ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 6, 1972 Математика

С. Г. СЕДРАКЯН

ОБ ОБРАЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА СВЕРТКИ ПО КРИВЫМ

Обращение преобразования типа свертки

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$G(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{sx}}{E(s)}\,ds,$$

$$E(s)=e^{cs^2+bs}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{a_k}\right)e^{-\frac{s}{a_k}}$$

a_k — действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots \text{ и } \sum_{1}^{\infty} a_k^{-2}<\infty,$$

для действительной переменной хорошо изучены (см. [1]).

В работе изучено обращение интегрального преобразования вида

$$f(z)=\int\limits_{L} G(z-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1.1}$$

где L, вообще говоря, кривая, а z—комплексная переменная.

Выясняется, что при обращении преобразования (1.1) вид кривой зависит от скорости возрастания нулей целой функции $E(s)$, где

$$E(s)=\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{a_k}\right)e^{-\frac{s}{a_k}} \tag{1.2}$$

и удовлетворяются следующие условия:

$$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots, \tag{1.3}$$

$$\sum_{1}^{\infty} a_k^{-2}<\infty,\quad \sum_{1}^{\infty} a_k^{-1}=\infty, \tag{1.4}$$

$$1<\rho<2, \tag{1.5}$$

$$\rho = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln n(t)}{\ln t}, \tag{1.6}$$

$n(t)$ — числовая функция последовательности $\{a_k\}$.

Если $y = y(x)$ есть уравнение кривой, по которой берется интеграл (1.1), то обращение получается при

$$|y'(x)| \leqslant \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2\rho} + \eta\right), \quad 0 < \eta < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right).$$

Длина кривой может быть и конечной.

Метод получения обращения интегрального преобразования вдоль кривых отличается от метода получения обращения преобразования вдоль действительной оси.

Для формулировки теоремы обращения введем несколько определений и обозначений.

Определения

1. Функция $n(t) > 0$, определенная для положительных значений t, принадлежит классу n_p ($n(t) \in n_p$), если для любого постоянного $c \in (0, \infty)$ существует предел

$$\lim_{t \to \infty} \frac{h_p(ct)}{h_p(t)},$$

где

$$h_p(t) = \int_a^t dt_{p-1} \int_a^{t_{p-1}} dt_{p-2} \cdots \int_a^{t_1} n(t_0)\, dt_0. \tag{1.7}$$

2. Условимся говорить, что $E(s)$ принадлежит классу E_p, если числовая функция $n(t)$ корней $E(s)$ принадлежит классу n_p и удовлетворяются условия (1.3), (1.4), (1.5). Введем обозначения

$$S_n = \sum_{n+1}^{\infty} a_k^{-2}, \tag{1.8}$$

$$P_n(s) = \prod_1^n \left(1 + \frac{s}{a_k}\right) e^{-\frac{s}{a_k}}, \tag{1.9}$$

$$P_n(D) = \prod_1^n \left(1 + \frac{D}{a_k}\right) e^{-\frac{D}{a_k}},$$

D — оператор дифференцирования, а под $e^{\alpha D}$ понимается

$$e^{\alpha D} f(z) = f(z + \alpha), \tag{1.10}$$

$$E_n(s) = \frac{E(s)}{P_n(s)} = \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{a_k}\right) e^{-\frac{s}{a_k}}. \tag{1.11}$$

Теперь сформулируем теорему обращения.

Теорема 1. *Если*

$$f(z) = \int_L C(z-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

1) $$C(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{sz}}{E(s)}\,ds, \quad E(s) \in E_\rho,$$

2) $$|y'(x)| \leqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\rho} - \eta\right),\ 0 < \eta < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right),$$

ρ *определено* (1.6) *и удовлетворяется условие* (1.5), *а* $y = y(x)$ — *уравнение кривой* L,

3) $$|\varphi(z) - \varphi(z-t)| < \exp\left(cS_1^{-\frac{1}{2}}|t|\right),$$

для любого $z \in L$ *и для таких* t, *что* $z - t \in L$, $c < \inf a_n S_n^{-\frac{1}{2}}$, S_n—*определено* (1.8),

4) $\varphi(t)$ *непрерывна для* $t \in L$,

то

$$\lim_{n\to\infty} P_n(D) f(z) = T_L(z)\,\varphi(z),$$

где $P_n(D)$ *определено* (1.10) *и*

$$T_L(z) = \begin{cases} 1, \text{ при } z \in L \setminus \partial L \\ 0 \text{ при } z \overline{\in} L \end{cases}$$

($L \setminus \partial L$ — *множество внутренних точек* L).

