ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 6, 1972 Математика

А. А. НЕРСЕСЯН

О РАВНОМЕРНОЙ И КАСАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Замкнутое множество E назовем множеством равномерной аппроксимации мероморфными функциями, если для любой функции $f(z)$, непрерывной на E и аналитической на внутренней части E° множества E и любого числа $\varepsilon > 0$, существует мероморфная функция $\mu(z)$ такая, что $|f(z) - \mu(z)| < \varepsilon$ при $z \in E$. Если же для любой функции $\varepsilon(x) > 0$, непрерывной на $[0, \infty)$ и стремящейся к нулю произвольно быстро при $x \to \infty$, существует мероморфная функция $\mu(z)$ такая, что $|f(z) - \mu(z)| < \varepsilon(|z|)$ при $z \in E$, то множество E назовем множеством касательной аппроксимации мероморфными функциями.

В настоящей работе рассматривается вопрос о необходимых и достаточных условиях, налагаемых на множество, при которых оно становится множеством равномерной аппроксимации мероморфными функциями. Необходимые и достаточные условия для случая касательной аппроксимации найдены для множеств с пустой внутренностью.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Для того чтобы замкнутое множество E было множеством равномерной аппроксимации мероморфными функциями, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого круга $\overline{D}$ множество $E \cap \overline{D}$ было множеством, допускающим равномерную аппроксимацию рациональными функциями.*

Теорема 2. *Для того чтобы замкнутое множество E, $E^\circ = \varnothing$, было множеством касательной аппроксимации мероморфными функциями, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого круга $\overline{D}$ множество $E \cap \overline{D}$ было множеством, допускающим рациональную аппроксимацию.*

Необходимость условия теоремы 1 докажем в терминах аналитической C-емкости множеств, используя известную теорему А. Г. Витушкина о рациональной аппроксимации ([1], [2]). Доказательство достаточности проводится с помощью методов, развитых М. В. Келдышем (см. работу [3]). Теорема 2 получается как следствие теоремы 1.

Приведем без доказательства одну теорему А. Г. Витушкина ([1], [2]), которой воспользуемся в дальнейшем.

Теорема 3. Пусть U — ограниченное открытое множество. Непрерывную на всей плоскости и аналитическую вне U функцию $f(z)$ с любой точностью можно равномерно приблизить на некотором компакте F рациональными функциями с полюсами вне F. Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно найти рациональную функцию $r(z)$ такую, что $|f(z)-r(z)|<\varepsilon$ при $z\in F\cup CU$.

Согласно теореме А. Г. Витушкина о равномерной аппроксимации рациональными функциями, для доказательства необходимости условия теоремы 1 достаточно показать, что $\alpha(K\setminus E)=\alpha(K\setminus E^\circ)$ для любого открытого круга K (через $\alpha(K\setminus E)$, $\alpha(K\setminus E^\circ)$ обозначены аналитические C-емкости соответствующих множеств).

Через $C(K, m)$ обозначим класс функций, непрерывных на плоскости, аналитических вне K, равных нулю на бесконечности и ограниченных по модулю числом m.

Перед тем, как перейти к доказательствам теорем, заметим, что их аналоги верны также при более общей постановке задачи. Дана плоская область D $(\partial D\neq\varnothing)$, найти необходимые и достаточные условия на замкнутое относительно D множество $E\subset D$, при которых оно становится множеством равномерной (соответственно, касательной) аппроксимации мероморфными в D функциями. Для этого случая теоремы 1, 2 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1* (2*). *Замкнутое относительно D множество $E\subset D$ является множеством равномерной* (соответственно, в случае $E^\circ=\varnothing$ — касательной) *аппроксимации мероморфными в D функциями, тогда и только тогда, когда $E\cap K$ — множество рациональной аппроксимации при произвольном замкнутом круге $K\subset D$.*

Доказательство проведем для случая $D=C$, ограничиваясь замечаниями об общем случае.

Докажем необходимость условия теоремы 1. Пусть E—множество равномерной аппроксимации мероморфными функциями, K—открытый круг, $\varepsilon>0$—произвольное фиксированное число. По определению аналитической C-емкости в $K\setminus E^\circ$ можно найти замкнутое подмножество F и функцию $f(z)\in C(F, 1)$ такие, что $f'(\infty)>\alpha(K\setminus E^\circ)-\varepsilon$. Ясно, что $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности CK, и, так как она аналитична на E° и непрерывна на E, ее можно равномерно на E приблизить мероморфными функциями. Это значит, что $f(z)$ можно равномерно приблизить рациональными функциями на $E\cap\overline{K}$. Отсюда, принимая во внимание теорему 3, получим существование последовательности $\{f_n(z)\}$ рациональных функций, для которой $f_n(z)\to f(z)$ равномерно на $E\cup CK$. После подходящей модификации этих функций на $K\setminus E$, не нарушая общности можем считать, что $f_n(z)\in C(K\setminus E, 1)$. Тогда $f_n'(\infty)\to f'(\infty)$ и $|f_n'(\infty)|\leqslant\alpha(K\setminus E)$. Отсюда, $\alpha(K\setminus E^\circ)-\varepsilon<f'(\infty)\leqslant\alpha(K\setminus E)$. В силу произвольности ε получаем $\alpha(K\setminus E^\circ)\leqslant\alpha(K\setminus E)$. Обратное неравенство очевидно.

