ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 5, 1972 Математика

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ТЕОРЕМА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МНОЖЕСТВ

В этой заметке доказывается теорема, которую удобно использовать в виде аппарата для получения необходимых условий экстремума в математическом программировании, теории оптимального управления (как в непрерывном, так и дискретном вариантах) и т. п. Основой для получения этой теоремы служат, с одной стороны, условия отделимости системы выпуклых конусов [4], а с другой стороны, топологическая теория пересечений [1], [2]. Понятие шатра, вводимое ниже, известно (см., например, [3]).

Пусть Ω — некоторое множество, расположенное в n-мерном евклидовом пространстве E^n, и $a \in \Omega$. Выпуклый конус $M \subset E^n$ с вершиной a будем называть *шатром* множества Ω в точке a, если можно найти такое непрерывное отображение ψ, определенное для всех достаточно близких к a точек конуса M и принимающее значения в E^n, что выполнены следующие условия:

1°. $\psi(a) = a$;

2°. тождественное отображение пространства E^n является касательным для отображения ψ в точке a, т. е. $\psi(x) = x + o(x - a)$;

3°. для всех точек $x \in M$, для которых отображение ψ определено, выполнено соотношение $\psi(x) \in \Omega$.

Заметим, что если M — шатер множества Ω в точке a, то и любой меньший выпуклый конус с вершиной a также является шатром множества Ω в точке a. *Максимальный* шатер существует не всегда. Если, например, Ω—часть плоскости, представляющая собой угол, больший π (с вершиной a), то всякий угол с вершиной a, не превосходящий π и содержащийся в Ω, будет шатром множества Ω в точке a, но максимального шатра не существует.

Нижеследующие две теоремы дают описание шатра множества в двух наиболее важных случаях. (Нетрудно доказать, что в обоих случаях построенный шатер является максимальным).

Теорема 1. *Опорный конус M замкнутого выпуклого множества $\Omega \subset E^n$ в произвольной точке $a \in \Omega$ является шатром множества Ω в точке a.* (Напомним, что точка $x \in E^n$ принадлежит опорному конусу множества Ω, если как угодно близко к ней найдется такая точка y, что интервал (a, y) пересекается с множеством Ω).

Доказательство. Обозначим через E несущую плоскость выпуклого множества Ω. Конус M также лежит в этой плоскости. Для любой точки $x \in E$ обозначим через $\psi(x)$ ближайшую к x точку множества Ω (если $x \in \Omega$, то $\psi(x) = x$). Отображение ψ определено и непрерывно на всей плоскости E, но мы будем рассматривать его только в точках конуса M.

Так как $a \in \Omega$, то $\psi(a)=a$, т. е. условие 1° в определении шатра выполняется. Далее, для любой точки $x \in M$ мы имеем $\psi(x) \in \Omega$, т. е. условие 3° также выполняется.

Остается проверить выполнение условия 2°. Выберем произвольное положительное число $\varepsilon \leqslant 1$, которое в процессе рассуждений менять не будем. Луч, исходящий из точки a и проходящий через точку $x \neq a$, будем обозначать через l_x. Далее, обозначим через Σ множество всех точек $x \in M$, для которых $|x-a|=1$. Пусть $b \in \Sigma$. Рассмотрим все исходящие из точки a лучи, которые образуют с l_b углы, не превосходящие ε. Эти лучи заполняют в пространстве E замкнутый выпуклый конус $K(b)$. Так как $b \in M$ и $b \neq a$, то пересечение $K(b) \cap \Omega$ содержит отличные от a точки. Если множество $K(b) \cap \Omega$ имеет точки, лежащие вне шара радиуса 1 с центром в точке a, то мы положим $d(b)=1$. Если же множество $K(b) \cap \Omega$ целиком расположено в этом шаре, то через $d(b)$ обозначим наибольшее расстояние от a до точек множества $K(b) \cap \Omega$.

Несложно доказывается, что положительная функция $d(b)$, определенная на замкнутом ограниченном множестве Σ, *непрерывна*. Следовательно, существует такое $h>0$, что $d(b) \geqslant h$ для любой точки $b \in \Sigma$.

