \left(1 + \frac{i\delta}{\log t} \right) \right| dt + \int_1^{e^{\beta_k - \alpha_k}} \left| \arg \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k + \frac{\log t}{i}} \right) \right| dt \leq \\
&\leq 2(\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) + 2\delta \log \left(1 + \frac{\beta_k - \alpha_k}{\delta} \right) + \\
&+ 4\pi (e^{\beta_k - \alpha_k} - 1). \tag{4}
\end{aligned}$$

Оценка для $\int_{L_k^3} |\tilde{h}_0(z)| |dz|$ получается аналогичным образом. Оценим интеграл по L_k^2 :

$$\begin{aligned}
\int_{L_k^2} |\tilde{h}_0(z)| |dz| &= \int_{L_k^2} \frac{1}{|z|} \left| \log \left(1 + \frac{i\delta}{\log z - i\alpha_k} \right) + \right. \\
&+ \left. \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \frac{\log z}{i}} \right) \right| |dz| = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left| \log \left(1 + \frac{\delta i}{\beta_k - \alpha_k + (t - \alpha_k) i} \right) \right| dt + \\
&+ \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left| \log \left(1 + \frac{\delta i}{(\beta_k - t) i + \log e^{\beta_k - \alpha_k}} \right) \right| dt \leq \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) dt + \\
&+ \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - t} \right) dt + 4\pi (\beta_k - \alpha_k),
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
\int_{L_k^2} |\tilde{h}_0(z)| |dz| &\leq 2(\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) + \\
&+ 2\delta \log \left(1 + \frac{\beta_k - \alpha_k}{\delta} \right) + 4\pi (\beta_k - \alpha_k). \tag{5}
\end{aligned}$$

Интеграл (3) можно заменить интегралом по контуру

$$l_k = L_k^1 + L_k^2 + L_k^3.$$

Дифференцируя соответствующий интеграл, взятый по l_k , и учитывая оценки (4), (5), получим

$$|m_k^{(r)}(z)| \leq \frac{C_0}{[\rho(z, l_k)]^{r+1}} \{(\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k}\right) + \beta_k - \alpha_k\}, z \in U \cup \Gamma, z \neq e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k}. \quad (6)$$

Чтобы убедиться в 4°, заметим, что если $x \in (\alpha_j, \beta_j)$ при некотором j , то

$$\lim_{z \rightarrow e^{ix}} |f_\delta(z)| = \left| \frac{(x - \alpha_j)(\beta_j - x)}{(x - \alpha_j + \delta)(\beta_j - x + \delta)} \right|^{2(n+1)} < 1,$$

и потому $|f_\delta(z)| \leq 1$ при любом $z \in U \cup \Gamma$, $\delta > 0$.

Рассмотрим область O_k , ограниченную контуром, составленным из дуги l_k и $\Gamma \setminus L_k$ ($0 \in O_k$). В выражении для функции f_δ заменим интеграл по Γ интегралом по ∂O_k . Из оценок (2) следует, что $|f_\delta(z)| \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$ для любого $z \in U$, но так как $f_\delta(0) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$, то получаем, что $f_\delta(z) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$, $z \in U$. Из оценок для m_j , $j=1, 2, \dots$ следует, что семейство функций f_δ нормально в O_k . А так как $f_\delta \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$ в U , то $f_\delta(z) \rightarrow 1$ равномерно внутри O_k ($k=1, 2, \dots$). Отсюда следует утверждение 4°.

Легко заметить, что из 3° следует 2°. Действительно, предыдущие утверждения с деформацией окружности Γ показывают, что функция f_δ аналитична на дугах L_k , а из оценок 3° будет следовать, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in U}} f_\delta^{(s)}(z) = 0, t \in E, s=0, 1, \dots, n.$$

Поэтому будем доказывать 3°. Сначала докажем, что существует положительное число C_δ , зависящее только от δ такое, что если $z \in U$, то

$$|f_\delta(z)| \leq C_\delta [\rho(z, E)]^{2(n+1)}. \quad (7)$$

Пусть $z \in U$ фиксировано и пусть

$$\rho(z, E) = \rho(z, e^{i\alpha_k}). \quad (8)$$

Положим

$$\Psi_k(\zeta) = \frac{f_\delta(\zeta)}{(\zeta - e^{i\alpha_k})^{2(n+1)}}.$$

Очевидно, что при любом $\zeta_0 \neq e^{i\alpha_k}$ ($\zeta_0 = e^{i\theta_0}$)

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow e^{i\theta_0}} |\Psi_k(\zeta)| &= \lim_{\zeta \rightarrow e^{i\theta_0}} \frac{|f_\delta(\zeta)|}{|\zeta - e^{i\alpha_k}|^{2(n+1)}} = \\ &= \left| \frac{(\theta_0 - \alpha_j)(\beta_j - \theta_0)}{(\theta_0 - \alpha_j + \delta)(\beta_j - \theta_0 + \delta)} \right|^{2(n+1)} \frac{1}{|e^{i\theta_0} - e^{i\alpha_k}|^{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

При условии $\theta_0 \in (\alpha_j, \beta_j)$, если $j = k$, получаем

$$|\Psi_k(e^{i\theta_0})| \leq \frac{1}{\delta^{2(n+1)}} \left| \frac{\theta_0 - z_k}{e^{i\theta_0} e^{i z_k}} \right|^{2(n+1)} \leq \frac{C}{\delta^{2(n+1)}}.$$

Если же $j \neq k$, очевидно имеет место одно из неравенств

$$|e^{i\theta_0} - e^{i\beta_j}| \leq |e^{i\theta_0} - e^{i z_k}|$$

или же

$$|e^{i\theta_0} - e^{i z_j}| \leq |e^{i\theta_0} - e^{i z_k}|.$$

Поэтому получаем снова

$$|\Psi_k(e^{i\theta_0})| \leq C_\delta,$$

C_δ не зависит от k и θ . Функции f_δ и $\frac{1}{(\zeta - e^{i z_k})^{2(n+1)}}$ принадлежат классу D В. И. Смирнова (см. [13], стр. 116). Поэтому $\Psi_k \in D$ по теореме В. И. Смирнова

$$\sup_{z \in U} |\Psi_k(\zeta)| \leq \nu \operatorname{rai}_{\theta \in (-\pi, \pi)} \sup |\psi_k(e^{i\theta})|.$$

Следовательно, имеем

$$|\Psi_k(\zeta)| \leq \frac{C}{\delta^{2(n+1)}},$$

в частности, при $\zeta = z$. Точки $z \in U$, удовлетворяющие условию (8) или такие, что $[\rho(z, e^{i\beta_k}) = \rho(z, E)]$ (для них, очевидно, рассуждения сохраняются с очевидными изменениями), образуют множество, всюду плотное в $U \cup \Gamma$, и поэтому оценка (7) доказана для всех $z \in U \cup \Gamma$. Чтобы получить доказательство утверждения 3°, достаточно воспользоваться оценками (6) и (7). Действительно

$$\begin{aligned} |f_\delta^{(k)}(z)| &\leq C |f_\delta(z)| \frac{1}{\inf_j [\rho(z, l_j)]^{2k}} \sum_{k=1}^n \left((\beta_k - \alpha_k) + \right. \\ &\quad \left. + (\beta_k - z_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) \right) \leq \\ &\leq \frac{C_\delta [\rho(z, E)]^{2(n+1)}}{[\rho(z, E)]^{2k}} = C_\delta [\rho(z, E)]^{2(n+1-k)}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что

$$\rho(z, l_j) \geq \rho(z, E), \quad z \in U \cup \Gamma.$$

Лемма доказана.

* Мы пользуемся тем, что (не умаляя общности) $\sin^2 \frac{x - \alpha_k}{2} > C(x - \alpha_k)^2$ (то же для β_k), ибо интервалы (α_k, β_k) можно считать расположенными на полу-круге.