Для доказательства теоремы 1 убедимся в справедливости следующей теоремы и нескольких лемм.

Теорема 2. *Если*

1. $$Y(z) = (-1)^k z^{k+1} \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{[k+1]}(t+z)}\,dt \text{ сходится},$$

2. $n(t) \in n_\rho$,

3. $0 < k < \rho < k+1$, *где* ρ *определено* (1.6),

4. $|\theta| < \pi - \eta$, $0 < \eta < \pi$ $(z = re^{i\theta})$,

то

$$Y(z) = \frac{\pi h_{\rho\rho}^*(r)}{\sin \rho\pi} z^\rho + o\left(h_{\rho\rho}^*(r)\, r^\rho\right)$$

при $r \to \infty$, *где*

$$\overset{*}{h}_{p\rho}(r) = \prod_{k=1}^{p} (\rho + k)\, r^{-(p+\rho)} h_p^{(r)},$$

$h_p(r)$ *определено* (1.7).

Предварительно докажем леммы.

Определение. Функция $l(r)$, определенная в $(0, \infty)$, называется медленно растущей функцией, если существует предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{l(cr)}{l(r)} = 1$$

для любого постоянного $c > 0$, или, если существует производная $l'(r)$, то

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r l'(r)}{l(r)} = 0.$$

Лемма 2.1. *Если функция* $l(r)$ *вместе со своей производной* $l'(r)$ *непрерывна при* $r > c > 0$, *и* $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{l(c_0 r)}{l(r)} = 1$ *для некоторого* c_0 $(0 < c_0 \neq 1)$, *то для произвольного* $c > 0$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{l(cr)}{l(r)} = 1.$$

Доказательство. По условию

$$\lim_{r \to \infty} \frac{l(c_0 r)}{l(r)} = 1,$$

или, что то же

$$\lim_{r \to \infty} \ln \frac{l(c_0 r)}{l(r)} = \lim_{r \to \infty} \int_r^{c_0 r} \frac{l'(x)}{l(x)}\, dx =$$

$$= \lim_{r \to \infty} \frac{l'(\theta r)}{l(\theta r)}\, r\,(c_0 - 1), \quad \begin{matrix} 1 \leqslant \theta \leqslant c_0 \ (c_0 > 1) \\ c_0 \leqslant \theta \leqslant 1 \ (c_0 < 1). \end{matrix}$$

Обозначим $\theta r = r'$, имеем

$$\lim_{r' \to \infty} \frac{r' l'(r')}{l(r')} \cdot \frac{c_0 - 1}{\theta} = 0, \text{ где } \frac{c_0 - 1}{\theta} > c_1 > 0,$$

значит

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r l'(r)}{l(r)} = 0,$$

и лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если функция* $l(r)$ *определена для положительных значений* r, *удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln l(r)}{\ln r} = 0 \qquad (1)$$

и для любого числа $c \in (0, \infty)$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{l(cr)}{l(r)}, \tag{2}$$

то $l(r)$ — *медленно растущая функция.*

Доказательство. Из условия (1) следует существование такой медленно растущей функции $L(r)$ и последовательности $\{r_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$, что

$$l(r) \leqslant L(r),\ r > 0 \text{ и } l(r_n) = L(r_n)$$

(см. [4], стр. 48, ч. 1, § 12 и теорему 16, гл. 1, § 12, стр. 52). По условию (2) существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{l(cr)}{l(r)}, \text{ и так как } l(r) \leqslant L(r),$$

то $\dfrac{l(cr_n)}{l(r_n)} \leqslant \dfrac{L(cr_n)}{L(r_n)}$, отсюда следует, что $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{l(cr)}{l(r)} \leqslant 1$, с другой стороны, можно взять последовательность $\{r_n'\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = \infty$ и $l(cr_n') = L(cr_n')$ (например, можно взять $r_n' = \dfrac{r_n}{c}$), получим $\dfrac{l(cr_n')}{l(r_n')} \geqslant \dfrac{L(cr_n')}{L(r_n')}$, откуда вытекает, что $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{l(cr)}{l(r)} \geqslant 1$.