Все приводимые ниже выкладки в доказательстве достаточности верны также и для общего случая, если вместо кругов (с центрами в $z=0$) будем брать множества $D\setminus V_\sigma(\partial D)$ при подходящих $\sigma>0$ ($V_\sigma(\partial D)$— открытая сферическая σ-окрестность ∂D) и заметим, что из теоремы А. Г. Витушкина легко следует эквивалентность условия теоремы 1 требованию, что $E \setminus V_\sigma$ является множеством рациональной аппроксимации.

Пусть дана функция $f(z)$, непрерывная на E, аналитическая на E° и число $\varepsilon>0$. От положительной, непрерывной на $[0, \infty)$, монотонной функции $\alpha(x)$ потребуем, чтобы

$$0<\alpha(x)<\varepsilon \text{ и } \iint\limits_{|\zeta|<\infty} \frac{\alpha\left(|\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{|\zeta-z|}\, d\xi d\eta<\varepsilon \quad (\zeta=\xi+i\eta) \tag{1}$$

для всех z.

При нашем условии на E существует последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ рациональных функций с полюсами вне E, удовлетворяющая следующим неравенствам:

$$|\varphi_1(z)-f(z)|<\alpha\left(2+\frac{1}{2}\right), \quad z\in E\cap\left\{|\zeta|<2+\frac{1}{2}\right\},$$

$$|\varphi_n(z)-f(z)|<\alpha\left(2n+\frac{1}{2}\right), \quad z\in E\cap\left\{2(n-1)-\frac{1}{2}\leqslant|\zeta|\leqslant 2n+\frac{1}{2}\right\}, \tag{*}$$

$$n=2, 3, \cdots.$$

С помощью полученной последовательности определим функцию $\varphi(z, r)$ следующим образом: при фиксированной z, $\varphi(z, r)=\varphi_n(z)$, если $2(n-1)\leqslant r<2n$, $n=1, 2, \cdots$.

Имеем, $|\varphi(z, r)-f(z)|<\alpha(r)$ при $r-\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant r+\frac{1}{2}$.

По определению, функция $\varphi(z, r)$ является кусочно-постоянной по r при фиксированном z, и любая точка z попадает самое большее в два не совпадающих кольца, на пересечении которых с E выполняется (*).

Для каждой точки $z\in E$ существует открытый круг с центром в z и радиуса $\delta(z)>0$, такой, что колебание в этом круге функций $\varphi(z, r)$, приближающих $f(z)$ в этой точке, не превышают $\alpha\left(r'-\frac{1}{2}\right)$, где r' — наибольший радиус колец, соответствующих этим функциям. Совокупность точек этих кругов является открытым покрытием замкнутого множества E. Из этого покрытия можем выделить такое счетное покрытие, чтобы любой круг пересекал лишь конечное число кругов нашего покрытия. Объединение E^* точек кругов этого покрытия содержит замкнутое множество E.

Граница ∂E^* множества E^* состоит из счетного числа жордановых кривых, образованных дугами окружностей, причем так, что любой круг пересекает конечное число граничных кривых. Пусть $\{\gamma_k\}$, $k=1, 2, \cdots$ — последовательность граничных кривых множества E^*.

Определим на E функцию

$$\varphi(z) = \int\limits_{|z|-\frac{1}{2}}^{|z|+\frac{1}{2}} \varphi(z, t)\, dt.$$

При $z \in E$ имеем $|f(z) - \varphi(z)| < \varepsilon$.

Последовательность функций $\{Q_n(z)\}$ определим следующим образом:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_k \cap (C_l \setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где $C_l = (|z| \leqslant l)$, $C_0 = \varnothing$, $L_n = E^* \cap (|z| = n)$.

По этой последовательности определим функции

$$R_n(z) = \sum_{l=1}^{n} r_l(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad n=1, 2, \cdots,$$

где $r_l(z)$ — рациональная функция с полюсами вне $E \cup C_{l-1}$ такая, что

$$\left| r_l(z) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_k \cap (C_l \setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{2^l}, \tag{2}$$

$$z \in E \cup C_{l-2}, \quad C_0 = C_{-1} = \varnothing, \quad l=1, 2, \cdots.$$

Функции $r_l(z)$ находим, заменяя интегралы по конечному числу дуг подходящими интегральными суммами.