Пусть теперь $x \in M$, причем $0<|x-a|<h$. Обозначим через b точку, в которой луч l_x пересекается с множеством Σ. Так как $d(b) \geqslant h$, то в множестве $K(b) \cap \Omega$ найдется точка y, отстоящая от a не менее чем на h. Тогда $y \in \Omega$ и угол между лучами l_x и l_y не превосходит ε. Точка x', являющаяся проекцией точки x на луч l_y, принадлежит отрезку $[a, y]$ и, значит, принадлежит множеству Ω. Так как $|x-x'| \leqslant |x-a| \sin \varepsilon < \varepsilon |x-a|$, то ближайшая к x точка $\psi(x)$ множества Ω подавно отстоит от x менее чем на $\varepsilon|x-a|$, т. е.

$$|\psi(x)-x| < \varepsilon |x-a| \text{ при } |x-a|<h, \ x \in M.$$

Поскольку в этом рассуждении число $\varepsilon>0$ было произвольным, то $\psi(x)=x+o(x-a)$, т. е. условие 2° выполнено.

Теорема 2. *Пусть Ω — множество, заданное в пространстве E^n ограничением $g(x) \leqslant 0$, где $g(x)$ — функция, имеющая вблизи точки $a \in \Omega$ непрерывные первые производные, причем $g(a)=0$ и* $\operatorname{grad} g(a) \neq 0$. *Обозначим через M полупространство, состоящее из всех точек $x \in E^n$, для которых $(x-a) \operatorname{grad} g(a) \leqslant 0$. Тогда M есть шатер множества Ω в точке a.*

Доказательство. Рассмотрим гиперповерхность $g(x)=0$ и обозначим через F настолько малый кусок этой гиперповерхности вблизи точки a, что прямые, параллельные вектору $\operatorname{grad} g(x)$ и проходящие вблизи a, пересекают F ровно в одной точке. Граничная гиперплоскость Γ полупространства M касается гиперповерхности F в точке a.

Пусть $x \in E^n$. Прямая m_x, параллельная вектору $\operatorname{grad} g(a)$ и проходящая через точку x, пересекает гиперплоскость Γ в некоторой точке $\gamma(x)$ и, если точка x достаточно близка к a, пересекает гиперповерхность F в некоторой точке $f(x)$. Мы имеем

$$f(x) - \gamma(x) = o(x - a),$$

поскольку $\gamma(x)$ есть ортогональная проекция точки x (и точки $f(x)$) на касательную к F гиперплоскость Γ. Положим

$$\psi(x) = x + (f(x) - \gamma(x)).$$

Отображение ψ определено вблизи точки a; мы его будем рассматривать только в близких к a точках конуса M.

Так как $a \in F$, $a \in \Gamma$, то $f(a) = \gamma(a) = a$, и потому $\psi(a) = a$, т. е. условие 1° в определении шатра выполнено. Далее, так как $\psi(x) - x = f(x) - \gamma(x) = o(x - a)$, то выполнено и условие 2°. Остается проверить условие 3°. Так как $f(x) \in F$, то $g(f(x)) = 0$. Следовательно

$$g(\psi(x)) = g(\psi(x)) - g(f(x)) = (\psi(x) - f(x)) \operatorname{grad} g(\xi) = \\ = (x - \gamma(x)) \operatorname{grad} g(\xi),$$

где ξ — некоторая точка отрезка, соединяющего точки $\psi(x)$ и $f(x)$. Но при $x \in M$ мы имеем $x - \gamma(x) = \lambda(x) \operatorname{grad} g(a)$, где $\lambda(x) \leqslant 0$. Далее, если точка x (а потому и ξ) достаточно близка к a, то

$$\operatorname{grad} g(a) \cdot \operatorname{grad} g(\xi) > 0.$$

Следовательно

$$g(\psi(x)) = (x - \gamma(x)) \operatorname{grad} g(\xi) = \lambda(x) \operatorname{grad} g(a) \cdot \operatorname{grad} g(\xi) \leqslant 0,$$

и потому $\psi(x) \in \Omega$. Таким образом, условие 3° также выполнено.