Лемма 2. *Предположим, что существуют такие положительные числа m, M, q , причем $0 < q < 1$, так что*

$$mq^k \leq \beta_k - \alpha_k \leq Mq^k, \quad (9)$$

$k=1, 2, \dots$, тогда, если f_δ — построенная в лемме 1 функция, то существует такое положительное число C_0 , что

$$|f_\delta(1-\delta)z| \geq C_0, \quad \delta > 0, \quad z \in U \cup \Gamma, \quad (10)$$

кроме того

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta((1-\delta)z) = 1$$

равномерно на каждом компакте

$$K: K \subset CU \cup \Gamma, \quad K \cap E = \emptyset.$$

Доказательство. Достаточно доказать (10) при $z \in \Gamma$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} |f_\delta(1-\delta)e^{ix}|^{-1} &= \exp \left(\frac{n+1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} h_\delta(t) \frac{1-(1-\delta)^2 dt}{\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2}} \right) = \\ &= \exp \left(\frac{n+1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} h_\delta(t) \frac{2\delta - \delta^2}{\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2}} \right) \leq \\ &\leq \exp \left(\frac{2(n+1)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left(\log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - t} \right) \right) \frac{\delta dt}{\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2}} \right). \end{aligned}$$

Докажем, что в силу условий леммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) \frac{\delta dt}{\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2}} \leq \text{const.}$$

Аналогичное неравенство доказывается для другого слагаемого

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) \frac{\delta dt}{\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x - \beta_k}{2}} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\delta^2 dt}{(\delta + t - \alpha_k) \left(\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2} \right)} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} (t - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) \frac{2\delta(1-\delta) \sin \frac{x-t}{2}}{\left[\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2} \right]^2} dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

Легко заметить, что

$$I_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\delta dt}{\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2}} < \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} P_{((1-\delta)e^{ix})}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} P_{((1-\delta)e^{ix})}(t) dt = 2\pi,$$

где $P_z(t)$ ядро Пуассона в точке ze^{-it} .

Оценим I_3 . Заметим, что

$$(t - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) \leq \delta, \quad t \in (\alpha_k, \beta_k),$$

и потому подынтегральное выражение в k -ом слагаемом суммы не больше, чем

$$\frac{\delta \sqrt{1-\delta} |\sin \frac{x-t}{2}|}{\left(\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2} \right)} \frac{\delta \sqrt{1-\delta}}{\left(\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2} \right)} \leq \\ \leq \frac{\delta \sqrt{1-\delta}}{4 \left(\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2} \right)} \leq \frac{2\delta - \delta^2}{\delta^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2}} = P_{((1-\delta)e^{ix})}(t),$$

и оценка для I_3 такая же, как для I_2 .

Следовательно, остается доказать, что в силу условий леммы, I_1 ограничена равномерно относительно δ .

Пусть n_0 такое натуральное число, что

$$mq^{n_0+1} \leq \delta < mq^{n_0}. \quad (11)$$

Тогда

$$I_1 \leq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_k)^2} = \\ = c_1 I_1^*, \quad I_1^* = \sum_{k=1}^{n_0-1} (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) \times \\ \times \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_k)^2} + (\beta_{n_0} - \alpha_{n_0}) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_{n_0} - \alpha_{n_0}} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_{n_0})^2} +$$

$$+ \sum_{k=n_0+1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_k)^2}.$$

Ясно, что

$$\frac{\beta_{n_0} - \alpha_{n_0}}{\delta} \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_{n_0} - \alpha_{n_0}} \right) \leq 1.$$

Оценим последнюю сумму

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_k)^2}.$$

По условию (9) имеем, что эта сумма не превосходит

$$M \sum_{k=n_0+1}^{\infty} q^k \log \left(1 + \frac{\delta}{mq^k} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_k)^2}.$$

Ввиду (11) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n_0+1}^{\infty} q^k \log \left(1 + \frac{\delta}{mq^k} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_k)^2} \leq \\ & \leq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \log \left(1 + \frac{1}{q^{k+1}} \right) \frac{\delta^2}{\delta^2 + (x - \beta_{n_0+1+k})^2} \leq \\ & \leq \frac{1}{m} \log \left(1 + \frac{1}{q} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) q^k. \end{aligned}$$

Остается оценить выражение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_0-1} (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_k)^2} \leq \\ & \leq M \sum_{k=1}^{n_0-1} q^k \log \left(1 + \frac{\delta}{mq^k} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_k)^2}. \end{aligned}$$

По условию (11) имеем

$$\frac{\delta}{mq^k} \leq q \quad \text{при} \quad 1 \leq k \leq n_0 - 1.$$

Поэтому

$$\log \left(1 + \frac{\delta}{mq^k} \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} \delta^l}{l (mq^k)^l}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{n_0-1} q^l \log \left(1 + \frac{\delta}{mq^l} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_l)^2} = \\ & = \sum_{l=1}^{n_0-1} q^l \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \beta_l)^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\delta^k}{(mq^l)^k} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\partial^{k-1}}{m^{k-1}} \left(\sum_{l=1}^{n_0-1} \frac{\partial^2}{\partial^2 + (x - \beta_l)^2} \frac{1}{(q')^{k-1}} \right) < \\
&< \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^{k-1}}{k m^{k-1}} \left(\sum_{l=1}^{n_0-1} \frac{\partial^2}{\partial^2 + (x - \beta_l)^2} \frac{1}{(q')^{k-1}} \right) + \\
&+ \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{n_0-1} \frac{\partial^2}{\partial^2 + (x - \beta_l)^2} = J_1 + J_2, \\
J_1 &\leq \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{m} \right)^{k-1} \sum_{l=1}^{n_0-1} \frac{1}{q^{(k-1)l}}.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{l=1}^{n_0-1} \frac{1}{(q^{k-1})^l} < \left(\frac{1}{q^{k-1}} \right)^{n_0-1} \frac{1}{1-q}, \quad k \geq 2.$$

Следовательно получаем

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \frac{1}{m(1-q)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{mq^{n_0-1}} \right)^{k-1} \leq \\
&\leq \frac{1}{m(1-q)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^{k-1}}{k} < \frac{1}{m} \frac{1}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

Остается оценить J_2 .

Пусть $\alpha_k < x < \beta_k$ и предположим, что интервалы $(\alpha_{r_l}, \beta_{r_l}), \dots, (\alpha_{r_p}, \beta_{r_p})$ находятся левее интервала (α_k, β_k) (где $1 \leq r_l \leq n_0 - 1, l = 1, 2, \dots, p$), а интервалы $(\alpha_{k_l}, \beta_{k_l}), \dots, (\alpha_{k_p}, \beta_{k_p})$ — правее интервала (α_k, β_k) . Кроме того, предположим, что интервалы пронумерованы так, что расстояние между (α_k, β_k) , $(\alpha_{k_l}, \beta_{k_l})$ (соответственно от $(\alpha_{r_l}, \beta_{r_l})$) растет с возрастанием l . Тогда имеем

$$\begin{aligned}
J_2 &= \sum_{l=2}^p \frac{\partial^2}{\partial^2 + (x - \beta_{r_l})^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 + (x - \beta_{r_1})^2} + \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial^2 + (x - \beta_{k_1})^2} + \sum_{l=2}^p \frac{\partial^2}{\partial^2 + (x - \beta_{k_l})^2} \leq \\
&\leq 2 + \sum_{l=2}^p \frac{\partial^2}{\partial^2 + (x - \beta_{r_l})^2} + \sum_{l=2}^p \frac{\partial^2}{\partial^2 + (x - \beta_{k_l})^2}.
\end{aligned}$$

Легко убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
x - \beta_{r_1} &\geq mq^{r_1}, \\
x - \beta_{r_2} &\geq mq^{r_1} + mq^{r_2}, \\
&\dots \dots \dots \\
x - \beta_{r_p} &\geq mq^{r_1} + \dots + mq^{r_{p-1}},
\end{aligned}$$

