ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 5, 1972 Математика

Р. С. ГАЛОЯН

О МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ КЛАССА $N\{\omega\}$

Введение

1°. В недавнем исследовании М. М. Джрбашяна [1], завершающим построение теории факторизации мероморфных в круге функций, были введены новые классы $N\{\omega\}$ мероморфных в круге $|z|<1$ функций и установлено их параметрическое представление. Характерной особенностью этой теории является применение обобщенных операторов типа Римана-Лиувилля $L^{(\omega)}$. Оператор $L^{(\omega)}$ ассоциируется с произвольной функцией $\omega(x)$ класса Ω, определяемой условиями:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0, 1)$;

2) $$\omega(0)=1, \int_0^1 \omega(x)\,dx<+\infty.$$

При этом, если $\omega(x)\in\Omega$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $x=0$, то скажем, что $\omega(x)\in\Omega^*$, а если $\omega(x)\in\Omega$ удовлетворяет условию Липшица на каждом отрезке $[0, \Delta]$ $(0<\Delta<1)$ и не возрастает на $[0, 1)$, то отнесем ее к классу $\widetilde{\Omega}_*$. Очевидно, что $\Omega\supset\Omega^*\supset\widetilde{\Omega}_*$.

На соответствующих классах допустимых функций $\varphi(r)$, $r\in(0,1)$, оператор $L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ определяется таким образом [2]:

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}\equiv-\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^1\varphi(\tau r)\,dp(\tau)\right\},\ r\in(0, 1),$$

где непрерывная на $[0, 1]$ функция $p(\tau)$ имеет вид

$$p(0)=1,\ p(\tau)=\tau\int_\tau^1\frac{\omega(x)}{x^2}\,dx,\ \tau\in(0, 1].$$

Как известно, оператор Римана-Лиувилля $D^{-\alpha}\varphi(x)$ $(-1<\alpha<+\infty)$ определяется следующим обрзом (см., например, [3]): в случае $0<\alpha<+\infty$

$$D^{-\alpha}\varphi(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,\ x\in(0, 1),$$

причем для $\varphi(x) \in L(0, 1)$ правая часть существует почти всюду и вновь принадлежит $L(0, 1)$; в случае $-1 < \alpha < 0$

$$D^{-\alpha}\varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D^{-(1+\alpha)}\varphi(x), \ x \in (0, 1),$$

в предположении, что правая часть существует почти всюду; наконец, полагают, что

$$D^0\varphi(x) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1).$$

Оператор $L^{(\omega)}\{\varphi(x)\}$ представляет собой существенное обобщение оператора Римана-Лиувилля, поскольку имеет место [2]

Теорема А. *В случае, когда*

$$\omega(x) = (1-x)^{\alpha} \ (-1 < \alpha < +\infty)$$

почти всюду на $(0, 1)$ *справедлива формула*

$$L^{(\omega)}\{\varphi(x)\} \equiv \Gamma(1+\alpha)\, x^{-\alpha} D^{-\alpha}\varphi(x).$$

Класс $N\{\omega\}$ (или $N^*\{\omega\}$, если $\omega(x) \in \Omega^*$) определяется посредством ω-характеристики

$$T_{\omega}(r; F) \equiv m_{\omega}(r; F) + N_{\omega}(r; F)$$

как множество тех мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} T_{\omega}(r; F) < +\infty.$$

Здесь для каждого $\omega(x) \in \Omega^*$

$$m_{\omega}(r; F) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{(r)}^{(\omega)}\{\log|F(re^{i\vartheta})|\}\, d\vartheta,$$

$$N_{\omega}(r; F) \equiv \int_0^r \frac{n(t; \infty) - n(0; \infty)}{t}\, \omega\left(\frac{t}{r}\right) dt + n(0; \infty)(\log r - k_{\omega}),$$

где $n(0; \infty)$ означает кратность возможного полюса функции $F(z)$ в точке $z = 0$, $n(t; \infty)$ — число ее полюсов, лежащих в круге $|z| \leqslant t$ $(0 < t < 1)$ и отличных от $z = 0$, в предположении, что каждый полюс считается столько раз, какова его кратность и, наконец

$$k_{\omega} = \int_0^1 \frac{1 - \omega(x)}{x}\, dx.$$

Отметим, что в случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, функции $m_{\omega}(r; F)$, $N_{\omega}(r; F)$ и $T_{\omega}(r; F)$ переходят в известные функции $m(r; F)$, $N(r; F)$ и $T(r; F)$, введенные впервые Р. Неванлинной.

В исследованиях [1, 2] важную роль играют функции

$$C(z;\ \omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k},\ S(z;\ \omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k},\tag{1}$$

где

$$\Delta_0=1,\ \Delta_k=k\int_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\quad(k=1,\ 2,\cdots),$$

аналитичные в круге $|z|<1$, являющиеся аналогами ядер Коши и Шварца для круга. При этом известно [2], что если $\omega(x)\in\Omega$ не убывает на $[0,1)$, то

$$\operatorname{Re}C(z;\ \omega)\geqslant0,\ \operatorname{Re}S(z;\ \omega)\geqslant0,\ |z|<1.\tag{2}$$

Известно [1], что если $F(z)\in N\{\omega\}$, а $\{a_\mu\}_1^\infty$ $(0<|a_\mu|\leqslant|a_{\mu+1}|<$ $<1)$ и $\{b_\nu\}_1^\infty$ $(0<|b_\nu|\leqslant|b_{\nu+1}|<1)$ соответственно последовательности ее нулей и полюсов, то

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{|a_\mu|}^{1}\omega(x)\,dx<+\infty,\ \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{|b_\nu|}^{1}\omega(x)\,dx<+\infty.\tag{3}$$

С другой стороны, известно также [1], что для любой последовательности комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$, подчиненной лишь условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)\,dx<+\infty,$$

существует функция из класса $N\{\omega\}$ с нулями лишь в точках $\{z_k\}_1^\infty$. Важным примером такой функции служит бесконечное произведение

$$B_\omega(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}A_\omega(z;\ z_k),$$

где

$$A_\omega(z;\ \zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-W_\omega(z;\ \zeta)},\tag{4}$$

причем

$$W_\omega(z;\ \zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S(e^{-i\theta}z;\ \omega)\left\{L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\zeta}\right|\right]\right\}_{r=1}d\theta.$$

Основная теорема о параметрическом представлении класса $N^*\{\omega\}$, которая содержит в себе в качестве специальных случаев как теорему Р. Неванлинны относительно класса N, так и теорему относительно N_α $(-1<\alpha<+\infty)$ [3], гласит [1]:

Класс $N^*\{\omega\}$ совпадает с множеством функций, допускающих представления вида

$$F(z)=e^{i\gamma+\lambda\varkappa_\omega} z^\lambda \frac{B_\omega(z;\ a_\mu)}{B_\omega(z;\ b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z;\ \omega)\, d\Psi(\theta)\right\}, \tag{5}$$

где $B_\omega(z;\ a_\mu)$ *и* $B_\omega(z;\ b_\nu)$—*произвольные сходящиеся произведения вида* (4), *нули которых подчинены условиям* (3), $\Psi(\theta)$—*вещественная функция на* $[0, 2\pi]$ *с конечным полным изменением,* $\lambda \gtrless 0$—*любое целое число,* γ — *любое вещественное число.*

Отметим, что предварительно в монографии [3] были исследованы классы $N_\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$, которые являются специальными случаями классов $N\{\omega\}$, когда $\omega(x)=(1-x)^\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

Определив класс C_ω как множество аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, для которых

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{f(re^{i\theta})\} \geqslant 0,$$

в [1] доказывается также следующая теорема о представлении функций этого класса.

Теорема Б. 1°. *Класс* C_ω *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$f(z) = i\operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z;\ \omega)\, d\Psi(\theta) \quad (|z|<1),$$

где $\Psi(\theta)$—*произвольная неубывающая ограниченная функция на* $[0, 2\pi]$.

2°. *Для заданной функции* $f(z)\in C_\omega$ *соответствующая функция* $\Psi(\theta)$ *может быть определена в виде предела*

$$\Psi(\theta) = \lim_{n\to\infty}\int_0^\theta \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{f(r_n e^{i\varphi})\}\, d\varphi,\quad \theta\in[0, 2\pi],$$

где $\{r_n\}_1^\infty$, $r_n\uparrow 1$ — *некоторая последовательность чисел.*

Приведем для дальнейшего следующую формулу:

$$L^{(\omega)}\{x^k\} = \Delta_k x^k,\ x\in[0,\ 1],\ k=0,\ 1,\cdots, \tag{6}$$

которая справедлива при любом $\omega(x)\in\Omega$ [1].