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Если* $l(r)$ — *медленно растущая функция, а* $\psi(u)$ *абсолютно интегрируема на интервале* $(0, \infty)$ *и удовлетворяет условиям*

$$|\psi(u)| = o\,(u^{\gamma-1}) \qquad (u \to 0,\ \gamma > 0),$$

$$|\psi(u)| = o\,(u^{-\gamma-1}) \quad (u \to \infty,\ \gamma > 0),$$

где u и r вещественны, то

$$\int\limits_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty} \frac{l(ru)}{l(r)}\, \psi(u)\, du = \int\limits_{0}^{\infty} \psi(u)\, du + o(1)$$

при $r \to \infty$, $\alpha > 0$.

Доказательство леммы получается из леммы 2 работы [3].

Доказательство теоремы 2. Имеем

$$Y(z) = (-1)^k z^{k+1} \int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{n(t)}{t^{k+1}\,(t+z)}\, dt.$$

Интегрируя по частям p раз, получим

$$Y(z) = (-1)^{p+k} z^{k+1} \int\limits_{\alpha}^{\infty} h_p(t) \left(\frac{t^{-k-1}}{t+z}\right)^{(p)} dt,$$

$$\operatorname{Re} Y(z)=(-1)^{p+k}\int\limits_{\alpha}^{\infty} h_p(t)\operatorname{Re}\left[\left(\frac{z^{k+1}t^{-k-1}}{t+r}\right)^{(p)}\right]dt=$$

$$=(-1)^{p+k}\int\limits_{\alpha}^{\infty} h_p(t)\operatorname{Re}\left[\left(\frac{r^{k+1}e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+re^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt,$$

где $h_p(t)$ определена (1.7), $z=re^{i\theta}$.

Положим $t=t'r$, тогда легко заметить, что

$$\operatorname{Re} Y(z)=(-1)^{p+k}r^{-p}\int\limits_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty} h_p(rt)\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt=$$

$$=(-1)^{p+k}r^{-p+l_p}\int\limits_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty}\frac{h_p(rt)}{(rt)^{l_p}}\cdot t^{l_p}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt=$$

$$=(-1)^{p+k}r^{\rho}\int\limits_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty} h_{p\rho}(rt)\,t^{l_p}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt,$$

где $h_{p\rho}(t)=\dfrac{h_p(t)}{t^{l_p}}$, $l_p=p+\rho$.

В силу условия 2 теоремы и леммы 2.1 имеем, что $h_{p\rho}(t)$— медленно растущая функция.

Применяя лемму 2.3, получим

$$\int\limits_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty} h_{p\rho}(rt)\,t^{l_p}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt=$$

$$=h_{p\rho}(r)\int\limits_{0}^{\infty} t^{l_p}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt+o\left(h_{p\rho}(r)\right)=$$

$$=h_{p\rho}(r)\operatorname{Re}\int\limits_{0}^{\infty} t^{l_p}\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}dt+o\left(h_{p\rho}(r)\right)$$

при $r\to\infty$.

Интегрируя последний интеграл по частям p раз, получим

$$\operatorname{Re} Y(z)=(-1)^{k}h_{p\rho}(r)\,r^{\rho}\prod_{k=1}^{p-1}(l_p-k)\operatorname{Re}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{\rho-k-1}}{t+e^{i\theta}}dt+$$

$$+o\,(r^\rho h_{\rho\rho}(r)) = \frac{\pi h^*_{\rho\rho}(r)\, r^\rho}{\sin \rho\pi} \operatorname{Re} e^{i\rho\theta} + o\,(r^\rho h_{\rho\rho}(r))$$

при $r \to \infty$. Вычисляя таким же образом $\operatorname{Im} Y(z)$, убедимся в справедливости теоремы, т. е.

$$Y(z) = \frac{\pi h^*_{\rho\rho}(r)}{\sin \rho\pi} z^\rho + o\,(r^\rho h^*_{\rho\rho}(r))$$

при $r \to \infty$.