и, соответственно

$$\begin{aligned}\beta_{k_1} - x &\geq m q^{k_1} + m q^{k_1}, \\ \beta_{k_2} - x &\geq m q^{k_2} + m q^{k_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \beta_{k_p} - x &\geq m q^{k_1} + m q^{k_2} + \dots + m q^{k_p}.\end{aligned}$$

Из этих рассуждений следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{l=2}^p \frac{\delta^2}{\delta^2 + (x - \beta_{r_l})^2} &\leq \frac{\delta^2}{m^2} \sum_{l=1}^{n_0-1} \frac{1}{q^{2l}}, \\ \sum_{l=2}^p \frac{\delta^2}{\delta^2 + (x - \beta_{k_l})^2} &\leq \frac{\delta^2}{m^2} \sum_{l=1}^{n_0-1} \frac{1}{q^{2l}}.\end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$J_1 \leq 2 + \frac{2\delta^2}{m^2} \left(\frac{1 - q^{2(n_0-1)}}{1 - q^2} \right) \frac{1}{q^{2(n_0-1)}} \leq 2 + \frac{2q^2}{1 - q^2}.$$

И, тем самым, доказана первая часть леммы.

Пусть K — компакт такой, что $K \subset U \cup \Gamma$ и $K \cap E = \emptyset$, и пусть $z \in K$, $z = r e^{ix}$, $0 \leq r \leq 1$, $-\pi \leq x < \pi$. Предположим, что $\alpha_k < x < \beta_k$. Тогда

$$\rho(K, E) = \varepsilon_0 > 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}0 \leq -\log |f_\delta((1-\delta)^n e^{ix})| &= \sum_{l=1}^n \frac{n+1}{\pi} \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \left\{ \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_l} \right) + \right. \\ &\left. + \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_l - t} \right) \right\} \frac{1 - (1-\delta)r^2}{((1 - (1-\delta)r)^2 + 4(1-\delta)r \sin^2 \frac{x-t}{2})} dt.\end{aligned}$$

Ввиду (12) имеет место одно из следующих неравенств: или $1 - r \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$ или же

$$\rho(e^{ix}, E) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Если $1 - r \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$, то имеем

$$0 \leq -\log |f_\delta((1-\delta)z)| \leq \frac{2(n+1)}{\pi \varepsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} h_\delta(t) dt.$$

Если же $\rho(e^{ix}, E) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$, тогда очевидно $x - \alpha_k \geq c_0 \varepsilon_0$, $\beta_k - x \geq c_0 \varepsilon_0$ при некотором положительном c_0 ; c_0 не зависит от x и k . Имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \int_{\varepsilon_l}^{\beta_l} h_l(t) \frac{1 - (1-\delta)^2 r^2}{(1 - (1-\delta) r)^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2}} dt < \frac{\text{const}}{\varepsilon_0^2} \int_{-\pi}^{\pi} h_1(t) dt +$$

$$+ \int_{\varepsilon_k}^{\beta_k} h_k(t) \frac{1 - (1-\delta)^2 r^2}{(1 - (1-\delta) r)^2 + 4(1-\delta) \sin^2 \frac{x-t}{2}} dt.$$

Легко видеть, что последнее слагаемое не превосходит

$$\frac{\text{const}}{\varepsilon_0^2} \int_{\varepsilon_k}^{\beta_k} h_k(t) dt + 4\pi \log \left(1 + \frac{2\delta}{c_0 \varepsilon_0} \right).$$

Таким образом, для любого $z \in K$ имеем

$$0 \leq -\log |f_\delta((1-\delta)z)| \leq \frac{\text{const}}{\varepsilon_0^2} \int_{-\pi}^{\pi} h_k(t) dt + 4\pi \log \left(1 + \frac{2\delta}{c_0 \varepsilon_0} \right).$$

Но из (2) видно, что при $\delta \rightarrow 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} h_k(t) dt \rightarrow 0$. Следовательно, на K

равномерно

$$|f_\delta((1-\delta)z)| \rightarrow 1 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Теперь, чтобы получить утверждение леммы, достаточно рассмотреть последовательность аналитических функций $\log f_\delta((1-\delta)z)$.

Это семейство нормально в области $\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$ (при проверке этого факта нужно рассуждать так же, как при доказательстве леммы 1 и учесть звездность этой области относительно начала).

В единичном круге

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Re} \log f_\delta((1-\delta)z) = 0.$$

Кроме того, $f_\delta(0) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому равномерно внутри $\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta((1-\delta)z) = 1.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть f_δ — построенная выше функция, и пусть

$$G_\delta(z) = \frac{f_\delta(z)}{f_\delta((1-\delta)z)},$$

$$G_\delta(z) = \exp \left(-\frac{n+1}{\pi} W_\delta(z) \right).$$

Сначала оценим производную от $W_k(z)$. Легко видеть, что

$$W_k(z) = \int_{-\pi}^{\pi} h_k(t) \frac{2\delta z e^{it} dt}{(e^{it} - z)(e^{it} - z + \delta z)}.$$

Пусть

$$m_k(z) = \int_{L_k} h_k \left(\frac{\log \zeta}{i} \right) \frac{2\delta d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - (1 - \delta)z)}.$$

Как в лемме 1, контурный интеграл по L_k выразим через интегралы по $l_k = L_k^1 + L_k^2 + L_k^3$,

$$m_k(z) = m_{k,1}(z) + m_{k,2}(z) + m_{k,3}(z),$$

где

$$m_{k,j}(z) = \int_{L_k^j} \tilde{h}_k(\zeta) \frac{2\delta d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z + \delta z)}, \quad j=1, 2, 3.$$

Вычислим производные этих функций. Используя формулу Лейбница, получим

$$m_{k,1}^{(l)}(z) = 2\delta \sum_{j=0}^l \int_{L_k^1} \tilde{h}_k(\zeta) \frac{C_l^j \cdot j! (l-j)! (1-\delta)^{l-j}}{(\zeta - z)^{l+1} (\zeta - (1-\delta)z)^{l-j+1}} d\zeta.$$

Предположим сначала, что $|\zeta - z| \leq 2\delta$, тогда

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{j+1} |\zeta - (1-\delta)z|^{l-j+1}} \leq \frac{\text{const}}{|\zeta - z|^{l+1} |\zeta - (1-\delta)z|^2}.$$

Если $|\zeta - z| \geq 2\delta$, то

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{j+1} |\zeta - (1-\delta)z|^{l-j+1}} \leq \frac{\text{const}}{|\zeta - z|^l |\zeta - (1-\delta)z|^2}.$$

Учитывая эти неравенства, легко получить

$$|m_{k,1}^{(l)}(z)| \leq C_0 \left(\frac{\delta}{|e^{i\alpha_k} - z|^{l+1}} + \frac{1}{|e^{i\alpha_k} - z|^l} \right) \int_{L_k^1} |\tilde{h}_k(\zeta)| \frac{\delta}{|\zeta - (1-\delta)z|^2} |d\zeta|,$$

где C_0 не зависит ни от δ , ни от k . Следовательно, имеем

$$|m_{k,1}^{(l)}(z)| \leq C_0 \left(\frac{\delta}{|z - e^{i\alpha_k}|^{l+1}} + \frac{1}{|z - e^{i\alpha_k}|^l} \right) \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \left(\log \left(1 + \frac{\delta}{t} \right) + 1 \right) \frac{\delta dt}{|e^{t + i\alpha_k} - (1-\delta)z|^2}.$$

Теперь покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \left(\log \left(1 + \frac{\delta}{t} \right) + 1 \right) \frac{\delta dt}{|e^{t + i\alpha_k} - (1 - \delta)z|^2} \leq C_1,$$

где C_1 — положительное число, не зависящее от z и δ . Легко заметить, что

$$|e^{t + i\alpha_k} - (1 - \delta)z|^2 \geq C_2 ((t + \delta)^2 + \delta^2),$$

C_2 не зависит от z , t и k .