Докажем, что последовательность функций $\{R_n(z)\}$ равномерно сходится на любом круге S. Для этого рассмотрим разность

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{n+m}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где n такое, что $\overline{S} \subset (|z| < n - 2)$, $m > 0$ — целое число.

Заметим, что если $L_r = E^* \cap (|\zeta| = r)$ и $\psi(\zeta)$ аналитична на $\overline{E}^*$, то по теореме Коши

$$d_r \int\limits_{L_r} \psi(\zeta)\, d\zeta = \sum_{(r)} \psi(\zeta)\, d\zeta.$$

Суммирование в правой части этого равенства распространяется на точки пересечения $\{|z| = r\}$ с ∂E^*. Через $d\zeta$ обозначен дифференциал дуги вдоль ∂E^*, соответствующий отрицательному обходу множества E^*.

В силу этого, при $z \in S$, $r > n$

$$d_r \int\limits_{L_r}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = d_r \int\limits_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} dt \int\limits_{L_r}\frac{\varphi(\zeta, t)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$=\left\{\int\limits_{L_r}\frac{\varphi(\zeta,t)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}_{t=r-\frac{1}{2}}^{t=r+\frac{1}{2}}dr+\int\limits_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}}d_r\left\{\int\limits_{L_r}\frac{\varphi(\zeta,t)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dt=$$

$$=\left\{\int\limits_{L_r}\frac{\varphi\left(\zeta,r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta,r-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dr+\int\limits_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}}\left\{\sum_{(r)}\frac{\varphi(\zeta,t)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dt=$$

$$=\left\{\int\limits_{L_r}\frac{\varphi\left(\zeta,r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta,r-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dr+\sum_{(r)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Интегрируя это равенство в пределах $n\leqslant t\leqslant n+m$ получаем

$$\int\limits_{L_{n+m}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int\limits_{n}^{n+m}dr\int\limits_{L_r}\frac{\varphi\left(\zeta,r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta,r-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\,d\zeta-$$

$$-\sum_{l=n+1}^{n+m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_k\cap(C_l\setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right)= \tag{3}$$

$$=\iint\limits_{E^*\cap(C_{n+m}\setminus C_n)}\frac{\varphi\left(\zeta,r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta,r-\frac{1}{2}\right)^{l}}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{|d\zeta|}\,d\xi d\eta-$$

$$-\sum_{l=n+1}^{n+m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_k\cap(C_l\setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right).$$

В равенстве (3) интегралы под знаками суммы взяты по положительному обходу множества E^*.

Согласно (2), (3) и выбору числа n для S, имеем

$$|R_{n+m}(z)-R_n(z)|=\left|\sum_{l=n+1}^{n+m}r_l(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{n+m}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|=$$

$$=\left|\sum_{l=n+1}^{n+m}r_l(z)-\sum_{l=n+1}^{n+m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k\cap(C_l\setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)+\right.$$

$$+\sum_{l=n+1}^{n+m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k\cap(C_l\setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{n+m}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant\varepsilon\sum_{l=n+1}^{n+m}\frac{1}{2^l}+$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{E^*\cap(C_{n+m}\setminus C_n)}\frac{\varphi\left(\zeta, r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta, r-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{|d\zeta|}d\xi d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{l=n+1}^{n+m}\frac{1}{2^l}+\frac{2}{\pi}\iint\limits_{C_{n+m}\setminus C_n}\frac{\alpha\left(|\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{|\zeta-z|}d\xi d\eta.$$

Согласно (1) правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой за счет увеличения n.

Таким образом, доказано, что ряд $R_1(z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}(z)-R_n(z))$ сходится равномерно на любом конечном круге, если отбросить конечное число начальных слагаемых. Так как особенностями последних могут быть лишь конечное число полюсов, то $\mu(z)=R_1(z)+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}(z)-R_n(z))$ является мероморфной функцией.

Пусть $z\in E$ — фиксировано и $\rho>0$ такое, что $(|\zeta-z|\leqslant\rho)\subset E^*$.

Аналогично тому, как мы доказывали равенство (6), применяя соответствующие выкладки к множеству $E^*\setminus(|\zeta-z|<\rho)$, получим

$$Q_n(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{(E^*\cap C_n)\setminus(|\zeta-z|<\rho)}\frac{\varphi\left(\zeta, |\zeta|+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta, |\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{|d\zeta|}d\xi d\eta. \tag{4}$$

Пусть число $N>0$ такое, что для точки $z\in E$ имеет место неравенство $\left|\sum\limits_{n=N}^{\infty}(R_{n+1}(z)-R_n(z))\right|<\varepsilon$.