б) Как известно [4], для функций $F(x)$ класса N, введенного Р. Неванлинной, предел

$$\lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta}) = F(e^{i\theta})$$

существует всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset[0, 2\pi]$ линейной меры нуль.

Граничные свойства более общих классов $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ исследованы в монографии [3] и в статье [5].

В исследовании [1], содержащем результаты исчерпывающего характера для теории факторизации мероморфных функций в круге, приведены также и граничные теоремы для классов $N\{\omega\}$.

Далее, в работах [6, 7] были получены результаты в терминах ω-емкости о граничных свойствах подклассов мероморфных функций ограниченного вида, а именно, классов $N\{\omega\}\subset N$, где функция $\omega(x)\in\Omega$ не убывает на [0, 1), причем $\lim\limits_{x\to 1-0}\omega(x)=+\infty$.

В § 1 настоящей статьи приводится усиление некоторых граничных теорем для классов $N^*\{\omega\}$, доказанных в [1]. Во-первых, после вспомогательной леммы доказывается (теорема 1), что предел

$$\lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\theta};\ z_k)\}$$

существует почти везде на $[0, 2\pi]$. Этот факт приводит к более общему утверждению (теорема 2):

Если $F(z)\in N\{\omega\}$, *где* $\omega(x)\in\tilde{\Omega}_*$, *то почти для всех* $\theta\in[0,2\pi]$ *существует конечный предел*

$$\lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{F(re^{i\theta})\}.$$

В заключении параграфа приводится приложение основной теоремы 2 к мероморфным в круге $|z|<1$ функциям конечного порядка.

В § 2 приводится построение произведения $\pi_\omega(z;\ z_k)$, ассоциированного с произвольной функцией $\omega(x)\in\Omega$ и с произвольной последовательностью $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$, подчиненной условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{|z_k|^2}^{1}\omega(x)\,dx<+\infty.$$

Произведение $\pi_\omega(z;\ z_k)$ является обобщением произведения М. М. Джрбашяна $\pi_\alpha(z;\ z_k)$ $(0<\alpha<+\infty)$, введенного в его давней работе [8]. Доказывается, что при любом $\omega(x)\in\Omega$ $\pi_\omega(z;\ z_k)\in N\{\omega\}$ (теорема 5).

В конце параграфа приводится ряд следствий, касающихся как самой функции $\pi_\omega(z;\ z_k)$, так и первоначальной функции $\pi_\alpha(z;\ z_k)$.

В § 3, аналогично факторизации функции $B_\omega(z;\ z_k)$ [1], с помощью основной леммы доказывается факторизационная теорема для функции $\pi_\omega(z;\ z_k)$ и одно следствие о сравнении $|\pi_\omega(z;\ z_k)|$ и $|B(z;\ z_k)|$, где $B(z;\ z_k)$—функция Бляшке.

§ 1. Граничные свойства мероморфных функций класса $N\{\omega\}\supset N$

Известно следующее граничное свойство функций класса $N^*\{\omega\}$ (см. [1], теоремы 5.9 и 5.10), которое является существенным обобщением свойств класса N мероморфных функций ограниченного вида.

Теорема. *Пусть* $\omega(x)\in\tilde{\Omega}_*$. *Тогда*

1°. *Для любой функции* $F(z) \in N\{\omega\}$ *почти для всех* $\vartheta \in [0, 2\pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r \to 1-0} L^{(\omega)} \{\log |F(re^{i\vartheta})|\} = \mu(\vartheta),$$

где $\mu(\vartheta)$ — *производная некоторой функции ограниченного изменения на* $[0, 2\pi]$.

2°. *Почти для всех* $\vartheta \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{r \to 1-0} L^{(\omega)} \{\log |B_\omega(re^{i\vartheta}; z_k)|\} = 0.$$

В настоящем параграфе мы приводим усиление утверждений этой теоремы.

а). Сначала введем одно определение и, следуя схеме Ч. Танака [9], рассмотревшем лишь специальный случай, докажем одну лемму.

Для данной последовательности комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$, $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ единичный круг $D = D\{z; |z| < 1\}$, разрезанный вдоль отрезков

$$l_k: l_k = \{z; \arg z = \arg z_k, |z_k| \leqslant |z| \leqslant 1\} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

обозначим через $D\{z_k\}$, т. е.

$$D\{z_k\} = D - \bigcup_{k=1}^{\infty} l_k.$$

При этом точки этих разрезов, как обычно, будут рассматриваться как две различные достижимые точки границы области $D\{z_k\}$.

Лемма 1. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty,$$

где $\omega(x) \in \widetilde{\Omega}_\omega$. *Пусть, далее,* $z = f(w)$ $(f(0) = 0)$ — *аналитическая функция, конформно отображающая единичный круг* $|w| < 1$ *на* $D\{z_k\}$.

Обозначим через E_k *замкнутую дугу на* $|w| = 1$, *соответствующую радиальному разрезу* l_k, *а через* $e = \bigcup_k e_k$ — *дополнительное множество для* $\bigcup_k E_k$ *относительно окружности* $|w| = 1$.

Справедливы следующие утверждения:

1°. $\operatorname{mes} e > 0$;

2°. *Каждому множеству меры нуль на* e *соответствует множество меры нуль на* $|z| = 1$ *и наоборот;*

3°. *Почти везде на* e *для любого сектора*

$$A = \left\{w;\ |\arg(w - w_0) - \vartheta| \leqslant \theta,\ \left(\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}\right),\ |w - w_0| < \delta\right\}$$

с вершиной $w_0 = e^{i\theta} \in e$, *можно выбрать сектор*

$$B = \left\{ z;\ |\arg (z - z_0) - \varphi| < \theta' < \frac{\pi}{2},\ |z - z_0| < \delta' \right\}$$

с вершиной $f(w_0) = z_0 = e^{i\varphi}$, *прообраз которого содержится в* A.

Доказательство. Очевидно, что граница $\partial D\{z_k\}$ области $D\{z_k\}$ имеет меру

$$\operatorname{mes} \partial D\{z_k\} = 2\pi + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|).$$

Отдельно рассмотрим два случая: когда эта мера бесконечна и когда она конечна. Сперва рассмотрим случай, когда граница $D\{z_k\}$ бесконечна, т. е. когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = +\infty.$$

Определим последовательность $\{z_k^*\}_1^\infty$ следующим образом:

$$z_k^* = r_k\, e^{i \arg z_k}, \text{ где } r_k = 1 - \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx.$$

Граница $\partial D\{z_k^*\}$ области $D\{z_k^*\}$ уже имеет конечную меру

$$\operatorname{mes} \partial D\{z_k^*\} = 2\pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Пусть $E_k^* \subset E_k$ — замкнутая дуга на $|w| = 1$, соответствующая отрезку

$$m_k = \{z;\ \arg z = \arg z_k,\ |z_k| \leqslant |z| \leqslant r_k\}$$

при обратном отображении $w = f^{-1}(z)$, а e^* — дополнительное множество для $\bigcup_k E_k^*$ относительно $|w| = 1$, т. е. e^* есть прообраз для $\partial D\{z_k^*\}$, причем e^*, как и e, будучи открытым множеством, может быть представлено в виде счетной суммы интервалов, т. е. $e^* = \bigcup_k e_k^*$, где $e_k^* \supset e_k$.

Введем далее в рассмотрение множество

$$e^*(r) = \{w,\ e^{i \arg w} \in e^*,\ |w| = r\},$$

образом которого при отображении $z = f(w)$ пусть будет множество

$$E(r) = \{z;\ z = f(re^{i\theta}),\ e^{i\theta} \in e^*,\ r = \text{const}\},$$

при этом, ввиду определения самого множества e^*,

$$\lim_{r \to 1-0} E(r) = \partial D\{z_k\} - \bigcup_k m_k = \partial D\{z_k^*\}. \tag{1.2}$$

Интеграл

$$J(r) = \int\limits_{re^{i\vartheta} \in e^*(r)} |f'(re^{i\vartheta})| \, r d\vartheta$$

дает нам конечную меру множества $E(r)$, т. е. $J(r) = \operatorname{mes} E(r)$ (см., например, [10], стр. 174—175), причем по (1.2)

$$\lim_{r \to 1-0} J(r) = \operatorname{mes} \partial D \{z_k^*\}.$$

Отсюда и из (1.1) следует, что

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_{w \in e^*(r)} |f'(w)| \, |dw| \leqslant M_f < +\infty, \tag{1.3}$$

где M_f — некоторая постоянная.