Замечание 1. Обозначим через Ω^* множество, содержащее точку a и все точки $x \in E^n$, для которых $g(x) < 0$. Таким образом, $\Omega^* \subset \Omega$. Тогда при условиях теоремы 2 можно сформулировать более сильное утверждение: *M есть шатер множества Ω^* в точке a.*

В самом деле, положим

$$\psi^*(x) = \psi(x) - |\gamma(x) - a|^2 \operatorname{grad} g(a).$$

Тогда $\psi^*(x) = \psi(x) + o(x - a)$, и потому отображение ψ^*, так же как и ψ, удовлетворяет условиям 1° и 2° в определении шатра.

Далее, если $\gamma(x) \neq a$, то

$$g(\psi^*(x)) - g(\psi(x)) = (\psi^*(x) - \psi(x)) \operatorname{grad} g(\xi^*) = \\ = -|\gamma(x) - a|^2 \operatorname{grad} g(a) \cdot \operatorname{grad} g(\xi^*) < 0$$

(здесь ξ^* — некоторая точка отрезка, соединяющего точки $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$). Следовательно, $g(\psi^*(x)) < g(\psi(x)) \leqslant 0$, и потому $\psi^*(x) \in \Omega^*$.

Если же $\gamma(x) = a$, т. е. $x = a + \lambda \operatorname{grad} g(a)$, где $\lambda \leqslant 0$, то $\psi^*(x) = \psi(x) = x$, и потому также $\psi^*(x) \in \Omega^*$. Таким образом, в любом случае $\psi^*(x) \in \Omega^*$ (для точек $x \in M$, достаточно близких к a), т. е. условие 3° также выполнено.

Замечание 2. Отображение ψ, построенное в теореме 2, является гладким (имеет вблизи точки a непрерывные первые производные). В теореме 1 отображение ψ, вообще говоря, этим свойством не обладает, хотя его можно было бы „подправить", сделав гладким. Легко привести и такой пример, где отображение ψ, участвующее в определении шатра, невозможно сделать гладким. Именно, рассмотрим на плоскости (x, y) бесконечнозвенную ломаную $a_0a_1a_2a_3\cdots$ с вершинами

$$x_i=(2^{-i},\ 3^{-i}),\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Добавив к этой ломаной точку $x=(0, 0)$, мы получим замкнутое множество на плоскости, которое обозначим через Ω. Далее, через M обозначим положительную полуось абсцисс. Наконец, за ψ примем проектирование отрезка $[0, 1]$ оси абсцисс на множество Ω параллельно оси Oy. Это отображение ψ удовлетворяет условиям 1°—3°, так что M есть шатер множества Ω в точке a. Легко видеть, что гладкого отображения ψ, обладающего требуемыми свойствами, не существует.

Перейдем к формулировке и доказательству основной теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_s$ — некоторые множества, расположенные в E^n и имеющие общую точку a, и пусть $M_1, M_2, \cdots, M_s$ — шатры множеств $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_s$ в точке a. Если система выпуклых конусов $M_1, M_2, \cdots, M_s$ не обладает свойством отделимости* [4] *и хотя бы один из этих конусов не является плоскостью, то найдется отличная от a точка $x\in\Omega_1\cap\Omega_2\cap\cdots\cap\Omega_s$.*

Прежде чем переходить к доказательству этой теоремы в общем случае, приведем рассуждение, проясняющее геометрический смысл этой теоремы и дающее ее доказательство в случае, когда для каждого $i=1,\cdots, s$ существует, гладкое отображение ψ_i, определенное в близких к a точках несущей плоскости, конуса M_i и удовлетворяющее условиям 1°—3°. Согласно теореме 8 работы [4], существует точка

$$b\in(\mathrm{int}_{rel}\, M_1)\cap(\mathrm{int}_{rel}\, M_2)\cap\cdots\cap(\mathrm{int}_{rel}\, M_s)$$

и, кроме того, существуют такие подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_s$, в прямую сумму которых распадается пространство E^n, что при любых $i\neq j$ $(i, j=1,\cdots, s)$ плоскость L_i', параллельная подпространству L_i и проходящая через точку b, содержится в несущей плоскости конуса M_j.