Поэтому достаточно доказать ограниченность суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \left(\log \left(1 + \frac{\delta}{t} \right) + 1 \right) \frac{\delta dt}{(t + \delta)^2 + (x - \alpha_k)^2}.$$

Сначала докажем, что существует положительное число C_1 такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \frac{\delta dt}{(t + \delta)^2 + (x - \alpha_k)^2} \leq C_1.$$

Предположим $m q^{n_0+1} \leq \delta \leq m q n_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \frac{\delta dt}{(t + \delta)^2 + (x - \alpha_k)^2} &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \leq \\ &\leq \frac{M q^{n_0+1}}{\delta (1 - q)} \leq \frac{M}{m(1 - q)}, \\ \sum_{k=1}^{n_0} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \frac{\delta dt}{(t + \delta)^2 + (x - \alpha_k)^2} &= \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\delta}{|x - \alpha_k|} \left[\operatorname{arctg} \frac{\delta + \beta_k - \alpha_k}{|x - \alpha_k|} - \right. \\ &- \left. \operatorname{arctg} \frac{\delta}{|x - \alpha_k|} \right] \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\delta}{|x - \alpha_k|} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\delta + \beta_k - \alpha_k}{|x - \alpha_k|} \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\delta}{|x - \alpha_k|} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\delta}{|x - \alpha_k|} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая элементарное неравенство

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} v < \frac{H}{1 + v} \text{ при } v \geq 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_0} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \frac{\delta dt}{(t + \delta)^2 + (x - \alpha_k)^2} &\leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\delta}{|x - \alpha_k|} \left[\frac{H}{1 + \frac{\delta + \beta_k - \alpha_k}{\delta}} + \right. \\ &+ \left. \frac{H}{1 + \frac{\delta}{|x - \alpha_k|}} \right] \leq 2H \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\delta}{|x - \alpha_k| + \delta}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично рассуждениям леммы 2 получим ограниченность последней суммы. Остается оценить сумму

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \log \left(1 + \frac{\delta}{t} \right) \frac{\delta dt}{(t+\delta)^2 + (x - \alpha_k)^2}.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) \frac{\delta}{(x - \alpha_k)^2 + (\delta + \beta_k - \alpha_k)^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \frac{\delta^2 dt}{((t+\delta)^2 + (x - \alpha_k)^2)(\delta + t)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} t \log \left(1 + \frac{\delta}{t} \right) \frac{2\delta(t+\delta) dt}{((t+\delta)^2 + (x - \alpha_k)^2)^2} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right) \frac{\delta}{\delta^2 + (x - \alpha_k)^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\beta_k - \alpha_k} \frac{\delta dt}{(t+\delta)^2 + (x - \alpha_k)^2}. \end{aligned}$$

Ограниченность последних сумм уже доказана.

В итоге получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |m_{k,1}^{(l)}(z)| &\leq C_2 \inf_l \left\{ \frac{1}{|e^{i\alpha_j} - z|^l} + \frac{\delta}{|e^{i\alpha_j} - z|^{l+1}} \right\} \leq \\ &\leq C_2 \left[\frac{1}{\rho(z, E)^l} + \frac{\delta}{\rho(z, E)^{l+1}} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично имеем такую же оценку для

$$\sum_{k=1}^{\infty} |m_{k,3}^{(l)}(z)|.$$

Как и выше, докажем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |m_{k,2}^{(l)}(z)| &\leq C_3 \left[\frac{1}{|e^{i\alpha_k} - z|^l} + \frac{1}{|e^{i\beta_k} - z|^l} + \right. \\ &+ \left. \frac{\delta}{|e^{i\alpha_k} - z|^{l+1}} + \frac{\delta}{|e^{i\beta_k} - z|^{l+1}} \right] \int_{L_k^2} \left| \log \left(1 + \frac{\delta}{\frac{\log \zeta}{i} - \alpha_k} \right) + \right. \\ &+ \left. \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \frac{\log \zeta}{i}} \right) \right| \frac{\delta |d \arg \zeta|}{|\zeta - (1 - \delta)z|^2} \leq \\ &\leq C_4 \left(\frac{1}{\rho(z, E)^l} + \frac{\delta}{\rho(z, E)^{l+1}} \right) \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left(\log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \log \left(1 + \frac{\delta}{\rho_k - t} \right) + 1 \frac{\delta dt}{\delta^2 + (x-t)^2},$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |m_{k,2}^{(l)}(z)| \leq C_4 \left(\frac{1}{\rho(z, E)^l} + \frac{\delta}{\rho(z, E)^{l+1}} \right) \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left(\log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) + \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - t} \right) \right) \frac{\delta dt}{\delta^2 + (x-t)^2}.$$

Как уже было доказано (см. лемму 2), последняя сумма равномерно ограничена. Следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} |m_{k,2}^{(l)}(z)| \leq C_5 \left(\frac{1}{\rho(z, E)^l} + \frac{\delta}{\rho(z, E)^{l+1}} \right). \quad (14)$$

Объединяя (13) и (14), получим

$$|W_\delta^{(l)}(z)| \leq \text{const} \left(\frac{1}{\rho(z, E)^l} + \frac{\delta}{\rho(z, E)^{l+1}} \right).$$

Для оценки $G_\delta^{(l)}(z)$ при $1 \leq l \leq n$ отметим сначала, что при помощи рассуждений, приведенных при доказательстве неравенства (7), легко установить справедливость неравенства

$$|G_\delta(z)| \frac{\delta^k}{\rho(z, E)^k} \leq C_0 |f_\delta(z)| \frac{\delta^k}{\rho(z, E)^k} \leq C_0, \quad 1 \leq k \leq 2n, \quad (15)$$

равномерно по δ и $z \in U \cup \Gamma$, $z \notin E$.

Сначала предположим, что $0 < \delta < \rho(z, E)$, тогда

$$|W^{(l)}(z)| \leq \frac{C}{(\rho(z, E))^l}.$$

Учитывая это, получим оценку 3° для $G_\delta^{(l)}(z)$. Если же $\rho(z, E) < \delta$, то

$$|W^{(l)}(z)| \leq \frac{C \delta}{\rho(z, E)^{l+1}};$$

отсюда и из (15) легко следует оценка 3°.

Теперь, чтобы получить доказательство теоремы, достаточно положить

$$\varphi_s(z) = G_{\frac{1}{s}}(z), \quad z \in U, \quad s = 1, 2, \dots$$

Доказательство закончено.

Следствие. Пусть E — замкнутое множество на Γ , предположим, что

$$E = \bigcup_{k=1}^{m_0} E_k, \quad (16)$$

где E_k — замкнутое множество на Γ , $k = 1, 2, \dots, m_0$, и пусть, далее, $\{I_p^{(k)}\}_{p=1}^\infty$ — последовательность для дополнительных интервалов множества E_k , $k = 1, \dots, m_0$.

Предположим, что

$$\sigma(E_k) = 0,$$

$$m_k q_k^p \leq I_p^{(k)} \leq M_k q_k^p, \quad k = 1, \dots, m_0, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где m_k, q_k, M_k — положительные числа, причем $0 < q_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, m_0$. Тогда существует последовательность $\{\varphi_s\}_{s=1}^\infty$ со свойствами (1) — (4).

§ 2. Применение результатов предыдущего параграфа

Пусть X означает одну из вышеуказанных алгебр.