Пусть далее

$$\begin{matrix} e_k = \{e^{i\vartheta};\ \alpha_k < \vartheta < \beta_k\} \\ e_k^* = \{e^{i\vartheta};\ \alpha_k^* < \vartheta < \beta_k^*\} \end{matrix} \quad (\alpha_k^* < \alpha_k < \vartheta < \beta_k < \beta_k^*).$$

Покажем, что можно выбрать $\tilde{\alpha}_k$ $(\alpha_k^* < \tilde{\alpha}_k < \alpha_k)$, $\tilde{\beta}_k$ $(\beta_k < \tilde{\beta}_k < \beta_k^*)$ такие, что

$$\int\limits_0^1 |f'(re^{i\tilde{\alpha}_k})| \, dr < +\infty, \int\limits_0^1 |f'(re^{i\tilde{\beta}_k})| \, dr < +\infty. \tag{1.4}$$

В самом деле, в силу (1.3)

$$r \int\limits_{e^{i\vartheta} \in e_k^*} |f'(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta \leqslant M_f \quad (0 \leqslant r < 1), \tag{1.5}$$

и поэтому конечен интеграл

$$\int\limits_0^1 r dr \int\limits_{e^{i\vartheta} \in e_k^*} |f'(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta.$$

Но тогда, по теореме Фубини, конечен также интеграл

$$\int\limits_{e^{i\vartheta} \in e_k^*} d\vartheta \int\limits_0^1 |f'(re^{i\vartheta})| \, r dr = \int\limits_0^1 r dr \int\limits_{e^{i\vartheta} \in e_k^*} |f'(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta \leqslant M_f,$$

и следовательно интеграл

$$\int\limits_0^1 |f'(re^{i\vartheta})| \, r dr$$

конечен почти везде на e_k^*. Отсюда и вытекает существование таких $\tilde{\alpha}_k$ $(\alpha_k^* < \tilde{\alpha}_k < \alpha_k)$ и $\tilde{\beta}_k$ $(\beta_k < \tilde{\beta}_k < \beta_k^*)$, для которых интегралы (1.4) конечны.

Определив сектор D_k следующим образом:

$$D_k = \{w;\ \tilde{\alpha}_k \leqslant \arg w \leqslant \tilde{\beta}_k,\ |w| \leqslant 1\},$$

из (1.4) и (1.5) получим, что

$$\int_0^\rho |f'(re^{i\tilde{\alpha}_k})|\,dr + \int_{\tilde{\alpha}_k<\vartheta<\tilde{\beta}_k} |f'(\rho e^{i\vartheta})|\,\rho d\vartheta + \int_0^\rho |f'(re^{i\tilde{\beta}_k})|\,dr < +\infty$$

для любого ρ $(0<\rho<1)$. Эта оценка означает, что $f'(w)$ принадлежит известному классу E_1 в D_k (см. [10], стр. 205). Следовательно, по обобщенной теореме Ф. и М. Рисса [10], $f'(w)$, вместе с ней и $f(w)$, будут абсолютно непрерывными функциями на границе сектора D_k, и, в частности, на e_k. Отсюда и следует, что любому множеству $\varepsilon_k \subset e_k$, $\operatorname{mes} \varepsilon_k = 0$, соответствует некоторое множество меры нуль на $|z|=1$.

Обратно, по обобщенной теореме Левнера [11], e есть борелево множество, следовательно измеримо, и каждому множеству меры нуль на $|z|=1$ соответствует множество меры нуль на e, так что утверждения 1° и 2° установлены.

Далее, заметив, что для любой точки $w_0 \in e$, $\arg(f(w)-f(w_0))$ равномерно ограничен в $|w|<1$, по теореме Макмиллана [12] заключаем, что существует множество $e_0 \in e$, $\operatorname{mes} e_0 = 0$ такое, что если $w_0 \in e - e_0$, то отношение

$$\frac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0}$$

имеет ненулевой угловой предел в точке w_0.

Таким образом, при отображении $z=f(w)$ в точках $w_0 \in e - e_0$ имеется консерватизм углов, и так как сектор A имеет раствор $2\theta > \frac{2\pi}{3}$, то ее образ заведомо содержит некоторый сектор A^* с вершиной в точке $z_0 = f(w_0)$ и раствор больше, чем $\frac{\pi}{2}$. Отсюда и следует утверждение 3°.

Наконец, если

$$\operatorname{mes} \partial D\{z_k\} < +\infty,$$

т. е. $\partial D\{z_k\}$ имеет конечную меру, то все наши построения и заключения останутся в силе просто для самой области $D\{z_k\}$.

б). Докажем теперь теорему.

Теорема 1. *Если $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_*$, то для любого сходящегося произведения $B_\omega(z; z_k)$ почти для всех $\vartheta \in [0, 2\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\vartheta}; z_k)\},\quad re^{i\vartheta} \in D\{z_k\}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Известно, что функция

$$u_\omega(re^{i\vartheta}, \zeta) \equiv L^{(\omega)}\{\log |A_\omega(re^{i\vartheta}; \zeta)|\}$$

при любом ζ $(0<|\zeta|<1)$ допускает представление

$$u_\omega(re^{i\vartheta};\ \zeta)=L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\vartheta}}{\zeta}\right|\right\}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\vartheta-\varphi;\ r)\times$$

$$\times L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right\}_{r=1}d\varphi, \tag{1.7}$$

$$\vartheta\in[0,\ 2\pi],\ 0\leqslant r<1,$$

где $P(\vartheta-\varphi;\ r)$—ядро Пуассона, причем если $\omega(x)\in\widetilde{\Omega}_*$, то $u_\omega(z;\zeta)\leqslant 0$ $(|z|<1,\ |\zeta|\leqslant 1)$(см. [1], лемму 3.2).

Известно также, что функция

$$L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\vartheta}}{z_k}\right|\right\}$$

при $\omega(x)\in\widetilde{\Omega}_*$ гармонична в области $D-l_k$ (см. [1], лемму 1.7).

Таким образом, на основании представления (1.7) заключаем, что функция $u_\omega(z;\ z_k)$ гармонична в области $D-l_k$.

Далее, известно (см. [1], теорему 2.2), что

$$L^{(\omega)}\{\log|B_\omega(re^{i\vartheta};\ z_k)|\}=\sum_{k=1}^{\infty}u_\omega(z;\ z_k)\quad(|z|<1), \tag{1.8}$$

причем это разложение равномерно сходится при $|z|\leqslant\rho$ $(0<\rho<1)$, если отделить лишь конечное число его начальных членов.

Из сказанного выше, пользуясь разложением (1.8), заключаем, что функция

$$U_\omega(re^{i\varphi})\equiv L^{(\omega)}\{\log|B_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)|\}$$

также гармонична в области $D\{z_k\}$, при этом

$$U_\omega(re^{i\varphi})\leqslant 0,\ re^{i\varphi}\in D\{z_k\}.$$

Поэтому функция

$$\varphi(z)=\exp\{L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)\}\}$$

будет аналитичной в области $D\{z_k\}$, причем

$$|\varphi(z)|\leqslant 1,\ z\in D\{z_k\}.$$

Пусть далее $z=f(w)$ $(f(0)=0)$ функция, конформно отображающая единичный круг $|w|<1$ на $D\{z_k\}$. Тогда функция $\varphi^*(w)\equiv\varphi(f(w))$ также будет аналитичной в круге $|w|<1$ и

$$|\varphi^*(w)|\leqslant 1\quad(|w|<1).$$

Отсюда, по теореме Фату, конечный предел

$$\lim_{\rho\to 1-0}\varphi^*(\rho e^{i\vartheta})$$

существует почти для всех $\vartheta\in[0,\ 2\pi]$. Поэтому, пользуясь леммой 1, заключаем, что почти для всех $\vartheta\in[0,\ 2\pi]$ предел

$$\lim_{r\to 1-0}\varphi(re^{i\theta})\equiv\lim_{r\to 1-0}\exp\{L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\theta};\ z_k)\}\}\ (re^{i\theta}\in D\{z_k\})$$

существует. Отсюда и вытекает утверждение (1.6) теоремы.

в). Теперь установим общую теорему.

Теорема 2. *Если* $F(z)\in N\{\omega\}$, *где* $\omega(x)\in\overline{\Omega}_*$, *то почти для всех* $\theta\in[0,2\pi]$ *существует конечный предел*

$$\lim_{r\to 1-0}L^{(\omega)}\{\log F(re^{i\theta})\},\quad re^{i\theta}\in D\{a_\mu;\ b_\nu\},$$

где $D\{a_\mu;\ b_\nu\}=D\{a_\mu\}\cap D\{b_\nu\}$, *а* $\{a_\mu\}_1^\infty$ *и* $\{b_\nu\}_1^\infty$ — *соответственно последовательности нулей и полюсов функции* $F(z)$ *в круге* $|z|<1$.