Выберем для каждого $i=1, 2,\cdots, s$ в несущей плоскости N_i конуса M_i такой открытый шар E_i с центром a, что E_i содержится в области определения отображения ψ_i. Тогда $\psi_i(E_i)$ есть гладкое многообразие (размерности $\dim N_i$) в пространстве E^n, проходящее через точку a и имеющее в точке a касательную плоскость $N_i (i=1, 2, \cdots, s)$.

Докажем, что при любом $j=1, 2,\cdots, s$ пересечение $\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j(E_j)$ представляет собой вблизи точки a гладкое многообразие, имеющее в точке a касательную плоскость $N_1\cap\cdots\cap N_j$. При

$j=1$ это утверждение справедливо. Допустим, что оно справедливо для некоторого $j<s$, и докажем его справедливость для числа $j+1$, т. е. докажем, что $\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j(E_j)\cap\psi_{j+1}(E_{j+1})$ есть гладкое многообразие, имеющее в точке a касательную плоскость $N_1\cap\cdots\cap N_j\cap N_{j+1}$. Так как

$$\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j(E_j)\cap\psi_{j+1}(E_{j+1})=(\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j(E_j))\cap\psi_{j+1}(E_{j+1}),$$

причем $\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j(E_j)$ и $\psi_{j+1}(E_{j+1})$ являются вблизи a гладкими многообразиями, имеющими в точке a касательные плоскости $N_1\cap\cdots\cap N_j$ и N_{j+1}, то достаточно установить, что $N_1\cap\cdots\cap N_j$ и N_{j+1} не лежат в одной гиперплоскости. Но это непосредственно вытекает из того, что $L_i'\subset N_1\cap\cdots\cap N_j$ при $i=j+1,\cdots,s$ и $L_i'\subset N_{j+1}$ при $i=1,\cdots,j$. Таким образом, наше утверждение доказано для всех $j=1,\cdots,s$. В частности, при $j=s$ мы находим, что $\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_s(E_s)$ представляет собой вблизи точки a гладкое многообразие, имеющее в точке a касательную плоскость $N_1\cap\cdots\cap N_s$.

Заметим, что точка b не совпадает с a, так как, по предположению, хотя бы один из конусов $M_1,\cdots,M_s$ не является плоскостью и для этого конуса a является граничной точкой относительно его несущей плоскости. Так как $b\in N_1\cap\cdots\cap N_s$, то на многообразии $\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_s(E_s)$ существует кривая Λ, исходящая из точки a и касающаяся луча l_b с началом a, проходящего через точку b.

Отображение $\psi_j\colon E_j\to\psi_j(E_j)$ является (если шар E_j достаточно мал) взаимно однозначным, т. е. существует отображение $\varphi_j:\psi_j(E_j)\to\to E_j$, обратное к ψ_j. Это означает, в частности, что $\psi_j(\varphi_j(x))=x$ для любой точки $x\in\psi_j(E_j)$, причем отображение φ_j, как и ψ_j, имеет тождественное отображение своим касательным отображением в точке a. Следовательно, кривая $\varphi_j(\Lambda)$, расположенная в шаре E_j, также касается луча l_b в точке a. А так как точка $b\in l_b$ является внутренней точкой конуса M_j относительно его несущей плоскости, то найдется на кривой $\varphi_j(\Lambda)$ такая точка c_j, что вся дуга этой кривой от точки a до c_j принадлежит конусу M_j. Следовательно, вся дуга кривой $\psi_j(\varphi_j(\Lambda))=\Lambda$ от точки a до точки $c_j'=\psi_j(c_j)$ принадлежит множеству $\psi_j(M_j\cap E_j)\subset\Omega_j$. При этом $c_j'\neq a$, так как отображение ψ_j взаимно однозначно.