Пусть, далее, $f \in X$. Обозначим через G_f внутреннюю часть функции f и

$$E_m(f) = \{\zeta \in \Gamma : f^{(k)}(\zeta) = 0, k = 0, 1, \dots, m\},$$

$0 \leq m \leq n$. Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2. Пусть I — замкнутый идеал в X , и пусть

$$E_m(I) = \bigcap_{f \in I} E_m(f),$$

G_I — наибольший общий делитель внутренних частей функций из I . Предположим, что $E_n(I)$ удовлетворяет условиям (16), (17), тогда

$$I = \{f \in X : E_m(f) \supset E_m(I),$$

$$m = 0, 1, \dots, n, G_I \text{ делит } G_f\}.$$

Предположим, что $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторая последовательность точек единичного круга, $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$, для которых

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|) < +\infty.$$

Через $B(z)$ обозначим произведение Бляшке с нулями $\{z_k\}$. Пусть, далее, S — сингулярная внутренняя функция

$$S(z) = \exp\left(-\int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)\right).$$

В работе [4] (см. также [19]) доказана следующая

Теорема 3. Пусть $G = B \cdot S$ и пусть $G_f = G$, где функция $f \in A$, $f \in \text{Lip}(\alpha, \Gamma)$ при некотором $\alpha > 0$ и $f \neq 0$, тогда

$$\int_{\Gamma} \log \rho(\zeta) |d\zeta| > -\infty, \quad (18)$$

где $\rho(\zeta) = \inf_{z \in E} |\zeta - z|$, $E = \{z_k\} \cup \sigma(\mu)$,

$\sigma(\mu)$ — носитель меры μ .

И обратно, если E — замкнутое множество $E \subset U \cup \Gamma$, удовлетворяющее условию (18), $G = B \cdot S$ — внутренняя функция, для которой

$$\{z_k\} \cup \sigma(\mu) \subset E,$$

то существует внешняя функция $\Phi \in A^\infty$ такая, что

$$E_n(\Phi) = E \cap \Gamma, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Phi \neq 0, \quad \Phi G \in A^\infty.$$

Замечание. Из построения Φ следует, что Φ^γ тоже удовлетворяет условиям теоремы при любом $\gamma > 0$ и, кроме того

$$|\Phi(\zeta)| \leq C_N \rho^N(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma$$

для любого $N > 0$.

Следующая теорема является развитием идеи Карлемана (см. [20]).

Теорема 4. Пусть функция $f = G_f Q_f \in X$ и $E = E_0(f)$, пусть, далее, Φ построенная в теореме 3 внешняя функция по множеству E и по внутренней функции G_f , тогда существует последовательность $\{\varphi_s\}$, $\varphi_s \in X$ $s = 1, 2, \dots$ такая, что

$$\|\varphi_s f - \Phi G_f\|_X \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

Положим $\Psi = \Phi^{1/\delta}$, при $\delta > 0$ обозначим

$$\Psi_1(z) = \Psi(e^{i\delta} z), \quad \Psi_2(z) = \Psi(e^{-i\delta} z),$$

$E \subset (-\pi, \pi)$ и $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^\infty$ — дополнительные интервалы множества E . Далее обозначим $l_k = \beta_k - \alpha_k \geq l_{k+1} = (\beta_{k+1} - \alpha_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$.

Предположим, что $0 < \delta < \frac{l_k}{2}$ при $k = 1, 2, \dots, N$. Обозначим

$$E_\delta = \bigcup_{k=1}^N (\alpha_k + \delta, \beta_k - \delta), \quad F_\delta = (\alpha_k + \delta, \beta_k - \delta)_{k=1}^N.$$

Пусть

$$H_\delta(z) = \exp \left(-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{\alpha_k + \delta}^{\beta_k - \delta} \log |f(e^{it})| \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right).$$

Лемма 3. Пусть $f \in X$, тогда

$$\varphi_\delta = \Psi_1 \Psi_2 H_\delta \in X$$

при любом положительном $\delta > 0$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно получить оценки производных от H_δ вблизи множества F_δ . В самом деле, $\Psi_1, \Psi_2 \in A^\infty$ и обращаются в нуль вместе со всеми своими производными на F_δ .

H_i аналитична внутри CE_i , ($CE_i = (-\pi, \pi] \setminus E_i$), а внутри E_i H_i равняется функции f^{-1} , умноженной на некоторую функцию, которая аналитична в U вплоть до множества E_i .

Пусть η — положительное число и δ фиксировано, обозначим

$$\mathcal{M}_\eta = \{z \in U \cup \Gamma: z = re^{i\varphi}, \varphi \in E_i, 1-r < \eta\},$$

η настолько мало, что в $\mathcal{M}_\eta$ нет нулей функции f .

Пусть

$$C(f, \delta, \eta) = \min_{z \in \mathcal{M}_\eta} |f(z)|.$$

Если

$$f = B_f \cdot S_f Q_f,$$

то функция $G_f = B_f S_f$ аналитична вплоть до E_i . Имеем

$$H_i(z) = \frac{G_f(z) \Phi_i(z)}{f(z)}, \quad (19)$$

где

$$\Phi_i(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{CE_i} \log |f(e^{it})| \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right).$$

Легко заметить, что если $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in E_i$, то

$$|\Phi_i^{(l)}(z)| \leq \frac{C(l)}{\rho(z, F_i)^{2l}}, \quad l=0, 1, \dots \quad (20)$$

и если

$$S(z) = \exp \left(- \int \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \right),$$

то

$$|S^{(l)}(z)| \leq \frac{C'(l)}{\rho^{2l}(z, \sigma(\mu))} \leq \frac{C'(l)}{\rho(z, F_i)^{2l}} \quad (21)$$

($\sigma(\mu)$ — носитель меры μ). Так как f обращается в нуль на $\sigma(\mu)$, то $\sigma(\mu) \subset E_0(f) = E$ и при условии $\arg z \in E_i$

$$\rho(z, \sigma(\mu)) \geq \rho(z, F_i).$$

Оценим $B_f^{(n)}(z)$ при условии, что $\arg z \in E_i$. Так как предельные точки множества $\{z_k\}$ принадлежат E , то для η и δ существует n_0 такое, что

$$\rho(z_n, E) \leq \eta_n = \min \left(\frac{\eta}{4}, \frac{\delta}{4} \right), \quad n \geq n_0.$$

Пусть $B_{n_0}(z) = \prod_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} z}$. Тогда очевидно

$$(\log B_{n_0}(z))^{(l)} = (l-1)! \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{(\bar{z}_k)^l}{(1-z_k z)^l} - \frac{1}{(z_k - z)^l} \right) \right).$$

Следовательно

$$|(\log B_{n_0}(z))^{(l)}| \leq C''(l) \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1-|z_k|}{|z-z_k|^l |1-\bar{z}_k z|^l} \leq \frac{C'''(l)}{\inf_{k > n_0+1} |z-z_k|^{2l}}.$$

Поэтому

$$|B_{n_0}^{(l)}(z)| = |(e^{\log B_{n_0}(z)})^{(l)}| \leq \frac{C_0(l)}{\inf_{k > n_0+1} |z-z_k|^{4l}}.$$

Оценим снизу $\rho(z, z_k)$, $k \geq n_0 + 1$

$$\begin{aligned} \rho(z, z_k) &\geq \rho(z, E) - \rho(z_k, E) \geq \\ &\geq \rho(z, E) - \frac{\delta}{4} > \rho(F_i, E) - \frac{\delta}{4} > \frac{3}{4} \delta, \end{aligned}$$

т. е.

$$|B_{n_0}^{(l)}(z)| \leq C(l, \delta), \quad z \in \mathcal{M}_\eta, \quad l=1, 2, \dots \quad (22)$$

Объединяя (19)–(22), получим, что при $z \in \mathcal{M}_\eta$

$$|H_i^{(l)}(z)| \leq \frac{C(f, \delta)}{\rho(z, F_i)^{2l}} \left[\sum_{j=0}^l |f^{(j)}(z)| \right], \quad 1 \leq l \leq n.$$

Если же $\varphi \notin E_i$, то легко заметить, что

$$|H_i^{(l)}(z)| \leq \frac{C(\delta)}{\rho(z, F_i)^{2l}}, \quad 0 \leq l \leq n.$$

Таким образом, имеем

$$|H_i^{(l)}(z)| \leq \frac{C(\delta, f)}{\rho(z, F_i)^{2l}} \left[\sum_{j=0}^l |f^{(j)}(z)| \right] \quad (z \in U \cup \Gamma).$$

Отсюда следует лемма в случае $X = H_{n+1}^p, A^{(n)}$, а при $X = \lambda_{\alpha}^{(n)}, \lambda_{\beta}^{(n)}$ достаточно воспользоваться последней оценкой и теоремой Харди-Литтльвуда (см. [14]).

