ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 5, 1972 Математика

Б. С. РУБИН

О ПРОСТРАНСТВАХ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОМ КОНТУРЕ

Пусть $\Omega=(a, b)$ — конечный, бесконечный или полубесконечный интервал на вещественной оси. В настоящей работе будут рассматриваться пространства функций, заданных на Ω, представимых интегралами дробного порядка

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\ x>a;\ (I_{-b}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\ x<b$$

с плотностями из пространств $L_p(\Omega)$ и $L_p(\Omega, \rho)$, $1<p<\infty$, $0<\alpha<1$, $\rho(x)$ — весовая функция вида

$$\rho(x)=\begin{cases}(1+|x|)^{\gamma},\ \alpha p-1<\gamma<p-\max(\alpha p, 1),\ \Omega=(-\infty, \infty);\\ |x-a|^{\alpha_a}(1+|x|)^{\gamma},\ \alpha p-1<\alpha_a<p-1,\ \alpha p-1<\alpha_a+\gamma<p-\max(\alpha p, 1),\\ \qquad\qquad \Omega=(a, \infty)\ \text{или}\ \Omega=(-\infty, a);\\ (x-a)^{\alpha_a}(b-x)^{\alpha_b},\ -1<\alpha_a, \alpha_b<p-1,\ \Omega=(a, b).\end{cases}\tag{1}$$

Необходимость изучения таких пространств связана с задачей о нетеровости оператора типа потенциала

$$(K\varphi)(x)=\int\limits_{\Omega}\frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt,$$

действие которого из $L_p(\Omega)$ ($L_p(\Omega, \rho)$) естественно рассматривать в пространство дробных интегралов специальным образом нормированное.

Как известно, интегродифференциальные операторы дробного порядка в пространстве L_p были изучены Г. Харди и Дж. Литтльвудом [1]. Ряд свойств этих операторов в пространстве $L(a, b)$ изложен М. М. Джрбашяном в его монографии [2] в связи с исследованием мероморфных функций. С. Г. Самко в статье [3] были изучены необходимые и достаточные условия представимости функции интегралом дробного порядка с плотностью из $L_p(-\infty, \infty)$. В § 1 мы обобщаем этот результат для случая весовых пространств на конечном, бесконечном или полубесконечном интервале. Необходимость введения весовых пространств вызвана тем, что решения интегральных уравнений со степенными ядрами имеют на концах промежутка интегрирования особенности как правило более высокого порядка, чем во внутренних его точках. В § 2 исследуются ранее еще никем не изучавшиеся свойства типа „склеивания“ дробных интегралов с плотностями из $L_p(\Omega)$, $1<p<\frac{1}{\alpha}$. Применение результатов этого параграфа позволяет в § 3 дать новое описание пространства дробных интегралов на вещественной оси с плотностями из $L_p(-\infty, \infty)$, $1<p<\frac{1}{\alpha}$. В § 4 дается приложение некоторых результатов, полученных в §§ 1—3, для решения задачи о нетеровости оператора типа потенциала в весовом пространстве на конечном отрезке. Часть излагаемых в настоящей работе результатов докладывалась на III республиканской конференции математиков Белоруссии [9].

§ 1. Описание пространств дробных интегралов

Всюду в дальнейшем, если возникнет необходимость продолжить рассматриваемые функции за пределы промежутка Ω, будем считать $f(x)=0$, когда $x\overline{\in}\Omega$.

1°. Пусть $[a, b]$—конечный отрезок вещественной оси.

Теорема 1.1. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x)=(I^\alpha_{a+}\varphi)(x)$, $\varphi(x)\in L_p(a, b)$, $1<p<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ принадлежала $L_p(a, b)$ и чтобы в $L_p(a, b)$ существовал предел*

$$G(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p(a,b)}}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt.$$

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha}+G(x)$.

Доказательство. Необходимость первого условия очевидна. Необходимость второго вытекает, в силу теоремы II [I], из легко устанавливаемого соотношения

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^{\frac{x-a}{\varepsilon}}l(s)\left[\varphi(x-\varepsilon s)-\varphi(x)\right]ds+$$

$$+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\varphi(x)\int\limits_0^{\frac{x-a}{\varepsilon}}l(s)\,ds-\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha},\qquad(2)$$

где $l(s)=s^{\alpha-1}-\dfrac{(s-1)^\alpha}{2s}\left[1-\operatorname{sign}(1-s)\right]$.