Доказательство. Известно (см. [1], леммы 1.1 и 3.2), что

$$L^{(\omega)}\{\log|e^{i\gamma+\lambda k_\omega}(re^{i\varphi})^\lambda|\}=\lambda\log r, \tag{1.9}$$

$$L^{(\omega)}\{S(re^{i\theta};\ \omega)\}=S(re^{i\theta};\ 1)=\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}. \tag{1.10}$$

Пользуясь представлением (5), в силу (1.9) и (1.10), для функции $F(z)\in N\{\omega\}$ $(\omega(x)\in\overline{\Omega}_*)$ получим следующую формулу:

$$L^{(\omega)}\{\log F(re^{i\varphi})\}=\lambda\log r+L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi};\ a_\mu)\}-$$

$$-L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi};\ b_\nu)\}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+re^{i\varphi}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}}\,d\Psi(\theta),\quad re^{i\varphi}\in D\{a_\mu;\ b_\nu\}, \tag{1.11}$$

где $\lambda\gtrless 0$ — некоторое целое число, а $\Psi(\theta)$ — произвольная функция на $[0,2\pi]$ с конечным полным изменением.

Но согласно теореме 1, почти для всех $\varphi\in[0,2\pi]$ существуют пределы

$$\lim_{r\to 1-0}L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi};\ a_\mu)\}\quad\text{и}\quad\lim_{r\to 1-0}L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi};\ b_\nu)\}$$

в соответствующих областях $D\{a_\mu\}$ и $D\{b_\nu\}$. Последнее слагаемое в (1.11) также имеет конечный предел почти для всех $\varphi\in[0,2\pi]$, так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+re^{i\varphi}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}}\,d\Psi(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\Psi(\theta)+\frac{re^{i\varphi}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Psi(\theta)}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}},$$

а для интеграла типа Коши-Стильтьеса этот факт известен [10].

г). В теореме 4.3 работы [1], в частности, содержится следующее утверждение.

Теорема (М. М. Джрбашян). 1°. *Если для функции* $F(z)$

$$\int_0^1(1-r)^{\alpha-1}T(r;\ F)\,dr<+\infty\quad(0<\alpha<+\infty),$$

где $T(r;\ F)$ — *характеристика Неванлинны, то* $F(z)\in N_\alpha$.

2°. *Если мероморфная функция* $F(z)$ *имеет порядок* $\rho\geqslant 0$, т. е.

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}}\ \frac{\log T(r;\ F)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\rho,$$

то $F(z)\in N_\alpha$ *при любом* $\alpha>\rho$.

Из утверждения 2° этой теоремы и из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Если мероморфная функция* $F(z)$ *имеет порядок* $\rho\geqslant 0$, *то при любом* $\alpha>\rho$ *предел*

$$\lim_{r\to 1-0} D^{-\alpha}\{\log F(re^{i\vartheta})\},\ re^{i\vartheta}\in D\{a_\mu;\ b_\nu\} \tag{1.12}$$

существует почти для всех $\vartheta\in[0,\ 2\pi]$.

Теорема 3 существенно улучшает теорему Ч. Танака [9], в которой утверждается существование почти всюду предела (1.12) лишь при $\alpha=[\rho]+2$.

§ 2. Построение и свойства функции $\pi_\infty(z;\ z_k)$

а). В работах [8, 13] впервые, путем существенного обобщения формулы Иенсена-Неванлинны, была установлена факторизационная теорема для мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}\, T(r;\ F)\, dr<+\infty \quad (0<\alpha<+\infty),$$

где $T(r;\ F)$ — характеристика Неванлинны. На этом пути был открыт новый класс функций $\pi_\alpha(z;\ z_k)$ $(0\leqslant\alpha<+\infty)$, аналитических в круге $|z|<1$, с нулями в точках произвольной последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty \quad (0<\alpha<+\infty). \tag{2.1}$$

Функции эти при условии (2.1) определялись таким образом:

$$\pi_\alpha(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_\alpha(z;\ z_k)},$$

где

$$U_\alpha(z;\ \zeta)=\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\,dt-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2+\alpha+n)}{\Gamma(2+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\int_0^{|\zeta|^2}(1-t)^{\alpha+1}t^{n-1}\,dt,$$

причем условие $0<\alpha<+\infty$ без каких-либо изменений можно заменить условием $-1<\alpha<+\infty$.

При этом было установлено, что

$$\pi_0(z; z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}z_k}\frac{|z_k|^2}{z_k}=C\cdot B(z; z_k),$$

где

$$C=\prod_{k=1}^{\infty}|z_k|,$$

а $B(z; z_k)$—функция Бляшке, и что при любом целом $\alpha=p\geqslant1$

$$\pi_p(z; z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-|z_k|^2}{1-z\bar{z}_k}\right)\exp\left\{\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-z\bar{z}_k}\right)^n\right\}.$$

Таким образом, произведение $\pi_p(z; z_k)$ имеет такую же структуру, что и бесконечное произведение Вейерштрасса.

Следуя идее и методу М. М. Джрбашяна, развитыми как в работах [8, 13], так и в новых исследованиях [3, 1], в настоящем параграфе мы строим обобщение произведения типа $\pi_\alpha(z; z_k)$— произведение $\pi_\omega(z; z_k)$. Эти произведения ассоциируются с произвольной функцией $\omega(x)\in\Omega$ и имеют нули лишь в точках последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Основная цель параграфа—исследование свойств, в том числе и граничных свойств, функций $\pi_\omega(z; z_k)$, и, в частности, функций $\pi_\alpha(z; z_k)$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

б). Определим функцию

$$\widetilde{A}_\omega(z; \zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-\widetilde{U}_\omega(z;\,\zeta)}\quad(|z|<1,\ 0<|\zeta|<1),\tag{2.2}$$

где

$$\widetilde{U}_\omega(z; \zeta)=\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\frac{1}{\Delta_k}\int_0^{|\zeta|^2}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx,\tag{2.3}$$

$\omega(x)\in\Omega$ и

$$\Delta_k=k\int_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\quad(k=1, 2,\cdots).\tag{2.4}$$

Теорема 4. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|^2}^{1}\omega(x)\,dx<+\infty,\tag{2.5}$$

где $\omega(x)$ *— некоторая функция из класса* Ω. *Тогда бесконечное произведение*

$$\pi_\omega(z; z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\widetilde{A}_\omega(z; z_k)\tag{2.6}$$

абсолютно и равномерно сходится в каждой замкнутой части единичного круга, представляя аналитическую функцию, обращающуюся в нуль лишь на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Замечая, что по (2.4)

$$\int\limits_0^{|\zeta|^2} \omega(t)\, t^{k-1}\, dt = \frac{\Delta_k}{k} - \int\limits_{|\zeta|^2}^1 \omega(t)\, t^{k-1}\, dt,$$

из (2.3) при условии $0<|z|<|\zeta|<1$ получим

$$\tilde{U}_\omega(z;\zeta) = \int\limits_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt - \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{z}{\Delta_k}\right)^k \frac{1}{\Delta_k}\left(\frac{\Delta_k}{k} - \int\limits_{|\zeta|^2}^1 \omega(t)\, t^{k-1}\, dt\right) =$$

$$= \int\limits_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt + \log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \frac{1}{\Delta_k} \int\limits_{|\zeta|^2}^1 \omega(t)\, t^{k-1}\, dt. \qquad (2.7)$$

Ввиду разложения (1) и того обстоятельства, что

$$\left|\frac{zt}{\zeta}\right| < \left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1 \ \text{ при } |t|<1,\ |z|<|\zeta|,$$

из (2.7) следует, что

$$\tilde{U}_\omega(z;\zeta) = \int\limits_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt + \log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) + \int\limits_{|\zeta|^2}^1 \left[C\left(\frac{zt}{\zeta};\ \omega\right) - 1\right] \frac{\omega(t)}{t}\, dt =$$

$$= \log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) + \Omega(z;\zeta), \qquad (2.8)$$

где

$$\Omega(z;\zeta) = \int\limits_{|\zeta|^2}^1 C\left(\frac{zt}{\zeta};\ \omega\right) \frac{\omega(t)}{t}\, dt, \qquad (2.9)$$

причем очевидно, что

$$\lim_{|\zeta|\to 1-0} \Omega(z;\zeta) = 0. \qquad (2.10)$$

Найдем асимптотическую формулу для функции $\Omega(z;\zeta)$ при $|\zeta|\to 1-0$. Заметим, что из (2.9) интегрированием по частям следует:

$$\Omega(z;\zeta) = C(z\bar{\zeta};\ \omega) \int\limits_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt + \frac{z}{\zeta} \int\limits_{|\zeta|^2}^1 C'\left(\frac{zt}{\zeta};\ \omega\right) \left(\int\limits_t^1 \frac{\omega(x)}{x}\, dx\right) dt. \qquad (2.11)$$