Согласно (1), (2), (4) и конструкции множества E^*, при ρ достаточно малом, имеем

$$|\mu(z)-\varphi(z)|<\left|\sum_{n=N}^{\infty}(R_{n+1}(z)-R_n(z))\right|+|R_N(z)-\varphi(z)|<$$

$$<\varepsilon+|R_N(z)-\varphi(z)|<\varepsilon+\left(1-\frac{1}{2^N}\right)\varepsilon+$$

$$+|Q_N(z)-\varphi(z)|<2\varepsilon+\left|Q_N(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant 2\varepsilon+$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(E^{\circ}\cap C_N)\setminus(|\zeta-z|<\rho)}\frac{\varphi\left(\zeta,|\zeta|+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta,|\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{|d\zeta|}\,d\xi\,d\eta\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant 2\varepsilon+\frac{2}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<\infty}\frac{\alpha\left(|\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{|\zeta-z|}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\max_{\zeta,\,|\zeta-z|=\rho}|\varphi(\zeta)-\varphi(z)|<4\varepsilon.$$

Отсюда, принимая во внимание то, что $\varphi(z)$ приближает $f(z)$ на E с точностью ε, получаем $|\mu(z)-f(z)|<5\varepsilon$. Теорема доказана.

Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается следующее обобщение теоремы Рунге:

Если функция $f(z)$ аналитична на замкнутом множестве E, то для любого $\varepsilon>0$ можно найти мероморфную на плоскости функцию $\mu(z)$ такую, что $|f(z)-\mu(z)|<\varepsilon$ при $z\in E$.

Пусть теперь $E^{\circ}=\varnothing$, $f(z)$—непрерывная на E функция и $\varepsilon(x)>0$—произвольная непрерывная на $[0,\infty)$ функция, стремящаяся к нулю при $x\to\infty$. Не нарушая общности можем считать, что $\varepsilon(x)\leqslant 1$. Тогда по теореме 1 существует мероморфная функция $\mu(z)$ такая, что $\left|\frac{2}{\varepsilon(|z|)}-\mu(z)\right|<1$ при $z\in E$. Имеем для $\mu(z)$

$$|\mu(z)|>\frac{2}{\varepsilon(|z|)}-1=\frac{2-\varepsilon(|z|)}{\varepsilon(|z|)}\geqslant\frac{1}{\varepsilon(|z|)},$$

следовательно, для $z\in E$, $\frac{1}{|\mu(z)|}<\varepsilon(|z|)$. Применив теорему 1 к функции $f(z)\,\mu(z)$, получим, что существует функция $\nu(z)$ такая, что $|f(z)\,\mu(z)-\nu(z)|<1$ при $z\in E$. Отсюда, $\left|f(z)-\frac{\nu(z)}{\mu(z)}\right|<\frac{1}{|\mu(z)|}<\varepsilon(|z|)$.

Теорема 2 доказана.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность доктору физ.-мат. наук Н. У. Аракеляну за помощь, оказанную во время выполнения этой работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 30.X.1972

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաներով ճավասարաչափ և շոշափումային մոտարկման մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ապացուցված է, որ կոմպլեքս հարթության մեջ $D\,(\partial D\neq\varnothing)$ տիրույթի նկատմամբ փակ $E\subset D$ ենթաբազմությունը D-ում մերոմորֆ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկման բազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած փակ $K\subset D$ շրջանի համար $E\cap K$ բազմությունը հանդիսանում է ռացիոնալ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկման բազմություն։

Ցույց է տրված նաև, որ նույն պայմանն անհրաժեշտ ու բավարար է, որպեսզի ներքին կետեր չունեցող D-ում փակ բազմությունը հանդիսանա D-ում մերոմորֆ ֆունկցիաներով շոշափումային մոտարկման բազմություն։

A. H. NERSESIAN. *On the uniform and tangential approximation by meromorphic functions* (summary)

It is proved that a relatively closed subset of a domain D $(\partial D \neq \varnothing)$ on the complex plane is a set of uniform approximation by functions meromorphic in D if and only if its intersection with any closed circle $K \subset D$ is a set of uniform approximation by rational functions.

It is proved also that the same condition is necessary and sufficient for a relatively closed subset of D without interior to be a set of tangential approximation by functions meromorphic in D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Витушкин.* Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, УМН, XXII, вып. 6, 1967, 141—199.
2. *L. Zalcman.* Analytic capacity and rational approximation, Berlin—Heidelberg—New York, Spriger Verlag, 1968.
3. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.