Докажем достаточность. Учитывая, что $f(x)=0$ при $x<a$, нетрудно показать, что функции

$$\varphi_\varepsilon(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt$$

принадлежат пространству $L_p(a, b)$ и образуют в нем фундаментальную последовательность. Отсюда получаем $I^\alpha_{a+} \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p(a,b)}} \varphi_\varepsilon = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p(a,b)}} I^\alpha_{a+} \varphi_\varepsilon$.

Этот предел почти всюду совпадает с функцией f, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы 10 [1] как следствие вытекает

Теорема 1.2. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I^\alpha_{a+} \varphi)(x)$, где $\varphi(x) \in L_p([a, b], \rho)$, $\rho(x) = (x-a)^{\alpha_a}_{\cdot}(b-x)^{\alpha_b}$; $-1 < \alpha_a, \alpha_b < p-1$; $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p([a, b], \rho)$;

2) *в $L_p([a, b], \rho)$ существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_{1+\delta}(a,b)}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt,$$

где $\delta > 0$ сколь угодно мало.

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + G(x)$.

Утверждения теорем 1.1, 1.2 с очевидными изменениями имеют место для интеграла I^α_{-b}.

2°. Рассмотрим случай, когда $\Omega = (a, \infty)$, $-\infty < a < \infty$. Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(x) \in L_p([-\infty, \infty], \rho)$, $\rho(x) = (1+|x|)^\gamma$, $1<p<\infty$, $\alpha p - 1 < \gamma < p - \max(\alpha p, 1)$, $l(s) = s^{\alpha-1} - \dfrac{(s-1)^\alpha}{2s}[1 - \operatorname{sign}(1-s)]$.

Тогда

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p([-\infty,\infty],\rho)}} \int\limits_0^\infty [\varphi(x-\varepsilon s) - \varphi(x)]\, l(s)\, ds = 0.$$

Получим теперь теоремы, дающие описание образов оператора I^α_{a+} в весовых пространствах на полуоси.

Теорема 1.3. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I^\alpha_{a+} \varphi)(x)$, где $\varphi(x) \in L_p(\Omega, \rho)$, $\rho(x) = (1+|x|)^\gamma$, $1 < p < \infty$, $\alpha p - 1 < \gamma < p - \max(\alpha p, 1)$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $f(x) \in L_p(\Omega, (1+|x|)^{\gamma-\alpha p})$;

2) *в $L_p(\Omega, \rho)$ существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p(\Omega,\rho)}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt.$$

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}+G(x)$.

Доказательство. Необходимость. Соотношение 1) легко выводится из теоремы 10 [1]. Выполнение условия 2) вытекает, на основании леммы 1, из равенства (2), так как в силу теоремы 10 [1] $f(x)(x-a)^{-\alpha}\in L_p(\Omega,\rho)$.

Достаточность. Пусть

$$\psi_\varepsilon(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt \text{ и } a<N<\infty.$$

Обозначим через $f_N(x)$ сужение на $[a, N]$ функции $f(x)$. Имеем

$$\psi_{\varepsilon N}(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^{x-\varepsilon}\frac{f_N(x)-f_N(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt\to G_N(x)\ (\in L_p(a,N)) \text{ в } L_p(a,N).$$

Следовательно, по теореме 1.1, $f_N(x)=(I^{\alpha}_{a+}\varphi_N)(x)$, где

$$\varphi_N(x)=G_N(x)+\frac{f_N(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}\in L_p(a,N).$$

Далее пусть

$$\varphi(x)=G(x)+\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}};\ (P_N\varphi)(x)=\begin{cases}\varphi_N(x), & x\leqslant N;\\ 0, & x>N.\end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi(x)\in L_p(\Omega,\rho)$. Действительно, $G(x)\in L_p(\Omega,\rho)$ по условию, а для второго слагаемого выполняются соотношения

$$\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}\in L_p(a,N);\quad \int_N^{\infty}\frac{|f(x)|^p(1+|x|)^{\gamma}\,dx}{(x-a)^{\alpha p}}\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\int_N^{\infty}|f(x)|^p(1+|x|)^{\gamma-\alpha p}\,dx<\infty.$$