Указанное положение вещей имеет место для любого $j=1,\cdots,s$. Таким образом, вся дуга кривой Λ от точки a до некоторой отличной от a точки c содержится в множестве $\Omega_1\cap\cdots\cap\Omega_s$, откуда и вытекает справедливость теоремы 3.

Если ограничиться этой версией доказательства (т. е. дополнительно потребовать в теореме 3, что $\psi_1,\cdots,\psi_s$ — гладкие отображения), то придется ограничиваться такими множествами Ω_i и такими их шатрами M_i, для которых существует гладкое отображение ψ_i, удовлетворяющее условиям 1°—3°. Пример, указанный в замечании 2, показывает, что гладкое отображение ψ_i требуемого вида существует не всегда, т. е. намеченное выше доказательство позволяет получить лишь более слабый результат, чем сформулированный в теореме 3.

ПР-15199

Доказательство теоремы 3. Как и выше, мы выберем отличную от a точку

$$b \in (\operatorname{int}_{rel} M_1) \cap (\operatorname{int}_{rel} M_2) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{rel} M_s)$$

и подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_s$. Положим $r_i = n - \dim L_i$, $i=1, \cdots, s$. Тогда

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_s - (s-1)\, n = n - (\dim L_1 + \cdots + \dim L_s) = 0.$$

Через G_j обозначим плоскость наименьшей размерности, проходящую через точку b и содержащую все плоскости $L'_1, \cdots, L'_s$, кроме L'_j (где, напомним, L'_j - плоскость, проходящая через точку b и параллельная подпространству L_j). Из этого следует, что C_j содержится в несущей плоскости конуса M_j. Плоскость G_j имеет размерность $n - \dim L_j = r_j$, т. е. плоскости L'_j и G_j пересекаются в одной точке и имеют дополнительные размерности. При $i \neq j$ справедливо включение $L'_i \subset G_j$.

Выберем для каждого $j=1, 2, \cdots, s$ выпуклый многогранник P_j, имеющий G_j своей несущей плоскостью и содержащий точку b внутри себя. Мы будем при этом предполагать, что многогранник P_j замкнут, содержится целиком в конусе M_j, и точка a ему не принадлежит. Так как пересечение $G_1 \cap \cdots \cap G_s$ состоит только из одной точки b, то и пересечение $P_1 \cap \cdots \cap P_s$ содержит только одну точку b, которая является внутренней точкой каждого из многогранников P_j относительно его несущей плоскости. Из этого вытекает, что

$$(\operatorname{bd} P_j) \cap (\bigcap_{i \neq j} P_i) = \varnothing$$

для любого $j=1, \cdots, s$, где $\operatorname{bd} P_j$ означает границу многогранника P_j. Поэтому существует такое число $\delta > 0$, что

$$(U_{2\delta}(\operatorname{bd} P_j)) \cap (\bigcap_{i \neq j} U_{2\delta}(P_i)) = \varnothing$$

для любого $j=1, \cdots, s$, где $U_r(Q)$ означает r-окрестность множества $Q \subset E^n$. Мы будем, кроме того, предполагать число δ настолько малым, что $a \,\overline{\in}\, U_\delta(P_j)$, $j = 1, \cdots, s$.

Так как M_j является шатром множества Ω_j в точке a, то существует отображение ψ_j (не предполагаемое гладким), определенное вблизи вершины a конуса M_j и удовлетворяющее условиям 1°—3°. Область определения отображения ψ_j обозначим через M^*_j (таким образом, все достаточно близкие к a точки конуса M_j принадлежат множеству M^*_j).