Доказательство теоремы 4.

Сначала предположим, что $X = A^{(n)}$ или равен H_{n+1}^p , пусть

$$\omega_0(z) = \Psi(z) \Psi_1(z) \Psi_2(z) H_i(z).$$

Докажем, что

$$\|\omega_\delta f - \Psi^3 G_f\|_X \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Пусть $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in E_i$, тогда

$$\omega_\delta(e^{i\varphi}) = \Psi(e^{i\varphi}) G_f(e^{i\varphi}) \Psi_1(e^{i\varphi}) \Psi_2(e^{i\varphi}) \Phi_\delta(e^{i\varphi}),$$

поэтому, ввиду (20), имеем

$$|\omega^{(l)}(e^{i\varphi})| \leq C(l, f) \sum_{j=0}^l |(\Psi^j G_f(e^{i\varphi}))^{(l)}|, \quad l=0, 1, \dots, n.$$

Если $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in CE_\delta$, то тогда

$$|H_\delta^{(l)}(e^{i\varphi})| \leq \frac{C(l)}{\rho(\varphi, F_\delta)^{2l}}, \quad l=0, 1, \dots.$$

Следовательно, в этом случае имеем

$$|(\omega_\delta(e^{i\varphi}))^{(l)}| \leq C_1(l, f) \left(\sum_{k=0}^l |\Psi^{(l-k)}(e^{i\varphi}) f^{(k)}(e^{i\varphi})| \right),$$

$$l=0, 1, \dots, n \text{ (при } X=H_{n+1}^p, \quad l=0, 1, \dots, n+1).$$

Из этих оценок следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует η_0 такое, что

$$|(\omega_\delta(e^{i\varphi}))^{(l)}| < \varepsilon \left(\sum_{k=0}^l |f^{(k)}(e^{i\varphi})| \right) \quad (23)$$

при $\rho(\varphi, E) < \eta_0$.

Докажем, что

$$\omega_\delta^{(l)}(e^{i\varphi}) \rightarrow (\Psi^l(e^{i\varphi}) G_f(e^{i\varphi}))^{(l)}, \quad l=0, 1, \dots, n+1$$

равномерно при $\rho(\varphi, E) \geq \eta_0$ и при $\delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $N\delta \rightarrow 0$. Достаточно доказать, что

$$\Phi_\delta(e^{i\varphi}) \rightarrow 1$$

$$\Phi_\delta^{(l)}(e^{i\varphi}) \rightarrow 0, \quad l=1, \dots, n+1$$

равномерно при $\rho(E, \varphi) \geq \eta_0$.

Если $\rho(E, \varphi) \geq \eta_0$, то можно δ и N так подобрать, что

$$\rho(CE_\delta, \varphi) > \frac{\eta_0}{4} \text{ и } \rho(F_\delta, \varphi) > \frac{\eta_0}{4}. \quad (24)$$

Заметим, что при этих условиях

$$|\Phi_\delta^{(j)}(e^{i\varphi})| \leq \frac{C(j)}{\eta_0^j} \int_{CE_\delta} |\log |f(e^{it})|| dt, \quad (25)$$

и что при $\delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $N\delta \rightarrow 0$, $\text{mes } CE_\delta \rightarrow 0$. В самом деле

$$\text{mes } CE_\delta = 2\pi - \text{mes } E_\delta,$$

$$\text{mes } E_\delta = \sum_{k=1}^N (\beta_k - \alpha_k) - 2N\delta,$$

а

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) = 2\pi,$$

поэтому

$$\int_{CE_\delta} |\log |f(e^{it})|| dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \\ N\delta \rightarrow 0.$$

И, следовательно, из оценок (23), (25) получим теорему в случае $X = H_{n+1}^p, A^{(n)}$.

Проверим справедливость теоремы в случае $X = \lambda_a^{(n)}$. В случае $X = \lambda_a^{(n)}$ — проверяется аналогичным образом.

По теореме Харди-Литтльвуда (см. [14])

$$\|f\|_{\lambda_a^{(n)}} \sim \|f\|_{-} + \sup_{0 < r < 1} (1-r)^{1-\alpha} M(f^{(n+1)}, r).$$

Из леммы 3 следует, что $\omega_\delta \in \lambda_a^{(n)}$. Оценим норму

$$\|\omega_\delta\|_{\lambda_a^{(n)}}, \quad \omega_\delta = \Psi G_f \Psi_1 \Psi_2 H_\delta Q_f,$$

Q_f — внешняя часть функции f , $H_\delta Q_f = \Phi_\delta$.

Докажем, что

$$|\Phi_\delta^{(n+1)}(z)| = O\left(\frac{1}{\rho(z, F_\delta)^{2(n+1)}}\right) + o\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\right). \quad (26)$$

Из [11] (мы могли бы обойтись и без результатов работы [11], но для краткого изложения мы их используем) следует, что если $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in E_\delta$, то, как уже доказано

$$|\Phi_\delta^{(n+1)}(re^{i\varphi})| \leq \frac{C(f)}{\rho(z, F_\delta)^{2(n+1)}},$$

если же $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in CE_\delta$, то

$$\begin{aligned} \Phi_\delta^{(n+1)}(z) &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\Phi_\delta(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}} d\zeta = \\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{Q_f(\zeta) \overline{H_\delta^{-1}(\zeta)}}{(\zeta-z)^{n+2}} d\zeta = \\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi} \int_{E_\delta} \frac{\Phi_\delta(e^{it}) (|Q_f(e^{it})|^2 - 1)}{(e^{it} - z)^{n+2}} e^{it} dt. \end{aligned}$$

Из результатов работы [11] вытекает, что

$$\left| \int_{|\zeta|=1} \frac{Q_f(\zeta) \overline{H_\delta^{-1}(\zeta)}}{(\zeta-z)^{n+2}} d\zeta \right| = o\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\right), \\ \left| \int_{E_\delta} \frac{e^{it} \Phi_\delta(e^{it}) (|Q_f(e^{it})|^2 - 1)}{(e^{it} - z)^{n+2}} dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{\text{const}}{\rho(z, F_{\varepsilon})^{n+2}} \int_{|\zeta|=1} |Q_f(\zeta)|^2 |d\zeta|.$$

Следовательно, оценка (26) доказана. Остается заметить, что из оценки (26) следует

$$(1-r)^{1-\alpha} M((\omega_{\varepsilon} - \Psi^3 G_f)^{n+1}, r) = o(1).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_0(\varepsilon)$ такое, что

$$(1-r)^{1-\alpha} M((\omega_{\varepsilon} - \Psi^3 G_f)^{(n+1)}, r) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \sup_{0 < r < 1} (1-r)^{1-\alpha} M((\omega_{\varepsilon} - \Psi^3 G_f)^{(n+1)}, r) < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{0 < r < r_0} (1-r)^{1-\alpha} M((\omega_{\varepsilon} - \Psi^3 G_f)^{(n+1)}, r); \end{aligned}$$

но так как при $\delta \rightarrow 0$ $N \rightarrow \infty$, $N\delta \rightarrow 0$, $\omega_{\varepsilon} \rightarrow \Psi^3 G_f$ равномерно внутри U , то первое слагаемое тоже будет стремиться к нулю при $\delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$: $N\delta \rightarrow 0$. То, что

$$\|\omega_{\varepsilon} - \Psi^3 G_f\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

$N\delta \rightarrow 0$, следует из первой части доказательства. Доказательство закончено.