Покажем, что $(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)=f(x)$. Имеем

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi=I^{\alpha}_{a+}\lim_{\substack{N\to\infty\\ L_p(\Omega,\rho)}}P_N\varphi=\lim_{\substack{N\to\infty\\ L_p(\Omega,(1+|x|)^{\gamma-\alpha p})}}I^{\alpha}_{a+}P_N\varphi=f,$$

так как

$$\left\{\int_a^{\infty}|f(x)-(I^{\alpha}_{a+}P_N\varphi)(x)|^p(1+|x|)^{\gamma-\alpha p}\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left\{\int_N^{\infty}|f(x)-(I^{\alpha}_{a+}P_N\varphi)(x)|^p(1+|x|)^{\gamma-\alpha p}\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\to 0,$$

когда $N\to\infty$. Теорема доказана.

Следующая теорема обобщает результат теоремы 1.3 для пространства $L_p(\Omega, (x-a)^{\alpha_a}(1+|x|)^{\gamma})$ с весом более общего вида. Заметим, что оно вложено в $L_r(\Omega, (1+|x|)^{\mu})$, где

$$1 < r < \min\left(\frac{p}{1+\alpha_a}, p\right), \quad -1 < \mu < \frac{r(\alpha_a+\gamma+1)}{p} - 1.$$

Теорема 1.4. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде*

$$f(x) = (I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x), \quad \varphi(x) \in L_p(\Omega, \rho), \quad \rho(x) = (x-a)^{\alpha_a}(1+|x|)^{\gamma},$$

$$1 < p < \infty, \quad \alpha p - 1 < \alpha_a < p-1, \quad \alpha p - 1 < \alpha_a + \gamma < p - \max(\alpha p, 1),$$

необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) $f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p(\Omega, \rho)$;

2) в $L_p(\Omega, \rho)$ *существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_r(\Omega, (1+|x|)^{\mu})}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt.$$

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = G(x) + \dfrac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}$.

Эта теорема легко выводится из предыдущей, если учесть, что

$$L_p(\Omega, (x-a)^{\alpha_a-\alpha p}(1+|x|)^{\gamma}) \subset L_r(\Omega, (1+|x|)^{\mu-\alpha r}).$$

Для случая $\Omega = (-\infty, a)$ условия представимости функции дробным интегралом I^{α}_{-a} формулируются аналогично.

3°. Пусть, наконец, Ω совпадает со всей вещественной осью. Следующее утверждение является непосредственным обобщением теоремы 2 из [3] об описании образов потенциалов, действующих из $L_p(-\infty, \infty)$, на случай, когда на бесконечности допускаются весовые особенности.

Теорема 1.5. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде*

$$f(x) = (I^{\alpha}_{+}\varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \varphi(x) \in L_p(\Omega, \rho),$$

$\rho(x) = (1+|x|)^{\gamma}$, $1 < p < \infty$, $\alpha p - 1 < \gamma < p - \max(\alpha p, 1)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) $f(x) \in L_q(\Omega, (1+|x|)^{\beta})$, *где* $q = \dfrac{p}{1-\alpha p}$, $\beta = \dfrac{\gamma}{1-\alpha p}$,

если $\alpha p < 1$ *и* $q > \max\left(p, \dfrac{1}{1-\alpha}\right)$, $\beta > \max\left(\gamma - \alpha p, \dfrac{1+\gamma-p}{p(1-\alpha)}\right)$,

если $\alpha p \geqslant 1$;

2) $\|f(x+\delta)-f(x)\|_{L_p(\Omega,\rho)} = o(\delta^\alpha)$, *когда* $\delta \to 0$;

3) *в* $L_p(\Omega, \rho)$ *существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_p(\Omega, \rho)}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt$$

(*сходимость интеграла на бесконечности понимается в абсолютном смысле*).

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = G(x)$.

Необходимость условия 1) легко получается из теоремы 7 [1]. Необходимость условий 2), 3) доказана в статье [4]. Доказательство достаточности проводится по той же схеме, что и в теореме 2 [3].