Но из (1) имеем, что

$$C'(z;\ \omega) = \sum_{k=1}^\infty k \frac{z^{k-1}}{\Delta_k},$$

и, следовательно

$$\max_{|z|<r} |C'(z;\,\omega)| = C'(r;\,\omega). \tag{2.12}$$

Поэтому, при $|z| \leqslant r < |\zeta| < 1$ и $|\zeta|^2 \leqslant t \leqslant 1$ справедлива оценка

$$\left|\frac{z}{\zeta} C'\left(\frac{zt}{\zeta};\,\omega\right)\right| \leqslant \frac{r}{|\zeta|} C'\left(\frac{r}{|\zeta|};\,\omega\right). \tag{2.13}$$

Далее, легко видеть, что

$$\int_{|\zeta|^2}^{1}\left(\int_{t}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right)dt \leqslant (1-|\zeta|^2)\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx. \tag{2.14}$$

Теперь из (2.11), (2.13) и (2.14) вытекает следующая асимптотическая формула для функции $\Omega(z;\,\zeta)$:

$$\Omega(z;\,\zeta) = C(z\bar{\zeta};\,\omega)\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt + O\left\{(1-|\zeta|^2)\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\right\}\ (|\zeta|\to 1-0).$$

Из этой формулы следует предельное соотношение ($\zeta = |\zeta|\,e^{i\theta}$)

$$\lim_{|\zeta|\to 1-0} \Omega(z;\,\zeta)\left(\int_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt\right)^{-1} = C(ze^{-i\theta};\,\omega).$$

Отсюда, ввиду (2.10), имеем также

$$\lim_{|\zeta|\to 1-0}(1-e^{-\Omega(z;\,\zeta)})\left(\int_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt\right)^{-1} = C(ze^{-i\theta};\,\omega). \tag{2.15}$$

Заметим теперь, что согласно (2.8)

$$\widetilde{A}_\omega(z;\,\zeta) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-\widetilde{U}_\omega(z;\,\zeta)} = e^{-\Omega(z;\,\zeta)}\ (|z|<|\zeta|<1). \tag{2.16}$$

Далее, как и в (2.12), ввиду положительности коэффициентов в разложении (1), получим, что

$$\max_{|z|<r} |C(z;\,\omega)| = C(r;\,\omega). \tag{2.17}$$

Теперь из формул (2.15), (2.16) и (2.17) следует, что можно выбрать число $0 < r_1 < 1$ так, чтобы

$$|1-\widetilde{A}_\omega(z;\,\zeta)| < 2C(r;\,\omega)\int_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt \quad (|z| \leqslant r < r_1 < |\zeta| < 1).$$

Отсюда вытекает, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}|1-|\widetilde{A}_\omega(z;\,z_k)|| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|1-\widetilde{A}_\omega(z;\,z_k)| \quad (|z| \leqslant r) \tag{2.18}$$

сходятся, если сходится ряд (2.5). Убедимся, что условие (2.5) также необходимо. В самом деле, из (2.15) в частности получим, что при $z=0$

$$\lim_{|\zeta|\to 1-0}[1-\tilde{A}_\omega(0;\ \zeta)]\left(\int\limits_{|\zeta|^*}^{1}\omega(x)\,dx\right)^{-1}=C(0;\ \omega)=1,$$

и поэтому можно выбрать $r_2<|\zeta|<1$ так, чтобы

$$|1-\tilde{A}_\omega(0;\ \zeta)|\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{|\zeta|^*}^{1}\omega(x)\,dx.$$

Таким образом, условие (2.5) необходимо и достаточно для сходимости обоих рядов (2.18), причем сходимость этих рядов будет равномерной в любом круге $|z|\leqslant r<1$. Наконец, применяя известный признак о сходимости бесконечных произведений, приходим к утверждению теоремы относительно произведения $\pi_\omega(z;\ z_k)$.

в). Во введении статьи мы привели определение класса $N\{\omega\}$ мероморфных в круге $|z|<1$ функций.

Докажем теорему.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\omega(x)\in\Omega$ *и* $\pi_\omega(z;\ z_k)$*—любое сходящееся произведение. Тогда имеет место включение*

$$\pi_\omega(z;\ z_k)\in N\{\omega\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $\pi_\omega(z;\ z_k)$ аналитична в единичном круге, то согласно определению функции $T_\omega(r;\ F)$ будем иметь

$$T_\omega(r;\ F)\equiv m_\omega(r;\ F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}L^{(\omega)}_{(+)}\{\log|\pi_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)|\}\,d\varphi. \tag{2.19}$$

По формуле (2.6)

$$\pi_\omega(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\tilde{A}_\omega(z;\ z_k),$$

поэтому справедливо разложение

$$\log|\pi_\omega(z;\ z_k)|=\sum_{k=1}^{\infty}\log|\tilde{A}_\omega(z;\ z_k)|, \tag{2.20}$$

причем из сходимости рядов (2.18) и из того, что при $|\zeta|\to 1-0$

$$\log|\tilde{A}_\omega(z;\ \zeta)|\sim|\tilde{A}_\omega(z;\ \zeta)|-1,$$

следует, что разложение (2.20) равномерно сходится в каждом круге $|z|\leqslant r<1$, если не учесть конечного числа его начальных членов.

К обеим частям разложения (2.20) можно применить оператор $L^{(\omega)}$, и полученное таким образом разложение

$$L^{(\omega)}\{\log|\pi_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)|\} = \sum_{k=1}^{\infty} L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\omega(z;\ z_k)|\} \tag{2.21}$$

также абсолютно и равномерно сходится при $|re^{i\varphi}| \leqslant \rho < 1$, если отделить лишь конечное число его начальных членов. Отметим, что в ходе доказательства теоремы 1 была отмечена справедливость аналогичного утверждения для функции $Б_\omega(z;\ z_k)$. При этом, доказательство этого утверждения можно полностью перенести на наш случай, и поэтому его доказательство мы опускаем.

Далее, по формуле (2.2)

$$L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)|\} = L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{|\zeta|}\right|\right\} - \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\}. \tag{2.22}$$

Известно, что (см. [1], лемму 1.2)

$$L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right\} = -\operatorname{Re}\int_0^1 \frac{re^{i\varphi}\,\omega(x)}{\zeta - xre^{i\varphi}}\,dx \quad (0<|\zeta|<1,\ 0\leqslant r\leqslant 1,\ \varphi\in[0,2\pi]) \tag{2.23}$$

в предположении, что $\varphi \neq \arg\zeta$ при $|\zeta| \leqslant r \leqslant 1$.

Далее, ввиду (6), из (2.3) получим

$$L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right)^k \int_0^{|\zeta|^2} \omega(t)\,t^{k-1}\,dt =$$

$$= \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt - \int_0^{|\zeta|^2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{tre^{i\varphi}}{\zeta}\right)^k\right\}\frac{\omega(t)}{t}\,dt. \tag{2.24}$$

Так как

$$\left|\frac{tr\,e^{i\varphi}}{\zeta}\right| < 1 \text{ при } t < |\zeta|^2 < |\zeta| < 1,$$

то (2.24) можно записать в следующем виде:

$$L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt - \int_0^{|\zeta|^2} \frac{re^{i\varphi}\,\omega(t)}{\zeta - tre^{i\varphi}}\,dt. \tag{2.25}$$

Теперь, с учетом формул (2.23) и (2.25), из (2.22) приходим к представлению

$$L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)|\} = -\operatorname{Re}\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\zeta}{\zeta - t\,re^{i\varphi}}\cdot\frac{\omega(t)}{t}\,dt.$$

Обозначая

$$V_\omega^{(1)}(re^{i\varphi};\ \zeta) \equiv -\int_{|\zeta|^2}\left(1-\frac{tr}{|\zeta|}\right)\left|1-\frac{t\,re^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}\frac{\omega(t)}{t}\,dt, \tag{2.26}$$

$$V_{\infty}^{(2)}(re^{i\varphi};\zeta)\equiv 2\frac{r}{|\zeta|}\sin^2\frac{\varphi-\arg\zeta}{2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\left|1-\frac{tre^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}\omega(t)\,dt, \qquad (2.27)$$

очевидно имеем

$$L^{(\omega)}\{\log|\tilde{A}_{\infty}(re^{i\varphi};\zeta)|\}\equiv V_{\infty}^{(1)}(re^{i\varphi};\zeta)+V_{\infty}^{(2)}(re^{i\varphi};\zeta). \qquad (2.28)$$