При помощи этой теоремы получается асимптотическая оценка для канонического произведения

$$\prod_1^\infty \left(1+\frac{z}{a_k}\right) \exp\left[\sum_{m=1}^{p} \frac{(-1)^m}{m} \left(\frac{z}{a_k}\right)^m\right], \text{ когда } n(t) \in n_\rho$$

и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \arg a_k$ и, следовательно, для целой функции конечного порядка, имеющей корнями a_k, для которых существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \arg a_k$.

Приведем примеры функции $n(t)$, для которых с помощью теоремы 2 получается асимптотическая оценка, которая, однако из результатов не вытекает.

Пример 1.

$$n(t) = t^\rho (2 + \sin t),\ \rho > 0.$$

Для этой функции предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n(ct)}{n(t)}$$

не существует ни для какого c, кроме $c=1$, значит нельзя ее представить в виде $t^\rho l(t)$, где $l(t)$—медленно растущая функция, но если взять

$$h_1(t) = \int_a^t n(x)\,dx = \int_a^t x^\rho (2+\sin x)\,dx =$$

$$= \frac{t^{\rho+1} - a^{\rho+1}}{\rho+1} + \int_a^t x^\rho \sin x\,dx,$$

то $h_1(t) \sim \dfrac{t^{\rho+1}}{\rho+1}$, отсюда следует существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h_1(ct)}{h_1(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{c^{\rho+1} t^{\rho+1}}{t^{\rho+1}} = c^{\rho+1}$$

для любого $c > 0$.

Пример 2.

$$n(t) = e^{\rho\,[\ln t]}$$

($[x]$ — целая часть x). Можно убедиться, что существуют такие c, для которых предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(ct)}{n(t)}$$

не существует. Например, если взять $c<e$ ($c\neq 1$), то можно найти последовательность $\{t_k\}$ такую, что $t_k\to\infty$, $k\to\infty$ и $[\ln ct_k]=[\ln t_k]$, то есть

$$\frac{n(ct_k)}{n(t_k)}=1,$$

и для того же c можно выбрать последовательность $\{t_k'\}$ такую, что $t_k\to\infty$, $k\to\infty$ и

$$[\ln ct_k']=[\ln t_k']+1\ (1<c<e).$$

В этом случае $\dfrac{n(ct_k')}{n(t_k')}=e^\rho$. Отсюда следует, что предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(ct)}{n(t)}$$

не существует ни для одного такого c.

Теперь покажем, что если взять

$$n_2(t)=\int_\alpha^t dt_1\int_\alpha^{t_1} n(t_0)\,dt_0,$$

то для функции $h_2(t)$ предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h_2(ct)}{h_2(t)}$$

существует для любого $c>0$. В самом деле

$$\frac{h_2(ct)}{h_2(t)}=\frac{\int_\alpha^{ct} dt_1\int_\alpha^{t_1} n(t_0)\,dt_0}{\int_\alpha^{t} dt_1\int_\alpha^{t_1} n(t_0)\,dt_0}=$$

положим $t_1=cz$

$$=\frac{c\int_{\alpha/c}^{t} dz\int_\alpha^{z} e^{\rho[\ln t_0]}\,dt_0}{\int_\alpha^{t} dt_1\int_\alpha^{t_1} e^{\rho[\ln t_0]}\,dt_0}=$$

положим $t_0=ct'$

$$= \frac{c^2 \int\limits_a^t dz \int\limits_a^z e^{\rho [\ln ct']} dt' + c_1}{\int\limits_a^t dt_1 \int\limits_a^{t_1} e^{\rho [\ln t_0]} dt_0}.$$

Если взять $c = e^k$ (k—целое число), то предел для таких c существует и равен $c^{\rho+2}$, а для функции

$$\overline{h}_2(t) = \frac{h_2(t)}{t^{\rho+1}} \quad \text{для таких } c$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{h}_2(ct)}{\overline{h}_2(t)} = 1.$$

Согласно лемме 2.1 этот предел существует и равен 1 для любого $c>0$, следовательно

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h_2(ct)}{h_2(t)} = c^{\rho+2}.$$

Лемма 1.1. *Если* $E_n(s) \in E_\rho$ $(s = re^{i\theta})$,

а $|r\cos\theta| < c\, S_n^{-1/2}$ $(0 < c < \inf a_n s_n^{1/2})$, $n=1, 2, \cdots$,