§ 2. О „склеивании" пространств дробных интегралов

Обозначим через $I^\alpha_{a+}(L_p)$, $I^\alpha_{-b}(L_p)$ области значений дробных интегралов с плотностями из $L_p(a, b)$. Известно (см., например, [3], 5]), что при $1 < p < \dfrac{1}{\alpha}$ эти области совпадают:

$$I^\alpha_{a+}(L_p) = I^\alpha_{-b}(L_p) \overset{\text{def}}{=} I^\alpha(L_p(a, b))$$

и пространство $I^\alpha(L_p(a, b))$ является банаховым относительно эквивалентных между собой норм

$$\|f\|_1 = \|D^\alpha_{a+} f\|_{L_p}, \quad \|f\|_2 = \|D^\alpha_{-b} f\|_{L_p}.$$

Через D^α_{a+}, D^α_{-b} здесь обозначены операторы дробного дифференцирования, заданные на функциях из $I^\alpha(L_p(a, b))$. В случае, когда $a = -\infty$, $b = \infty$, будем писать просто $I^\alpha_+(L_p)$, $I^\alpha_-(L_p)$, $I^\alpha(L_p)$.

Теорема 2.1. *Пусть* Ω — *конечный или полубесконечный интервал на вещественной оси. Тогда пространство сужений на* Ω *функций из* $I^\alpha(L_p)$ $\left(1 < p < \dfrac{1}{\alpha}\right)$ *совпадает с* $I^\alpha(L_p(\Omega))$.

Доказательство. Пусть $\Omega = [a, b]$, где $-\infty < a < b \leqslant \infty$, и $f(x) = (I^\alpha_+ \varphi)(x)$, $\varphi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi (x-a)^\alpha} \int_{-\infty}^{a} \frac{(a-t)^\alpha \varphi(t)}{x-t}\, dt.$$

В силу инвариантности пространства L_p относительно сдвига и теоремы К. И. Бабенко [8], $\psi(x) \in L_p(\Omega)$. Кроме того, $(I^\alpha_{a+}\psi)(x) = f(x)$, когда $x \in \Omega$. Действительно

$$(I^\alpha_{a+}\psi)(x) = (I^\alpha_{a+}\varphi)(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{a} (a-\tau)^\alpha \varphi(\tau)\, d\tau \times$$

$$\times \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{-\alpha}}{t-\tau}\,dt = (I_+^\alpha \varphi)(x) = f(x).$$

Обратно, пусть $f(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi)(x)$, $\varphi \in L_p(\Omega)$. Тогда f можно рассматривать как сужение на Ω функции $\tilde f(x) = (I_+^\alpha \tilde\varphi)(x)$, где $\tilde\varphi(x) = \varphi(x)$, если $x \in \Omega$ и $\tilde\varphi(x) = 0$, если $x \overline{\in} \Omega$. Для левой полуоси доказательство проводится аналогично, но уже с использованием операторов I_-^α, I_{-b}^α.

Теорема 2.2. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, была представима в виде $f(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi)(x)$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $(P_{ab}f)(x) = \{f(x),\ x \in [a, b];\ 0,\ x \overline{\in} [a, b]\}$ имела вид: $(P_{ab}f)(x) = (I_+^\alpha \varphi_1)(x)$, $\varphi_1 \in L_p(-\infty, \infty)$. Если это условие выполняется, то при $x \in [a, b]$ $\varphi(x) = \varphi_1(x)$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функцию $\varphi_1(x)$, заданную на вещественной оси следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \varphi(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ -\dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1+\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} g(x), & x > b, \end{cases}$$

$g(x) \in L_p(b, \infty)$. Действительно

$$g(x) = -\frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int_a^b \varphi(\tau)\,d\tau \int_\tau^b \frac{dt}{(x-t)^{1+\alpha}(t-\tau)^{1-\alpha}} =$$

$$= -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi (x-b)^\alpha} \int_a^b \frac{(b-\tau)^\alpha \varphi(\tau)}{x-\tau}\,d\tau \in L_p(b, \infty).$$

Отсюда следует, что $\varphi_1(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ и утверждение теоремы вытекает из легко проверяемого соотношения

$$(I_{b+}^\alpha g)(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}.$$

Достаточность. Пусть $(P_{ab}f)(x) = (I_+^\alpha \varphi_1)(x)$. Тогда на основании теоремы 2 из [3]

$$\varphi_1(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{(P_{ab}f)(x) - (P_{ab}f)(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt = 0 \quad \text{при } x < a.$$

Следовательно, для $x \in [a, b]$ имеем: $f(x) = (I_+^\alpha \varphi_1)(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi_1)(x)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что из теорем 2.1, 2.2 и теоремы К. И. Бабенко [8] вытекает ограниченность оператора „урезания" $(P_\Omega f)(x) \overset{\text{def}}{=} \{f(x),\ x \in \Omega;\ 0,\ x \overline{\in} \Omega\}$ в пространстве $I^\alpha(L_p)$.