Из (2.26) для любого r $(0<r<1)$, ζ $(0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$ получим оценку

$$|V_{\infty}^{(1)}(re^{i\varphi};\zeta)|\leqslant\frac{1}{r_0}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\left|1-\frac{tr}{|\zeta|}\right|\cdot\left|1-\frac{tre^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}\omega(t)\,dt. \qquad (2.29)$$

Интегрируя (2.29) по φ и пользуясь значением интеграла Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|1-\frac{tre^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}d\varphi=\left|1-\frac{t^2r^2}{|\zeta|^2}\right|^{-1},$$

приходим к неравенству

$$\int\limits_{0}^{2\pi}|V_{\infty}^{(1)}(re^{i\varphi};\zeta)|\,d\varphi\leqslant\frac{2\pi}{r_0}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\left|1-\frac{tr}{|\zeta|}\right|\cdot\left|1-\frac{t^2r^2}{|\zeta|^2}\right|^{-1}\omega(t)\,dt<\frac{2\pi}{r_0}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt. \qquad (2.30)$$

Заметим далее, что имеют место оценки (см. [1], формулы 2.18 и 2.19)

$$\min_{|\zeta|^2<t<1}\left|\frac{\zeta}{r}-te^{i\varphi}\right|\geqslant\begin{cases}\dfrac{2|\zeta|}{\pi r}|\varphi-\arg\zeta|, & \text{при } |\varphi-\arg\zeta|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] \dfrac{|\zeta|}{r}, & \text{при } \dfrac{\pi}{2}\leqslant|\varphi-\arg\zeta|\leqslant\pi,\end{cases}$$

$$\sin^2\frac{\varphi-\arg\zeta}{2}\leqslant\begin{cases}\dfrac{(\varphi-\arg\zeta)^2}{4}, & \text{при } |\varphi-\arg\zeta|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] 1, & \text{при } \dfrac{\pi}{2}\leqslant|\varphi-\arg\zeta|\leqslant\pi,\end{cases}$$

в справедливости которых нетрудно убедиться.

Отсюда легко получим, что при любом r $(0<r<1)$, ζ $(0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$, t $(|\zeta|^2\leqslant t\leqslant 1)$ и $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\sin^2\frac{\varphi-\arg\zeta}{2}\left|1-\frac{t\,re^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}\leqslant\frac{\pi}{r_0}.$$

Из (2.27), ввиду этой оценки, следует

$$|V_{\infty}^{(2)}(re^{i\varphi};\zeta)|\leqslant\frac{2\pi}{r_0^2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt \qquad (2.31)$$

при любом r $(0<r<1)$ и ζ $(0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$. Интегрируя (2.31) по φ, приходим к неравенству

$$\int_0^{2\pi}|V_\infty^{(2)}(re^{i\varphi};\ \zeta)|\,d\varphi\leqslant\frac{4\pi}{r_0^2}\int_{|\zeta|^2}^1\omega(t)\,dt. \tag{2.32}$$

На основании (2.30) и (2.32), из тождества (2.28) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)|\}|\,d\varphi\leqslant C(r_0)\int_{|\zeta|^2}^1\omega(t)\,dt\quad(0<r<1), \tag{2.33}$$

где $C(r_0)$ — некоторая постоянная, не зависящая от r.

Теперь, с учетом разложения (2.21) и оценки (2.33), из (2.19) получим

$$T_\omega(r;F)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_{(+)}^{(\omega)}\{\log|\pi_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)|\}\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\{\log|\pi_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)|\}|\,d\varphi\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)|\}|\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant C(r_0)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|^2}^1\omega(t)\,dt<+\infty$$

при любом r $(0<r<1)$.

Таким образом

$$\sup_{0<r<1}T_\omega(r;F)<+\infty,$$

и тем самым теорема доказана.

Приведем некоторые следствия из этой теоремы и теоремы 2.

Следствие 1. *Предел*

$$\lim_{r\to1-0}L^{(\omega)}\{\log\pi_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)\},\quad re^{i\varphi}\in D\{z_k\},$$

где $\omega(x)\in\widetilde{\Omega}_*$, *существует почти для всех* $\varphi\in[0,2\pi]$.

Следствие 2. *Для любого* α $(0\leqslant\alpha<+\infty)$ *предел*

$$\lim_{r\to1-0}D^{-\alpha}\{\log\pi_\alpha(re^{i\varphi};\ z_k)\},\quad re^{i\varphi}\in D\{z_k\},$$

существует почти для всех $\varphi\in[0,\ 2\pi]$.

Результат этого следствия является усилением теоремы Ч. Танака [9], где при $\alpha=p\geqslant1$ целом утверждалось лишь существование почти для всех $\varphi\in[0,\ 2\pi]$ предела

$$\lim_{r\to1-0}D^{-(p+1)}\{\log\pi_p(re^{i\varphi};\ z_k)\}.$$

В заключение отметим следующее.

1°. При $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ в представлении (5) функцию $B_{\omega}(z; z_k)$ можно заменить функцией $\pi_{\omega}(z; z_k)$.

2°. Если $\omega(x) \in \Omega$, причем $\omega(x)$ не убывает на $[0, 1)$, то аналогичную замену функции $B_{\omega}(z; z_k)$ на $\pi_{\omega}(z; z_k)$ можно также совершить.

3°. В общем случае, когда $\omega(x)$—произвольная функция из класса Ω, эту замену можно осуществить лишь в случае, когда последовательности $\{a_{\mu}\}_1^{\infty}$ и $\{b_{\nu}\}_1^{\infty}$ нулей и полюсов функции $F(z) \in N^*\{\omega\}$ удовлетворяют дополнительному условию

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{|a_{\mu}|^2}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{|b_{\nu}|^2}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty.$$

§ 3. Факторизация функции $\pi_{\omega}(z; z_k)$

а). Известна следующая теорема о факторизации функции $B_{\omega}(z; z_k)$ (см. [1], теорему 2.3).

Теорема. *Пусть* $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ — *некоторая последовательность комплексных чисел, лежащих в круге* $|z| < 1$.

1°. *Если функция* $\omega(x) \in \Omega$ *не убывает на* $[0, 1)$ *и последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty,$$

то имеет место представление

$$B_{\omega}(z; z_k) = B(z; z_k) \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{-i\vartheta} \cdot z; \omega)\, d\mu(\vartheta) \right\} \quad (|z| < 1), \tag{3.1}$$

где $\mu(\vartheta)$ — *некоторая невозрастающая ограниченная функция на* $[0, 2\pi]$.

2°. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < +\infty,$$

а функция $\omega(x) \in \Omega$ *не возрастает на* $[0, 1)$, *то вновь имеет место представление* (3.1), *где* $\mu(\vartheta)$—*неубывающая ограниченная функция на* $[0, 2\pi]$.

Наконец, в обоих случаях

$$\mu(\vartheta) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\vartheta} L^{(\omega)}\left\{ \log \left| \frac{B_{\omega}(r_n e^{i\varphi}; z_k)}{B(r_n e^{i\varphi}; z_k)} \right| \right\} d\varphi, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

где $\{r_n\}_1^\infty$ $(0<r_n<1)$ — *некоторая последовательность* $r_n \uparrow 1$, *а* $B(z;\ z_k)$ — *функция Бляшке**.

Следуя идее доказательства этой теоремы, мы в этом параграфе установим теорему о факторизации функции $\pi_\omega(z;\ z_k)$, причем в нашем случае это доказательство значительно упрощается.

б). Пусть $\pi_\omega(z;\ z_k)$—сходящееся произведение.

Обозначая

$$A_\omega^*(z;\zeta)\equiv\frac{\widetilde{A}_\omega(z;\ \zeta)}{\sqrt{\widetilde{A}_\omega(0;\zeta)}}=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-\widetilde{U}_\omega(z;\zeta)+\frac{1}{2}\widetilde{U}_\omega(0;\zeta)\right\},\tag{3.2}$$

рассмотрим функцию

$$\pi_\omega^*(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^\infty A_\omega^*(z;\ z_k)=\frac{\pi_\omega(z;\ z_k)}{\sqrt{\pi_\omega(0;\ z_k)}}.\tag{3.3}$$

Легко видеть, что $\pi_\omega^*(z;\ z_k)$ при $\omega(x)\equiv 1$ совпадает с функцией Бляшке

$$B(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^\infty\frac{z_k-z}{1-z\bar{z}_k}\cdot\frac{|z_k|}{z_k}.$$

В самом деле, согласно (2.3), при $\omega(x)\equiv 1$

$$\widetilde{U}_\omega(z;\ \zeta)=\log\frac{1-z\bar{\zeta}}{|\zeta|^2},\quad \widetilde{U}_\omega(0;\ \zeta)=\log\frac{1}{|\zeta|^2},$$

и поэтому из (3.2) и отсюда, при $\omega(x)\equiv 1$, имеем

$$A_\omega^*(z;\zeta)=\frac{\zeta-z}{1-z\bar{\zeta}}\,\frac{|\zeta|}{\zeta},$$

т. е. $\pi_\omega^*(z;\ z_k)=B(z;\ z_k)$.