то

а) *при* $\cos\theta \leqslant 0$

$$|E_n(s)| \geqslant \exp\left[-\frac{c^2}{2(1-c_1)}\right] \quad (0 < c_1 < 1),$$

в) *при* $\cos\theta > 0$

$$|E_n(s)| \geqslant \exp\left[-\frac{c^2}{2}\right].$$

Доказательство. а) Имеем $\cos\theta \leqslant 0$

$$|E_n(s)| = \prod_{n+1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{r\cos\theta}{a_k}\right)^2 + \frac{r^2\sin^2\theta}{a_k^2}\right]^{1/2} e^{-\frac{r\cos\theta}{a_k}} \geqslant$$

$$> \prod_{n+1}^{\infty}\left(1+\frac{r\cos\theta}{a_k}\right) e^{-\frac{r\cos\theta}{a_k}} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n+1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{r\cos\theta}{a_k}\right) - \frac{r\cos\theta}{a_k}\right]\right\},$$

из условия $\left|\frac{r\cos\theta}{a_k}\right| < 1$ можем написать

$$|E_n(s)| \geqslant \exp\left\{\sum_{n+1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{r\cos\theta}{a_k}\right)^m - \frac{r\cos\theta}{a_k}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{r\cos\theta}{a_k}\right)^m\right] \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left[-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\frac{r^2\cos^2\theta}{a_k^2}}{1-\frac{r\cos\theta}{a_k}}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left(-\frac{S_n}{2}\frac{r^2\cos^2\theta}{1-c_1}\right) \geqslant \exp\left(-\frac{c^2}{2(1-c_1)}\right).$$

б) При $\cos\theta > 0$, и том же условии

$$|E_n(s)| = \exp\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{r\cos\theta}{a_k}\right)^m - \frac{r\cos\theta}{a_k}\right]\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{r^2\cos^2\theta}{a_k^2}\right) \geqslant \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right).$$

Лемма 1.1 доказана.

Замечание. Лемма остается в силе при $\rho=1$ или $\rho=2$.

Лемма 1.2. *Если* $E_n(s) \in E_\rho$, $|\theta| \leqslant \pi - \eta$, $0 < \eta < \pi$ $(s = re^{i\theta})$, *то*

$$|E_n(s)| = \exp\left[-n(a_{n+1})\left(\ln\left|1+\frac{s}{a_k}\right| - \frac{x}{a_{n+1}}\right)\right] +$$
$$+ h(\theta, r)\, r^\rho + o\left(h(\theta, r)\, r^\rho\right)$$

при $r \to \infty$, *где* $h(\theta, r) = \dfrac{\pi \overset{*}{h}_{\rho\rho}(r)}{\sin\rho\pi}\cos\rho\theta.$

Доказательство.

$$\ln E_n(s) = -n(a_{n+1})\left[\ln\left(1+\frac{s}{a_{n+1}}\right) - \frac{s}{a_{n+1}}\right] - s^2\int_{a_{n+1}}^{\infty}\frac{n(t)}{t^2(t+s)}\,dt,$$

применяя теорему 2 при $k=1$ и $\alpha = a_{n+1}$, убедимся в справедливости леммы.

Лемма 1.3. *Если*

1. $E_n(s) \in E_\rho$ $(s = re^{i\theta})$,

2. $|\operatorname{tg}\theta| \geqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\rho} + \frac{\eta}{2}\right)$, $\eta > 0$,

то

а) *при* $\cos\theta > 0$ *существует действительное число* λ, *зависящее только от* θ *такое, что имеет место оценка*

$$|E_n(s)| \geqslant \exp\left[-n(a_{n+1})\left(\ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{r\cos\theta}{a_{n+1}}\right)+\lambda\right]$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\cdots),$$

б) *при* $\cos\theta < 0$ *имеет место оценка*

$$|E_n(s)| > 1 + pS_n r^2 \cos^2\theta,$$

где p*—некоторая постоянная.*

Доказательство. а). Имеем

$$\ln|E_n(s)| = -n(a_{n+1})\left[\ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{x}{a_{n+1}}\right]+$$
$$+\operatorname{Re}\left[-s^2\int_{a_{n+1}}^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^2(t+s)}\right],$$

$$J_n(z) = \operatorname{Re}\left[-s^2\int_{a_{n+1}}^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^2(t+s)}\right] = -r^2\cos^{-2}\theta\times$$
$$\times\int_{a_{n+1}}^{\infty}\frac{n(t)(t\cos 2\theta + r\cos\theta)\,dt}{t^2(t^2+r^2+2rt\cos\theta)}.$$