Лемма 4. Пусть T — линейный функционал на X . Тогда существует функция $T_0(z)$, аналитическая в $|z| > 1$ и такая, что

$$|T_0(z)| \leq \text{const} \left[\frac{1}{(|z| - 1)^m} + 1 \right], \quad |z| > 1 \quad (27)$$

при некотором $m > 0$, при этом

$$T(g) = \lim_{r \rightarrow 1+0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) T_0(re^{i\theta}) d\theta$$

для любого $g \in X$.

Доказательство. Пусть $\Psi_{\zeta}(z) = \frac{\zeta}{\zeta - z}$. Очевидно при фиксированном $|\zeta| > 1$ $\Psi_{\zeta}(z) \in X$.

Пусть

$$T_0(\zeta) = T\left(\frac{\zeta}{\zeta - z}\right).$$

Легко видеть, что $T_0(\zeta)$ аналитична в $|\zeta| > 1$ и

$$T_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T(z^k)}{\zeta^k}.$$

Оценка (27) следует из неравенства

$$|T(z^k)| \leq \text{const } k^{n+2}, \quad k \geq 1.$$

Если $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то легко заметить, что

$$T(g) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k T(z^k) \rho^k.$$

Из представления T_0 следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_0(z^k) \rho^k = \lim_{r \rightarrow 1+0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) T_0(re^{i\theta}) d\theta.$$

Лемма доказана.

Обозначим через A^* алгебру функций, аналитических в U и бесконечно дифференцируемых вплоть до Γ . Следующая лемма вытекает из результатов работы [18].

Лемма 5. Пусть $T_0(z)$ — функция, аналитическая в области $|z| > 1$, и

$$|T_0(z)| \leq \text{const} \left[\frac{1}{(|z| - 1)^m} + 1 \right]$$

при некотором $m > 0$, $|z| > 1$. Предположим

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \int_{|\zeta|=1} g(\zeta) T_0(r\zeta) |d\zeta| = 0$$

для любого g из замкнутого идеала $I \subset A^*$, тогда функция $T_0(z)$ аналитически продолжима во множество $U \cup \Gamma \setminus L_0(I)$ через каждую дугу $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}]$, где нет точек из $L_0(I)$,

$$L_0(I) = \bigcap_{f \in I} L_0(f), \quad L_0(f) = \{\zeta \in \bar{U} : f(\zeta) = 0\},$$

и, кроме того

$$|T_0(z)| \leq \frac{C}{(\rho(z, L_0(I)))^{2(m+1)}} + C \quad \text{при } |z| > 1. \quad (28)$$

Из доказательства этого факта следует, что если I порожден одним элементом Φ , то внутри U

$$T_0(z) = \frac{\Psi(z)}{\Phi(z)}, \quad \text{где } \Psi \in A^*, \Psi(0) = 0. \quad (29)$$

Лемма 6. Пусть $h \in X$, и пусть E — замкнутое множество на Γ ; предположим, что существует последовательность $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям (1) — (4) теоремы 1, $E_l(\varphi_s) = E$, $s = 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, \dots, n$, и пусть $E_n(h) \supset E$, тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k h - h\|_{X_p} = 0. \quad (30)$$

Доказательство. Докажем лемму при $X = H_{n+1}^p; \lambda_2^{(n)}$, в остальных случаях рассуждения проходят с очевидными изменениями. Пусть $h \in H_{n+1}^p$ и $E_n(h) \supset E$. Очевидно, чтобы доказать лемму, достаточно доказать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{ix}) h^{(l)}(e^{ix})|^p dx = 0$$

при $l=0, 1, \dots, n$. Пусть $\alpha \in E$. (Для удобства будем предполагать, что $E_n, E \subset (-\pi, \pi)$). Тогда

$$h(e^{ix}) = \frac{1}{n!} \int_{\alpha}^x (e^{ix} - e^{it})^n h^{(n+1)}(e^{it}) dt$$

и

$$|h^{(l)}(e^{ix})| \leq C_0 |x - \alpha|^{n-l} \int_{\alpha}^x |h^{(n+1)}(e^{it})| dt;$$

по условию

$$|\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{ix})| \leq \frac{\text{const}}{|x - \alpha|^{n+1-l}}$$

при достаточно малом $|x - \alpha|$.

Пусть $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность дополнительных интервалов множества E , тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{ix})|^p |h^{(l)}(e^{ix})|^p dx = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{ix}) h^{(l)}(e^{ix})|^p dx \leq \\ &\leq 2^p \cdot C_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left[\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left(\frac{1}{x - \alpha_j} \int_{\alpha_j}^x |h^{(n+1)}(e^{it})| dt \right)^p dx \right] + \\ &+ 2^p \cdot C_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left[\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left(\frac{1}{\beta_j - x} \int_x^{\beta_j} |h^{(n+1)}(e^{it})| dt \right)^p dx \right]. \end{aligned}$$

Пусть $1 < p < +\infty$, по неравенству Харди (см. [3]) имеем

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left(\frac{1}{x - \alpha_j} \int_{\alpha_j}^x |h^{(n+1)}(e^{it})| dt \right)^p dx \leq C(p) \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |h^{(n+1)}(e^{ix})|^p dx,$$

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left(\frac{1}{\beta_j - x} \int_x^{\beta_j} |h^{(n+1)}(e^{tx})| dt \right)^p dx \leq C(p) \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |h^{(n+1)}(e^{tx})|^p dx.$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{tx})| h^{(l)}(e^{tx})|^p dx \leq C_1(p) \int_{-\infty}^{\infty} |h^{(n+1)}(e^{tx})|^p dx,$$

а при $p=1$ нужно использовать лемму 2 § 1.

Остальное следует из теоремы 1 из известной теоремы (см. [15]).

В случае $X = \lambda^{(n)}$ нужно учесть, что

$$|\varphi_k^{(n+1-l)}(z)| = o(p^{-n-1+l}(z)), \quad l=0, 1, \dots, n+1$$

равномерно по $k=1, 2, \dots$, и

$$h^{(l)}(z) = o(p^{n+1-l}(z)), \quad \text{при } l=0, 1, \dots, n.$$

Аналогично, как и при доказательстве последней части теоремы 2, получим доказательство леммы в этом случае. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы мы проведем, используя теоремы 1, 4, леммы 4, 5 и 6, методом, близким методу, применяемому в работе [18].

Пусть

$$I_0 = \{f \in X: E_k(f) \supset E_k(I), G_I \text{ делит } G_f\}.$$

Очевидно, I_0 — замкнутый идеал в X и $I \subset I_0$. Чтобы доказать теорему нужно установить включение $I_0 \subset I$. Пусть

$$I_1 = \{f \in X: fI_0 \subset I\}.$$

Легко видеть, что I_1 является замкнутым идеалом в X .

Докажем включение

$$E_0(I_1) \subset E_n(I).$$

Пусть

$$z_0 \in E_{k-1}(I) \setminus E_k(I), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Тогда, очевидно, z_0 не является предельной точкой для $E_0(I)$, поэтому $E_0(I) \setminus \{z_0\}$ — замкнутое множество. Пусть Φ — внешняя функция, построенная как в теореме 3 по внутренней функции G_I и по множеству $E_0(I) \setminus \{z_0\}$, $\Phi(z_0) \neq 0$. Пусть $h \in I$ такая, что $h^{(k)}(z_0) \neq 0$. Пусть далее

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & h(z) - \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k - \\ & - \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z-z_0)^{k+1} - \dots - \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Докажем, что $\Phi G_I \Psi \in I$.