Сформулируем теперь основную теорему этого параграфа о „склеивании" функций, представимых дробными интегралами.

Теорема 2.3. *Пусть* $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, $\Omega_i \bigcap_{i \neq j} \Omega_j = \varnothing$, $f_i(x) \in I^\alpha(L_p(\Omega_i))$. *Тогда функция* $f(x)$, *заданная на* Ω *следующим образом:* $f(x) = f_i(x)$, $x \in \Omega_i$, *принадлежит* $I^\alpha(L_p(\Omega))$.

Справедливость этой теоремы легко устанавливается на основании теорем 2.1 и 2.2.

§ 3. К вопросу об описании пространства $I^\alpha(L_p)$

В настоящем параграфе мы коснемся проблемы описания пространства $I^\alpha(L_p)$. Известна [3] следующая

Теорема 3.1. Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I_+^\alpha \varphi)(x)$, $\varphi \in L_p$, $1 < p < \dfrac{1}{\alpha}$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) $f(x) \in L_p((1+|x|)^{-\alpha p})$; 2) $\omega_p(f, \delta) = \|f(x+\delta) - f(x)\|_{L_p} = o(\delta^\alpha)$ при $\delta \to 0$;

3) $$D_+^\alpha f \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt \in L_p.$$

В этой теореме под производной $D_+^\alpha f$ подразумевается предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_p}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt, \tag{3}$$

причем сходимость на бесконечности понимается в абсолютном смысле. Как показано в § 1, в описании пространств дробных интегралов на отрезке и полуоси оценка интегрального модуля непрерывности функции f отсутствует. Возникает вопрос: нельзя ли избавиться от этого условия и в случае всей вещественной оси? Необходимость решения этого вопроса вытекает как из чисто теоретических соображений, так и из того факта, что в конкретных ситуациях оценка интегрального модуля непрерывности вызывает большие технические трудности. Вопрос о том, можно ли в выше приведенной теореме ограничиться условиями 1), 3), пока что остается открытым. Однако на основании результатов, полученных в §§ 1, 2, ясно, что оценки модуля непрерывности можно избежать, для чего необходимо убедиться в том, что сужения функции f на положительную и отрицательную полуоси принадлежат соответственно пространствам $I^{\alpha}_{0+}(L_p)$ и $I^{\alpha}_{-0}(L_p)$. Заметим еще, что в теореме 3.1 можно избавиться от второго условия, если под производной $D^{\alpha}_{+} f$ понимать предел

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ L_p}} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ L_p}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f_N(x)-f_N(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt, \text{ где } f_N(x) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant -N, \\ 0, & x < -N. \end{cases} \tag{4}$$

Для доказательства этого факта получим сначала один вспомогательный результат.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Рассмотрим какую-нибудь числовую последовательность $\{a_n\}$, сходящуюся к a. Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)$, $\varphi \in L_p(a, b)$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $$f(x) \in \begin{cases} L_p(a, b), & \text{\textit{если} } [a, b] \text{ — \textit{конечный промежуток},} \\ L_p([a, b], \rho),\ \rho(x) = (1+|x|)^{-\alpha p}, & \text{\textit{если} } [a, b] \text{ — \textit{бесконечный промежуток},} \end{cases}$$

2) *сужение $f_n(x)$ функции $f(x)$ на $[a_n, b]$ представимо в виде $f_n(x) = (I^{\alpha}_{a_n+}\varphi_n)(x)$, где $\varphi_n(x) \in L_p(a_n, b)$;*

3) *в $L_p(a, b)$ существует предел $G(x) = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ L_p}} (P_{a_n b}\varphi_n)(x)$. Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = G(x)$.*

Доказательство. Необходимость условия 1) доказана в теоремах первого параграфа. Необходимость второго условия получается на основании теоремы 2.2, причем $\varphi_n(x)$ имеет вид

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi(x-a_n)^{\alpha}} \int\limits_a^{a_n} \frac{(a_n-t)^{\alpha}\varphi(t)}{x-t}\,dt.$$

Легко видеть, что $(P_{a_n b}\varphi_n)(x) \to \varphi(x)$ в $L_p(a, b)$ при $n \to \infty$.