Отсюда видно, что

$$J_n(z) \geqslant 0, \text{ если } r < -\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}a_{n+1},$$
$$-J_n(z) \geqslant 0, \text{ если } r \geqslant -\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}a_{n+1},$$
$$J_n(z) \to \infty, \text{ если } |s| = r \to \infty$$

и ограничена для конечного $r > 0$.

Следовательно, существует число λ, зависящее только от θ такое, что $J_n(z) > \lambda$. Утверждение а) доказано.

Докажем утверждение б). Если $\cos\theta \leqslant 0$, $s = x(1+im)$, $|m| > 1$, то

$$|E_n(s)| = \prod_{n+1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{2x}{a_k}\right)^2+\frac{(m^2+1)x^2}{a_k^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{a_k}} \geqslant$$
$$\geqslant \prod_{n+1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{2|x|}{a_k}+\frac{(m^2+1)x^2}{a_k^2}\right)\left(1+\frac{2|x|}{a_k}+\frac{2x^2}{a_k^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \prod_{n+1}^{\infty}\left[1+\frac{(m^2-1)x^2}{a_k^2}+\frac{2(m^2+1)x^4}{a_k^4}+\frac{2(m^2-1)|x|^3}{a_k^3}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{n+1}^{\infty}\left[1+\frac{(m^2-1)\,x^2}{a_k^2}+\frac{2\,(m^2+1)\,x^4}{a_k^4}\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant \prod_{n+1}^{\infty}\left(1+p\frac{x^2}{a_k^2}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 1+\sum_{n+1}^{\infty} p\frac{x^2}{a_k^2}=1+pS_n r^2\cdot\cos^2\theta.$$

Лемма 1.3 доказана.

Докажем две леммы относительно функции $G(z)$.

Известно, что если $E_n(s)\in E_p$, то

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{sz}}{E(s)}\,ds \text{ — целая функция}$$

(см. [1], теорему 4. 1, стр. 295).

Лемма 1.4. *Если* 1. $E_n(s)\in E_p$,

2. $$|\sigma|\geqslant|\tau|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2\rho}-\frac{\eta}{2}\right),$$

где ρ *определено* (1.6), $0<\eta<\pi\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$, *то существуют числа* $M>0$ *и* $c>0$ *такие, что*

$$|G_n(z)|\leqslant MS_n^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-cS_n^{-\frac{1}{2}}(|\sigma|-k\tau)\right],$$

$$k\leqslant\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2\rho}-\frac{\eta}{2}\right)\quad(z=\sigma+i\tau).$$

Доказательство. Имеем

$$G_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}\,ds,\quad |\alpha|<a_{n+1},$$

$$G_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-ik|\alpha|}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha-ik|\alpha|}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+ik|\alpha|}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}\,ds.$$

Обозначая

$$L_\alpha=\{s: [x=\alpha,\ y\geqslant|k\alpha|]\},$$
$$L_{-\alpha}=\{s: [x=\alpha,\ y\leqslant-|k\alpha|]\},$$
$$M_\alpha=\{s: [x=\alpha,\ -|k\alpha|\leqslant y\leqslant|k\alpha|]\},$$
$$N_{\pm k\alpha}=\{s: [|x|>\alpha,\ y=\pm k\alpha x]\},$$

получим

$$C_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M_a}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_a}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{-a}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds.$$

Используя лемму 1.2 при $|\operatorname{tg}\theta|>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\eta}{2}\right)$, легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{\pm a}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{N_{\pm ka}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds,$$

следовательно

$$G_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M_a}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{N_{+ka}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{N_{-ka}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds,$$

откуда

$$|G_n(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M_a}\frac{e^{\sigma x-\tau y}}{|E_n(s)|}|ds|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{N_{-ka}}\frac{e^{\sigma x-\tau y}}{|E_n(s)|}|ds|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{N_{+ka}}\frac{e^{\sigma x-\tau y}}{|E_n(s)|}|ds|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{|ka|}\frac{e^{\sigma x+|\tau|y}}{|E_n(s)|}dy+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|a|}^{\infty}\frac{e^{\sigma x+|\tau|kx}}{|E_n(s)|}dx.$$