Обозначим

$$A(z;\ \zeta)=\frac{\zeta-z}{1-z\bar{\zeta}}\cdot\frac{|\zeta|}{\zeta}$$

и введем в рассмотрение функцию

$$F(z)=\log\frac{\pi_\omega^*(z;z_k)}{B(z;z_k)}=\log\left\{\prod_{k=1}^\infty\frac{A_\omega^*(z;\ z_k)}{A(z;\ z_k)}\right\}=\sum_{k=1}^\infty F(z;\ z_k),$$

где

$$F(z;\ z_k)=\log\frac{A_\omega^*(z;z_k)}{A(z;\ z_k)}.\tag{3.4}$$

Очевидно, что как сама функция $F(z)$, так и функция

---

* В специальном случае, когда $\omega(x)=(1-x)^\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$, существенно иным методом утверждения этой теоремы впервые были установлены в заметке [14].

$$F_\omega(z) \equiv L^{(\omega)}\{F(re^{i\varphi})\} = \sum_{k=1}^{\infty} L^{(\omega)}\{F(re^{i\varphi};\ z_k)\} \tag{3.5}$$

аналитична в круге $|z|<1$, так как отношение $\pi_\omega^*(z;\ z_k)/B(z;\ z_k)$ аналитично и отлично от нуля в круге $|z|<1$, причем разложение (3.5) равномерно сходится в круге $|z|<1$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Если $\omega(x) \in \Omega$ не убывает на $[0, 1)$, то*

$$\operatorname{Re} F_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta) \equiv \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{F(re^{i\varphi};\ \zeta)\} \leqslant 0 \quad (|z|<1,\ |\zeta|<1).$$

Доказательство. Из (3.4) и (3.2) следует, что

$$\operatorname{Re} F(z;\ \zeta) = \operatorname{Re}\{\widetilde{U}_0(z;\ \zeta) - \widetilde{U}_\omega(z;\ \zeta)\} + \frac{1}{2}\widetilde{U}_\omega(0;\ \zeta) - \frac{1}{2}\widetilde{U}_0(z;\ \zeta), \tag{3.6}$$

где

$$\widetilde{U}_0(z;\ \zeta) = [\widetilde{U}_\omega(z;\ \zeta)]_{\omega=1}.$$

Применяя оператор $L^{(\omega)}$ к обеим частям тождества (3.6), получим

$$\operatorname{Re} F_\omega(z;\ \zeta) = \operatorname{Re}\{L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta) - \widetilde{U}_0(re^{i\varphi};\ \zeta)\}\} + \frac{1}{2}\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt + \log|\zeta|. \tag{3.7}$$

Из (3.3) имеем, что

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_0(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = -2\log|\zeta| + \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\log(1-\bar{\zeta}re^{i\varphi})\}.$$

Но (см. [1], лемму 2.3)

$$L^{(\omega)}\{\log|1-\bar{\zeta}re^{i\varphi}|\} = -\operatorname{Re}\int_0^1\frac{\bar{\zeta}re^{i\varphi}}{1-t\bar{\zeta}re^{i\varphi}}\,\omega(t)\,dt,$$

и поэтому

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_0(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = -2\log|\zeta| - \operatorname{Re}\int_0^1\frac{\bar{\zeta}re^{i\varphi}}{1-t\bar{\zeta}re^{i\varphi}}\,\omega(t)\,dt. \tag{3.8}$$

Далее, согласно (2.25)

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = \int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt - \operatorname{Re}\int_0^{|\zeta|^2}\frac{re^{i\varphi}\omega(t)}{\zeta - t\,re^{i\varphi}}\,dt. \tag{3.9}$$

Теперь из (3.7), (3.8) и (3.9) приходим к следующему представлению для функции $F_\omega(z;\ \zeta)$:

$$F_\omega(z;\ \zeta) = \log\frac{1}{|\zeta|} - \int_0^1\frac{z\bar{\zeta}\omega(t)}{1-tz\bar{\zeta}}\,dt - \int_0^{|\zeta|^2}\frac{\omega(t)\,dt}{t-\dfrac{\zeta}{z}} - \frac{1}{2}\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt \tag{3.10}$$

$$(|z|\leqslant 1,\ |\zeta|<1).$$

Отсюда непосредственно видно, что функция $F_\omega(z;\zeta)$ непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Далее, обозначая

$$J_\omega^{(1)}(e^{i\varphi};\zeta)\equiv -\mathrm{Re}\int_0^{|\zeta|^2}\left\{\frac{\bar\zeta e^{i\varphi}}{1-t\bar\zeta e^{i\varphi}}+\frac{1}{t-\bar\zeta e^{i\varphi}}\right\}\omega(t)\,dt, \tag{3.11}$$

$$J_\omega^{(2)}(e^{i\varphi};\zeta)\equiv -\mathrm{Re}\int_{|\zeta|^2}^{1}\left\{\frac{\bar\zeta e^{i\varphi}}{1-\bar\zeta te^{i\varphi}}+\frac{1}{2t}\right\}\omega(t)\,dt, \tag{3.12}$$

из (3.10) при $|z|=1$ получим тождество

$$\mathrm{Re}\,F_\omega(e^{i\varphi};\zeta)\equiv J_\omega^{(1)}(e^{i\varphi};\zeta)+J_\omega^{(2)}(e^{i\varphi};\zeta)+\log\frac{1}{|\zeta|}. \tag{3.13}$$

Заметим теперь, что интегралы (3.11) и (3.12) можно записать в следующем виде:

$$J_\omega^{(1)}(e^{i\varphi};\zeta)=-\int_0^{|\zeta|^2}\omega(t)\,d\log\left|\frac{t-\bar\zeta e^{i\varphi}}{1-t\bar\zeta e^{i\varphi}}\right|, \tag{3.14}$$

$$J_\omega^{(2)}(e^{i\varphi};\zeta)=-\int_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,d\log\frac{\sqrt{t}}{|1-t\bar\zeta e^{i\varphi}|}. \tag{3.15}$$

Но интегрированием по частям из (3.14) получим

$$J_\omega^{(1)}(e^{i\varphi};\zeta)=-\omega(|\zeta|^2)\log\left|\frac{|\zeta|^2-\zeta e^{-i\varphi}}{1-\bar\zeta|\zeta|^2e^{i\varphi}}\right|+\int_0^{|\zeta|^2}\log\left|\frac{t-\bar\zeta e^{-i\varphi}}{1-t\bar\zeta e^{i\varphi}}\right|d\omega(t)-\log\frac{1}{|\zeta|}. \tag{3.16}$$

Принимая во внимание значение интеграла

$$\int_{|\zeta|^2}^{1}d\log\frac{\sqrt{t}}{|1-t\bar\zeta e^{i\varphi}|}=\log\left|\frac{1-\bar\zeta|\zeta|^2e^{i\varphi}}{\zeta-|\zeta|^2e^{i\varphi}}\right|$$

и очевидное неравенство

$$d\log\frac{\sqrt{t}}{|1-t\bar\zeta e^{i\varphi}|}=\frac{1}{2t}\mathrm{Re}\frac{1+t\bar\zeta e^{i\varphi}}{1-t\bar\zeta e^{i\varphi}}\geqslant 0\quad(|\zeta|<1,\ 0<t<1),$$

из (3.15), в случае неубывающих на $[0,1)$ $\omega(x)$, получим оценку

$$J_\omega^{(2)}(e^{i\varphi};\zeta)\leqslant\omega(|\zeta|^2)\log\left|\frac{\zeta-|\zeta|^2e^{i\varphi}}{1-\bar\zeta|\zeta|^2e^{i\varphi}}\right|. \tag{3.17}$$

Теперь, с учетом (3.16) и (3.17), из (3.13) приходим к неравенству

$$\mathrm{Re}\,F_\omega(e^{i\varphi};\zeta)\leqslant\int_0^{|\zeta|}\log\left|\frac{t-\zeta e^{-i\varphi}}{1-t\bar\zeta e^{i\varphi}}\right|d\omega(t)+\omega(|\zeta|^2)\log\left|\frac{\zeta-|\zeta|^2e^{i\varphi}}{|\zeta|^2-\zeta e^{-i\varphi}}\right|. \tag{3.18}$$

Но $d\omega(t) \geqslant 0$, поскольку $\omega(t)$ не убывает на $[0, 1)$, и

$$\log\left|\frac{t-\zeta e^{-i\varphi}}{1-\bar{\zeta} t e^{i\varphi}}\right| \leqslant 0 \ (0 \leqslant t \leqslant 1), \ \log\left|\frac{\zeta - |\zeta|^2 e^{i\varphi}}{|\zeta|^2 - \zeta e^{-i\varphi}}\right| = 0,$$

поэтому из (3.18) следует, что $\operatorname{Re} F_\omega(e^{i\varphi}; \zeta) < 0$. Далее, как уже было отмечено выше, функция $F_\omega(z; \zeta)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, и поэтому при отображении $w = F_\omega(z; \zeta)$ образ круга $|z| \leqslant 1$ будет ограниченной областью. Ограниченной и замкнутой будет и граница этого образа. Так как $\operatorname{Re} F_\omega(e^{i\varphi}; \zeta) \leqslant 0$, то эта граница лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} w \leqslant 0$, следовательно, образ круга $|z| \leqslant 1$ целиком лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} w \leqslant 0$, то есть $\operatorname{Re} F_\omega(z; \zeta) \leqslant 0$.