Действительно

$$\|P_{a_n b}\varphi_n - \varphi\| \leqslant \mathrm{const} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{|x-a_n|^{\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_n-t|^{\alpha}(P_{aa_n}\varphi)(t)}{x-t}\,dt \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, \|P_{aa_n}\varphi\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Достаточность условий 1)—3) вытекает из соотношений

$$f = \lim_{\substack{n\to\infty \\ L_p(L_p(\rho))}} f_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ L_p(L_p(\rho))}} (\overline{I^{\alpha}_{a_n+}\varphi_n}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ L_p(L_p(\rho))}} I^{\alpha}_{a+}\overline{\varphi}_n = I^{\alpha}_{a+} \lim_{\substack{n\to\infty \\ L_p}} \overline{\varphi}_n = I^{\alpha}_{a+}\varphi,$$

где через $\overline{f}_n$ обозначена функция, определяемая равенствами:

$$\overline{f}_n(x) = f(x), \text{ если } x \in [a_n, b] \text{ и } \overline{f}_n(x) = 0, \text{ если } a \leqslant x < a_n.$$

Непосредственно из теоремы 3.2 вытекает основная в этом параграфе

Теорема 3.3. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на вещественной оси, была представима в виде $f = I^{\alpha}_{+}\varphi$, $\varphi \in L_p$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, необходимо и достаточно выполнения условий*

1) $f(x) \in L_p((1+|x|)^{-\alpha p})$;

2) *в L_p существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ L_p}} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ L_p}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f_N(x) - f_N(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt.$$

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = G(x)$.

Доказательство очевидно.

§ 4. Операторы типа потенциала на отрезке вещественной оси

В качестве приложения некоторых результатов, полученных в предыдущих параграфах, приведем решение задачи о нетеровости оператора типа потенциала в весовом пространстве на отрезке вещественной оси.

Рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{c(x, y)}{|x-y|^{1-\alpha}} \varphi(y)\, dy, \quad x \in [a, b], \tag{5}$$

где $0 < \alpha < 1$, функция $c(x, y)$ ограничена и на диагонали допускает разрыв первого рода: $c(x, y) = \{u(x, y),\ x > y;\ v(x, y),\ x < y\}$.

Аналогично тому, как это делалось в § 2, введем банахово пространство $I^{\alpha}(L_p([a, b], \rho))$ дробных интегралов порядка α с плотностями из $L_p([a, b], \rho)$.

Получим необходимые и достаточные условия нетеровости оператора (5) из $L_p([a, b], \rho)$ в $I^{\alpha}(L_p([a, b], \rho))$. Вводя обозначения $u(x) = u(x, x-0)$, $v(x) = v(x, x+0)$, оператор K можно представить в виде суммы: $K = K_0 + T_1 + T_2$, где $(K_0\varphi)(x) = (I^{\alpha}_{a+} u\varphi),(x) + (I^{\alpha}_{-b} v\varphi)(x)$,

$$(T_1\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(x, y) - u(y, y)}{(x-y)^{1-\alpha}} \varphi(y)\, dy;$$

$$(T_2\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{v(x, y) - v(y, y)}{(y-x)^{1-\alpha}} \varphi(y)\, dy. \tag{6}$$

Преобразуя оператор K_0 с помощью тождества (15) ([5], стр. 303), получаем

$$K_0\,\varphi = I^\alpha_{-b}\, r_b^{-1}\, N r_b\, \varphi, \tag{7}$$

где $r_b(x) = (b-x)^\alpha$, $N\psi = a_1\psi + Sa_2\psi$, $a_1(x) = u(x)\cos\alpha\pi + v(x)$,

$$a_2(x) = -u(x)\sin\alpha\pi,\ (S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varphi(y)\,dy}{y-x}.$$

Так как I^α_{-b} есть гомеоморфизм пространства $L_p([a, b], \rho)$ на $I^\alpha(L_p([a, b], \rho))$, то, как видно из (7), нетеровость оператора K_0 из $L_p([a, b], \rho)$ в $I^\alpha(L_p([a, b], \rho))$ эквивалентна нетеровости сингулярного оператора N в $L_p([a, b], \rho_1)$, где $\rho_1(x) = (x-a)^{\alpha_a}(b-x)^{\alpha_b - \alpha p}$ и индексы этих операторов равны.