Если $x>0$, возьмем $a<0$, $\sigma<0$, и применяя пункт а) леммы 1.3 и пункт б) леммы (1.1), получим

$$|G_n(z)|<\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{kcS_n^{-1/2}}\exp\left[\sigma x+\tau y+\frac{c^2}{2}\right]dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{cS_n^{-1/2}}^{\infty}\frac{e^{x(\sigma+k\tau)}\,(1+k)\,dx}{\exp\left[-n\,(a_{n+1})\left(\ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{x}{a_{n+1}}\right]\right.}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{kcS_n^{-1/2}\,e^{c^2/2}}{\pi}\exp\left[c\,s_n^{-1/2}(\sigma+k\tau)\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\exp\left[c\,S_n^{-1/2}(\sigma+k\tau)\right]e^{-\lambda}\int\limits_{cS_n^{-1/2}}^{\infty}\exp\left[n\,(a_{n+1})\ \ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{x}{a_{n+1}}\right]dx\leqslant$$

$$<\frac{1}{\pi}\left(e^{c^2/2}\,kc\,S_n^{-1/2}+c_n\right)\exp\left[c\,S_n^{-1/2}(\sigma+k\tau)\right],$$

где

$$c_n=e^{-\lambda}\int\limits_{cS_n^{-1/2}}^{\infty}\exp\left[n\,(a_{n+1})\ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{x}{a_{n+1}}\right]dx.$$

Легко заметить, что $c_n\to 0$ при $n\to\infty$.

При $x<0$ возьмем $\alpha>0$, $\sigma>0$ и, и применяя пункт б) леммы 1.3 и пункт а) леммы (1.1), получим

$$|G_n(z)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{kcS_n^{-1/2}}\frac{e^{\sigma x+|\tau|y}}{\exp\left[-\frac{c^2}{2(1-c_1)}\right]}dy+\frac{1}{\pi}\int\limits_{cS_n^{-1/2}}^{\infty}\frac{e^{-x(\sigma+k\tau)}}{1+px^2S_n}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\ kcS_n^{-1/2}\exp\left[\frac{c^2}{2(1-c_1)}+(k+1)\int\limits_{cS_n^{-1/2}}^{\infty}\frac{dx}{1+px^2S_n}\right]\times$$

$$\times\exp\left[cS_n^{-1/2}(-\sigma+\tau k)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left[kcS_n^{-1/2}\exp\left(\frac{c^2}{2(1-c_1)}\right)+\frac{S_n^{-1/2}}{\sqrt{p}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{pS_n}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[cS_n^{-1/2}(-\sigma+k\tau)\right]=M\cdot S_n^{-1/2}\exp\left[cS_n^{-1/2}(-\sigma+k\tau)\right].$$

Лемма 1.4 доказана.

Эти результаты будут использованы при доказательстве теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Из условия 4 теоремы 1 и леммы 1.4 следует аналитичность функции

$$f(z)=\int\limits_L G(z-t)\,\varphi(t)\,dt$$

на кривой L, значит

$$P_n(D)\,f(z)=\int\limits_L G_n(z-t)\,\varphi(t)\,dt,\quad P_n(D)\ \text{определено (1.10)},$$

$$P_n(D)\,f(z)-T_{nL}(z)\,\varphi(z)=\int\limits_L G(z-t)\,[\varphi(t)-\varphi(z)]\,dt.$$

Полагая $t=t'+z$, получим

$$P_n(D)\,f(z)-T_{nL}(z)\,\varphi(z)=\int\limits_{L(z)}G_n(t)\,[\varphi(z+t)-\varphi(z)]\,dt=$$

$$=\int\limits_{L_\delta(z)}G_n(t)\,[\varphi(z+t)-\varphi(z)]\,dt+\int\limits_{L(z)\setminus L_\delta(z)}G_n(t)\,[\varphi(z+t)-\varphi(z)]\,dt,$$