Пусть T — любой функционал, ортогональный идеалу I , докажем, что

$$T(\Phi G_I \Psi) = 0,$$

остальное будет следовать из теоремы Хана-Банаха. Из теоремы 4 и из лемм 4, 5 следует, что если $T_0(z)$ — функция, соответствующая функционалу T по лемме 4, то $T_0(z)$ аналитически продолжима во множество $U \cup \Gamma \setminus L_0(I)$ и, кроме того

$$|T_0(z)| \leq \text{const} \left[\frac{1}{\rho(z, L_0(I))^{2(m+1)}} + 1 \right], (|z| > 1). \quad (31)$$

Пусть $\{\varphi_s\}$ — последовательность, построенная как в теореме 1, где $E = \{z_0\}$. Сначала докажем, что $\varphi_s \Phi G_I \Psi \in I$, $s=1, 2, \dots$, откуда и из леммы 6 будет следовать, что $\Phi G_I \Psi \in I$,

$$T(\varphi_s \Phi G_I \Psi) = \lim_{r \rightarrow 1+0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(e^{i\theta}) \Phi(e^{i\theta}) G_I(e^{i\theta}) \Psi(e^{i\theta}) T_0(re^{i\theta}) d\theta,$$

так как можно так подобрать φ_s , $s=1, 2, \dots$, что

$$|(\varphi_s(e^{i\theta}) \Phi(e^{i\theta}) G_I(e^{i\theta}) \Psi(e^{i\theta}))| = O(\rho^{2(m+1)}(e^{i\theta}, L_0(I))).$$

Из (31) будет следовать, что

$$T(\varphi_s \Phi G_I \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(e^{i\theta}) G_I(e^{i\theta}) \Phi(e^{i\theta}) \Psi(e^{i\theta}) \cdot T(e^{i\theta}) d\theta.$$

Так как G_I — наибольший общий делитель внутренних частей функций из I , то по теореме Бёрлинга (см. [1]) существуют $f_p \in I$, $p=1, 2, \dots$ такие, что

$$f_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} G_I \text{ в } L^2(-\pi, \pi).$$

Повторяя

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{p \rightarrow \infty} T(\varphi_s f_p \Phi \Psi) = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(e^{i\theta}) f_p(e^{i\theta}) \Phi(e^{i\theta}) T(e^{i\theta}) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(e^{i\theta}) \Phi(e^{i\theta}) G_I(e^{i\theta}) T(e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

т. е.

$$T(\varphi_s G_I \Phi \Psi) = 0.$$

Следовательно, $\Phi(z) G_I(z) (z - z_0)^k P_{n-k} \in I$, где P_{n-k} — многочлен степени $n - k$ и $P_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Теперь докажем, что $\Phi P_{n-k} \in I_1$. Опять предположим, что T ортогонален I , тогда T будет ортогонален идеалу, порожденному функцией $\Phi G_I (z - z_0)^k P_{n-k}$ и, тем самым, аналитическое продолжение $T_0(z)$ внутри круга будет иметь вид

$$T_0(z) = \frac{\Psi(z)}{\Phi(z) G_I(z) (z - z_0)^k P_{n-k}(z)}, \quad \Psi \in A^\infty, \quad \Psi(0) = 0.$$

Очевидно $z = z_0$ является полюсом порядка k для $T_0(z)$. В таком случае, если $h \in I_0$, то

$$\begin{aligned} T(\Phi h P_{n-k}) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 1+0} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{i\theta}) h(e^{i\theta}) P_{n-k}(e^{i\theta}) T_0(re^{i\theta}) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(e^{i\theta}) \Psi(e^{i\theta}) d\theta}{(e^{i\theta} - z_0)^k G_I(e^{i\theta})}, \end{aligned}$$

очевидно

$$\frac{h(z)}{(z - z_0)^k G_I(z)} \in H^\infty,$$

повтому

$$T(P_{n-k} \Phi h) = \frac{\Psi(0) h(0)}{(-z_0)^k G_I(0)} = 0,$$

т. е.

$$\Phi P_{n-k} \in I_1,$$

и

$$G_I \equiv 1, \quad z_0 \notin E_0(I_1).$$

Аналогично, как и выше, можем установить, что $\varphi_s \in I_1$ $s > 1$. Из леммы 6 получаем, что $I_0 \subset I$.

Теорема доказана.

Замечание. При $X = A^{(n)}$ теорема обобщает теорему 6.2 работы [18] и результаты, полученные в [8].

Следующее следствие при $X = A^{(n)}$ уточняет теорему 3 работы [8].

Следствие. Каждый замкнутый примарный идеал в X — главный и порождается одной из следующих функций:

$$(z - z_0)^k \text{ и } (\zeta - \zeta_0)^{2(n+1)} \exp\left(-a \frac{\zeta_0 + \zeta}{\zeta_0 - \zeta}\right), \quad |\zeta_0| = 1.$$

Институт математики

АН Армянской ССР

Поступило 10.VII.1972

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Մի հատուկ հաշտողականության կառուցումը, և անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ հանրահաշիվներում փակ իդեալների ստորկառուցան (ամփոփում)

Հոդվածում տրվում է [18] աշխատանքում դրված հարցի մասնակի պատասխանը: Ստացված արդյունքը կիրառվում է անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի հանրահաշիվներում փակ իդեալների ներկայացման հարցում:

F. A. SHAMOIAN. *Construction of a special sequence, and the structure of closed ideals in certain algebras of analytic functions (summary)*

The paper gives partial solution to the problem stated in [18]. The result is applied to description of closed ideals in certain algebras of analytic functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., изд. „Мир“, 1963.
2. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
3. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1, М., изд. „Мир“, 1965.
4. Б. И. Коренблум. О функциях, голоморфных в круге и гладких вплоть до его границы, ДАН СССР, 200, № 1, 1971, 24—27.
5. В. И. Коренблум. Инвариантные подпространства оператора сдвига во взвешенном гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 202, № 6, 1972.
6. Б. И. Коренблум, В. С. Королевич. Об аналитических функциях, регулярных в круге и гладких на границе, Матем. заметки, 7, вып. 2, 1970.
7. В. С. Королевич. Некоторые банаховы алгебры аналитических функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика“, V, № 4, 1970.
8. Л. В. Шмакова. Главные примарные идеалы кольца функций, регулярных в круге и дифференцируемых на его границе, УМЖ, 21, № 2, 1969.
9. Ф. А. Шамоян. Некоторые проблемы деления в пространствах аналитических функций, Диссертация, ЛГУ, 1971.
10. Ф. А. Шамоян. Построение одной специальной последовательности и структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах аналитических функций, ДАН Арм.ССР, т. 55, 1972.
11. Ф. А. Шамоян. Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге, Записки научных семинаров, ЛОМИ АН СССР, т. 22, 1971.
12. Б. С. Павлов. О несамосопряженном операторе Шредингера, Проблемы математической физики, вып. 3, изд. ЛГУ, 1968.
13. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
14. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., изд. „Наука“, 1966.
15. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М., 1967.
16. L. Carleson. Sets uniqueness for functions regular in the unit circle, Acta. Math., 87, 3—4.
17. H. Alexander, B. A. Taylor and D. L. Williams. The interpolating sets for A^∞ , Journ. of Math. anal. and apl., 36, 1971.
18. B. A. Taylor and D. L. Williams. Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values, Canad. J. Math., 22, 1970.
19. B. A. Taylor and D. L. Williams. Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc., Mich. Math. J., 18, 1971.
20. T. Carleman. Les fonctions quasianalytiques, Paris, 1926.

ДОБАВЛЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Методы, примененные в работе, позволят получить полное описание замкнутых идеалов в алгебрах, рассмотренных в статье.

Именно, справедлива следующая

Теорема. Пусть X совпадает с одной из следующих алгебр

$$H_{n+1}^p, \lambda_a^{(n)}, \lambda_*^{(n)} \quad (1 < p < +\infty, 0 < \alpha < 1, n > 0).$$

Пусть далее I — замкнутый идеал в X . Тогда

$$I = \left\{ f \in X, f: E_k(f) \supset E_k(I); k=0, 1, \dots, n \right\},$$

G_I делит G_f