Перейдем к исследованию операторов T_1, T_2. В целях удобства дальнейших рассуждений сформулируем результат теоремы 1.2 в других терминах. Справедлива следующая

Теорема 1.2′. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I^\alpha_{a+}\varphi)(x)$, где $\varphi(x) \in L_p([a, b], \rho)$, $\rho(x) = (x-a)^{\alpha_a}(b-x)^{\alpha_b}$, $-1 < \alpha_a, \alpha_b < p-1$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) *$f(x) \in L_{1+\delta}(a, b)$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало;*

2) *в $L_p([a, b], \rho)$ существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_{1+\delta}(a, b)}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt$$

(при $x < a$ полагается $f(x) = 0$). Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = G(x)$.

Утверждение теоремы 1.2′ с очевидными изменениями имеет место и для оператора I^α_{-b}.

Лемма 2. *Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ по переменной x удовлетворяют на $[a, b]$ условию Гельдера порядка $\Lambda > \alpha$ равномерно по y. Тогда операторы T_1, T_2 вполне непрерывны из $L_p([a, b], \rho)$ в $I^\alpha(L_p([a, b], \rho))$.*

Доказательство. Рассмотрим первый оператор. Нам достаточно установить справедливость следующих фактов:

1°. $(T_1\varphi)(x)\in I^{\alpha}_{a+}(L_p([a,\ b],\ \rho))$;

2°. Оператор $D^{\alpha}_{a+}\ T_1$ вполне непрерывен в $L_p\ [a,\ b],\ \rho)$. Для доказательства первого утверждения воспользуемся теоремой 1.2′. Выполнение первого ее условия очевидно.

Далее, пусть

$$f(x)=(T_1\varphi)(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{u(x,y)-u(y,y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy$$

(при $x<a$ полагается $\varphi(x)=0$). Путем несложных выкладок можно убедиться в справедливости равенства

$$\psi_\varepsilon(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{1+\alpha}}\,dy=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}\varphi(s)\,ds\ \times$$

$$\times\int\limits_{s}^{x-\varepsilon}\frac{u(x,s)-u(y,s)}{(y-s)^{1-\alpha}(x-y)^{1+\alpha}}\,dy\ +$$

$$+\int\limits_{-1}^{\infty}k(s)\,ds\int\limits_{\varepsilon(1+s)}^{\infty}[u(x,x-y)-u(x-y,x-y)]\,\varphi(x-y)\frac{dy}{y},$$

где $\quad k(s)=(s+1)^{\alpha-1}-\dfrac{1}{2}\,s^{\alpha-1}(1+\operatorname{sign}s)$.

Так как

$$\psi(x)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(s)\,ds\int\limits_{s}^{x}\frac{u(x,s)-u(y,s)}{(y-s)^{1-\alpha}(x-y)^{1+\alpha}}\,dy\in L_p([a,\ b],\ \rho)$$

и $\|\psi-\psi_\varepsilon\|_{L_{1+\delta}(a,\,b)}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ (в этом легко убедиться, если учесть, что $\displaystyle\int\limits_{-1}^{\infty}k(s)\,ds=0$), то в силу теоремы 1.2′ $(T_1\varphi)(x)\in I^{\alpha}_{a+}(L_p([a,\ b],\ \rho))$ и $(D^{\alpha}_{a+}\ T_1\varphi)(x)=\psi(x)$. Справедливость пункта 2° вытекает из оценки $\displaystyle|\psi(x)|\leqslant\text{const}\int\limits_{a}^{x}\frac{|\varphi(s)|\,ds}{(x-s)^{1-\lambda}}$ на основании теоремы С. Г. Михлина ([6], стр. 38) о полной непрерывности оператора типа потенциала в весовом пространстве.