где $L_\delta(z)$ часть кривой $L(z)$ для $|t|\leqslant\delta$, а

$$T_{nL}(z)=\int\limits_L G_n(z-t)\,dt.$$

Из тех же условий теоремы 1 и леммы 1.4 получаем

$$|P_n(D)f(z)-T_{nL}(z)\varphi(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{L_\delta(z)}|G_n(t)|\,|\varphi(z+t)-\varphi(z)|\,|dt|+\int\limits_{L(z)\setminus L_\delta(z)}|G_n(t)|\,|\varphi(z+t)-\varphi(z)|\,|dt|\leqslant$$

$$\leqslant\max|\varphi(z+t)-\varphi(z)|\cdot\int\limits_{L_\delta(z)}|G_n(t)|\,|dt|+$$

$$+2\int\limits_\delta^\infty MS_n^{-1/2}\exp\left[-cS_n^{-1/2}\sigma(1-k)+c'S_1^{-1/2}(1-k)\sigma\right]d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\cdot 2MS_n^{-1/2}\int\limits_0^\infty\exp\left[-cS_n^{-1/2}(1-k)\sigma\right]d\sigma+$$

$$+2MS_n^{-1/2}\int\limits_\delta^\infty\exp\left[-c''(1-k)S_n^{-1/2}\sigma\right]d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\cdot 2Mc'''+\frac{2M}{c''(1-k)}\exp\left[-\delta S_n^{-1/2}(1-k)c''\right]$$

$$(c'<c,\ c''>0,\ c'''>0,\ k<1).$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}|P_n(D)f(z)-T_{nL}(z)\varphi(z)|<\varepsilon M'.$$

В силу произвольности ε

$$\lim_{n\to\infty}P_n(D)f(z)=T_L(z)\varphi(z).$$

Если множество $\{\mathrm{Re}\,t\}$, $t\in L$ совпадает со всей числовой осью, то

$$T_{nL}(z)=\int\limits_L G_n(z-t)\,dt=\int\limits_{L(z)}G_n(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_n(t)\,dt=1,$$

это следует из того, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{L_{\pm R}(z)}G_n(t)\,dt=0,$$

где $L_{\pm R}(z)$— отрезки перпендикуляров, находящиеся между действительной осью и кривой $L(z)$, восстановленных в точках $x=\pm R$, а это следует из условия пункта 3 теоремы 1 и леммы 1.4.

Для любой кривой L, удовлетворяющей условиям теоремы

$$T_L(z)=\lim T_{nL}(z)=\begin{cases}1, & \text{при } z\in L\setminus\partial L\\ 0, & \text{при } s\,\overline{\in}\,L,\end{cases}$$

это следует из того, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{L(z)\setminus L_\delta(z)} G_n(t)\,dt = 0.$$

Теорема 1 полностью доказана.

С помощью этой теоремы для частных случаев ядра получаются обращения преобразований вида

$$F(x) = \int\limits_a^b e^{-xt}\,\varphi(t)\,dt \text{ (обобщенное преобразование Лапласа),}$$

$$F(x) = \int\limits_a^b \frac{\varphi(t)}{x+t}\,dt \text{ (обобщенное преобразование Стильтьеса),}$$

$$(0 \leqslant a < b \leqslant \infty).$$

Для этих частных случаев обращение получается и в том случае, когда интегралы взяты вдоль кривых (см. [1], стр. 9).

Ս. Գ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ. Կորերով տարածված ծալքի տիպի ինտեգրալ ձևափոխությունների շրջման մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ուսումնասիրված է և ստացված է կորերով տարածված ծալքի տիպի ինտեգրալ ձևափոխությունների շրջումը, որը հանդիսանում է Ուիդերի և Հիրշմանի կողմից ստացված ինտեգրալ ձևափոխության շրջման ընդհանրացումը։ Աշխատանքում ստացված են ասիմպտոտիկ գնահատականներ ամբողջ ֆունկցիաների որոշ դասերի համար։

S. G. SEDRAKIAN. *On the inversion of convolution type integral transformations along curves* (summary)

Convolution type integral transformations along curves which generalise those considered by Widder and Hirschman are studied and their inversion is obtained. For some classes of entire functions a number of asymptotic estimates is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер.* Преобразование типа свертки, М., 1958.
2. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., 1958.
3. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., 1962.
4. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., 1956.
5. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
6. *А. Кратцер, В. Франц.* Трансцендентные функции, М., 1963.
7. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.