в). Докажем теперь основную теорему этого параграфа о факторизации функции $\pi_\omega(z; z_k)$.

Теорема. *Пусть $\pi_\omega(z; z_k)$ — некоторое сходящееся произведение. Если $\omega(x) \in \Omega$ не убывает на $[0, 1)$, то имеет место представление*

$$\pi_\omega(z; z_k) = C_0 B(z; z_k) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\vartheta} z; \omega)\, d\Psi(\vartheta)\right\} (|z| < 1), \quad (3.19)$$

где

$$C_0 = \sqrt{\pi_\omega(0; z_k)},$$

$B(z; z_k)$ — функция Бляшке, а $\Psi(\vartheta)$ — неубывающая ограниченная функция на $[0, 2\pi]$, определяемая следующим образом:

$$\Psi(\vartheta) = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\vartheta} L^{(\omega)}\left\{\log\left|\frac{C_0 B(r_n e^{i\varphi}; z_k)}{\pi_\omega(r_n e^{i\varphi}; z_k)}\right|\right\} d\varphi, \ \vartheta \in [0, 2\pi],$$

где $\{r_n\}_1^\infty$ $(0 < r_n < 1)$ — некоторая последовательность чисел, причем $r_n \uparrow 1$ при $n \to +\infty$.

Доказательство. Во-первых, если $\omega(x)$ не убывает на $[0, 1)$, то $\omega(x) \geqslant \omega(0) = 1$ $(x \in (0, 1))$, и следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|^2}^{1}\omega(x)\,dx.$$

Это означает, что в рассматриваемом случае произведение $B(z; z_k)$ сходится вместе с $\pi_\omega(z; z_k)$. Далее, согласно (3.5) и лемме 2

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{-F(re^{i\varphi})\} = -\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} F_\omega(re^{i\varphi}; z_k) \geqslant 0.$$

Следовательно, по определению класса C_ω, функция

$$-F(z) = -\log\frac{\pi_\omega^*(z; z_k)}{B(z; z_k)} = -\log\frac{\pi_\omega(z; z_k)}{C_0 B(z; z_k)}$$

принадлежит классу C_∞.

Заметив, что ввиду (3.4), (3.2) и (3.3)

$$\operatorname{Im}\{F(0;\zeta)\} = \operatorname{Im}\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx - \log|\zeta|\right\} = 0,$$

по теореме Б для функции $-F(z)$ получим представление

$$-F(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(e^{-i\vartheta}z;\ \omega)\,d\Psi(\vartheta), \tag{3.20}$$

где

$$\Psi(\vartheta) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\vartheta}\{-\operatorname{Re}F_\infty(r_n e^{i\varphi})\}\,d\varphi,\ \ \vartheta\in[0,\ 2\pi], \tag{3.21}$$

причем, согласно теореме Б, $\{r_n\}_1^\infty$ $(0<r_n<1)$ — это некоторая последовательность $r_n\uparrow 1$ при $n\to+\infty$. Теперь из (3.20), (3.21), принимая во внимание определение функции $F(z)$, приходим к утверждениям теоремы относительно представления (3.19) и природы функции $\Psi(\vartheta)$.

Следствие. *Если* $\omega(x)\in\Omega$ *не убывает на* $[0, 1)$, *то справедливо неравенство*

$$|\pi_\infty(z;\ z_k)|\leqslant C_0\,|B(z;\ z_k)|\ \ (|z|<1), \tag{3.22}$$

где

$$C_0 = \sqrt{\pi_\infty(0;\ z_k)} = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{|z_k|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{2t}\,dt\right\}<1.$$

Оценка (3.22) следует из представления (3.19), если учесть, что в рассматриваемом случае $d\Psi(\vartheta)\geqslant 0$, и, согласно (2), $\operatorname{Re}S(z;\ \omega)\geqslant 0$, причем, по (2.6), (2.2) и (2.3)

$$\pi_\infty(0;\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\bar{U}_\infty(0;\ z_k)} = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{|z_k|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\right\}.$$

Отметим, что если $\omega(x)\in\Omega$ не возрастает на $[0,\ 1)$, а последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty,$$

то опять имеет место представление (3.19), с той лишь разницей, что в этом случае $\Psi(\vartheta)$—невозрастающая ограниченная функция на $[0,2\pi]$, причем доказательство совершенно аналогично приведенному в теореме. Поэтому мы ограничимся только констатацией этого факта.

В заключение, выражаю глубокую благодарность проф. М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство при ее решении.

Ереванский государственный
университет

Поступило 21.VII.1972

Ռ. Ս. ԳԱԼՈՅԱՆ. $N\{\omega\}$ դասի մերոմորֆ ֆունկցիաների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրված են Մ. Մ. Ջրբաշյանի հետազոտության մեջ [1] ներմուծված մերոմորֆ ֆունկցիաների $N\{\omega\}$ դասերի տեսության հետ կապված մի քանի հարցեր։

$N\{\omega\}$ դասերի եզրային հատկությունների կապակցությամբ հիմնական թեորեմը (§ 1) պնդում է, որ եթե $\omega(x)$ ֆունկցիան բավարարում է որոշակի պայմանների ($\omega(x)\in\bar{\Omega}_*$), ապա ցանկացած $F(z)\in N\{\omega\}$ ֆունկցիայի համար համարյա ամենուրեք գոյություն ունի հետևյալ վերջավոր սահմանը

$$\lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{F(re^{i\theta})\},$$

որտեղ $L^{(\omega)}$-ն Ռիման-Լիուվիլի տիպի օպերատոր է [2]։

Այնուհետև (§§ 2, 3) կառուցված է նաև մի արտադրյալ—$\pi_\omega(z; z_k)$, որը հանդիսանում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի $\pi_\alpha(z; z_k)$ արտադրյալի [8] ընդհանրացումը։

Ցույց է տրված, որ ցանկացած $\omega(x)\in\Omega$ ֆունկցիայի համար $\pi_\omega(z; z_k)\in N\{\omega\}$։ Ապացուցված են թեորեմներ $\pi_\omega(z; z_k)$ ֆունկցիայի եզրային հատկությունների և ֆակտորիզացման վերաբերյալ։

R. S. GALOIAN. *On mehromorphic function from class* $N\{\omega\}$ (summary)

The paper deals with some questions connected with the theory of $N\{\omega\}$ classes, which have been introduced by M. M. Džrbaşian.

The main result refers to the boundary properties of $N\{\omega\}$. It states the conditions, under which the limit

$$\lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{F(re^{i\theta})\},$$

($L^{(\omega)}$ is *a* Rieman-Liuvill type operators) exists for arbitrary $F(z)\in N(\omega)$ almost every where.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121), 1969, 517—615.
2. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1075—1111.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
4. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М., 1957.
5. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства мероморфных функций класса N_α, Изв. АН АрмССР, „Математика", 2, № 5, 1967, 275—294.
6. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1970, 1262—1339.
7. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН АрмССР, „Математика", VI, № 2—3, 1971, 182—194.
8. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945.

9. *Ch. Tanaka.* On the boundary behaviour of the canonical product and the meromorphic function of finite order in the unit disk, Memoirs of the school of Science & Engineering Waseda Univ., 34, 1970, 137—155.
10. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
11. *M. Tsuji.* Potential theory in modern function theory, Tokyo, Maruzen, 1959.
12. *J. E. McMillan.* Boundary behavior of a conformal mapping, Acta math., 123, 1—2, 1969, 43—67.
13. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. инст. матем. и мех. АН АрмССР, 2, 1948, 3—40.
14. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* О факторизации функции B_α, Матем. заметки 4, № 1, 1968, 3—10.