Аналогичными рассуждениями для оператора T_2 можно показать, что $(T_2\varphi)(x)\in I^{\alpha}_{-b}(L_p([a,\ b],\ \rho))$, и оператор $D^{\alpha}_{-b}\ T_2$ вполне непрерывен в $L_p([a,\ b],\ \rho)$. Лемма доказана.

Применяя теперь результаты И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника [7] получаем основную в этом параграфе теорему.

Теорема 4.1. *Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ по переменной x удовлетворяют на $[a, b]$ условию Гельдера порядка $\lambda > \alpha$ равномерно по y, а функции $u(x) = u(x, x)$ и $v(x) = v(x, x)$ непрерывны на $[a, b]$. Для того чтобы оператор K был нетеровым из $L_p([a, b], \rho)$ в $I^\alpha(L_p([a, b], \rho))$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $\inf |u(x) e^{i\alpha\pi} + v(x)| > 0, \ x \in [a, b]$;

2) *функция*

$$Q(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x) e^{-i\alpha\pi} + v(x)}{u(x) e^{i\alpha\pi} + v(x)}, & x \in [a, b], \\ 1, & x \in [-\infty, \infty] \setminus [a, b], \end{cases}$$

является ω-неособенной, где $\omega = (p, \alpha_a, \alpha_b - \alpha p)$.

При выполнении этих условий индекс оператора K равен ω-индексу функции $Q(x)$ (определение ω-неособенной функции и ω-индекса см. в [7]).

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность С. Г. Самко за внимание к работе и Н. К. Карапетянцу за полезное обсуждение.

Ростовский государственный университет

Поступило 15.XI.1971

Բ. Ս. ՌՈՒԲԻՆ. Ուղղագիծ կոնտուրի վրա կոտորակային ինտեգրալների տարածությունների մասին *(ամփոփում)*

Նկարագրվում են այն ֆունկցիաների տարածությունները, որոնք ներկայացվում են կոտորակային կարգի ինտեգրալներով՝ $L_p(\Omega, \rho)$ խտության ֆունկցիաներից։

Ապացուցվում է տարբեր հատվածների վրա կոտորակային ինտեգրալներով տրված ֆունկցիաների համընկման թեորեմ։ Ստացված են և $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$-ից խտության ֆունկցիաներով կոտորակային ինտեգրալով ֆունկցիայի ներկայացման անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, ելնելով կոտորակային կարգի ածանցյալի հետևյալ սահմանումից՝

$$D_+^\alpha f = \lim_{\substack{N \to \infty \\ L_p}} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_p}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f_N(x) - f_N(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} \, dt,$$

որտեղ $f_N(x) = f(x)$, երբ $x > -N$ և $f_N(x) = 0$, երբ $x < -N$։

Նշված արդյունքները կիրառվում են $L_p(\Omega, \rho)$-ում պոտենցյալի տիպի օպերատորների նետերյանության ուսումնասիրման համար։

B. S. ROUBIN. *Spaces of fractional integrals on a linear contour* (summary)

A description of spaces of functions hich may be represented by fractional order integrals with densities from $L_p(\Omega, \rho)$ is given. The necessary and sufficient conditions for representation of a function by fractional integral with density from $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ are obtained. The results are applied to the investigation of potential type operators in $L_p(\Omega, \rho)$ with respect of noetherity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Hardy, J. Littlewood.* Some properties of fractional integrals. I, Math. Z., 27, 1928, 565—606.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
3. *С. Г. Самко.* Об операторах типа потенциала, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 299—301.
4. *С. Г. Самко.* Об интегральном модуле непрерывности потенциалов с плотностями, суммируемыми на оси с весом, Математический анализ и его приложения, 1969, 175—184.
5. *С. Г. Самко.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Дифференц. уравнения, 4, № 2, 1968, 298—314.
6. *С. Г. Михлин.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.
7. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p с весом, ДАН СССР, 185, № 4, 1969, 745—748.
8. *К. И. Бабенко.* О сопряженных функциях, ДАН СССР, 62, № 2, 1948, 157—160.
9. *Б. С. Рубин.* О нетеровости операторов типа потенциала на прямолинейном контуре, III республ. конф. математиков Белоруссии, Тезисы докладов, Минск, 1971, ч. I, стр. 108.