Обозначим теперь через g_ε гомотетию с центром a и коэффициентом $\varepsilon > 0$, т. е. $g_\varepsilon(x) = a + \varepsilon(x-a)$. Легко видеть, что

$$g_\varepsilon(U_\gamma(Q)) = U_{\gamma\varepsilon}(g_\varepsilon(Q)).$$

Из этого вытекает, что для любого $j=1, \cdots, s$ справедливы соотношения:

$$U_{2\delta\varepsilon}(\operatorname{bd} g_\varepsilon(P_j)) \cap (\bigcap_{i \neq j} U_{2\delta\varepsilon}(g_\varepsilon(P_i))) = \varnothing, \tag{1}$$

$$a \in U_{\delta\varepsilon}(g_\varepsilon(P_j)).$$

Так как отображения ψ_j ($j=1, \cdots, s$) удовлетворяют условию 2° в определении шатра, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $j=1, \cdots, s$ выполнено при $x \in g_\varepsilon(P_j)$ неравенство

$$\rho(x, \psi_j(x)) < \delta\varepsilon. \tag{2}$$

Мы выберем такое число ε и более менять его не будем.

Докажем теперь, что пересечение

$$\psi_1(g_\varepsilon(P_1)) \cap \cdots \cap \psi_s(g_\varepsilon(P_s)) \tag{3}$$

непусто. Допустим, напротив, что это пересечение пусто; тогда существует такое число $\gamma > 0$, что пустым будет и пересечение

$$U_\gamma(\psi_1(g_\varepsilon(P_1))) \cap \cdots \cap U_\gamma(\psi_s(g_\varepsilon(P_s))). \tag{4}$$

При этом мы можем дополнительно считать, что $\gamma < \delta\varepsilon$.

Теперь мы используем некоторые понятия и факты из алгебраической топологии (а именно, из теории пересечений [1], [2]). Разобьем многогранник $g_\varepsilon(P_j)$ на симплексы (размерности r_j) и формальную сумму всех этих симплексов будем рассматривать как r_j-мерную цепь (по модулю 2), которую обозначим через ξ_j. Границу (по модулю 2) цепи ξ_j обозначим через $d\xi_j$. Далее, для любой точки $x \in g_\varepsilon(P_j)$ обозначим через $\Phi_t(x)$ точку $tx + (1-t)\psi_j(x)$. Тогда Φ_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, представляет собой *непрерывную деформацию* множества $g_\varepsilon(P_j)$, причем в результате этой деформации точка x смещается на расстояние $|x-\psi_j(x)| < \delta\varepsilon$. При этой деформации из цепи ξ_j возникнет (r_j+1)-мерная *непрерывная* цепь $D(\xi_j)$ (называемая также „деформационной" цепью), а из цепи $d\xi_j$ возникнет непрерывная r_j-мерная цепь $D(d\xi_j)$, причем

$$d(D(\xi_j)) = \xi_j + \psi_j(\xi_j) + D(d\xi_j),$$

где $\psi_j(\xi_j)$ — непрерывная r_j-мерная цепь, являющаяся образом цепи ξ_j при отображении ψ_j. В силу (2), цепи $D(\xi_j)$ и $\psi_j(\xi_j)$ расположены в $U_{\delta\varepsilon}(g_\varepsilon(P_j))$, а цепь $D(d\xi_j)$ расположена в $U_{\delta\varepsilon}(\mathrm{bd}\, g_\varepsilon(P_j))$.

Разобьем теперь пространство E^n на симплексы, каждый из которых имеет диаметр, меньший γ. Применив теперь к цепям $D(\xi_j)$, $\psi_j(\xi_j)$, $D(d\xi_j)$ „симплициальную аппроксимацию", мы получим из них симплициальные цепи ζ_j^*, ζ_j, η_j, удовлетворяющие соотношениям

$$d\zeta_j^* = \xi_j + \zeta_j + \eta_j, \quad d\zeta_j = d\xi_j + d\eta_j.$$

При этом цепи ζ_j^*, ζ_j, η_j расположены в γ-окрестностях (и, подавно, в $\delta\varepsilon$-окрестностях), соответственно, цепей $D(\xi_j)$, $\psi_j(\xi_j)$, $D(d\xi_j)$. Следовательно, цепи ζ_j^* и ζ_j расположены в $U_{2\delta\varepsilon}(g_\varepsilon(P_j))$, а цепь η_j расположена в $U_{2\delta\varepsilon}(\mathrm{bd}\, g_\varepsilon(P_j))$.

Мы можем при этом предполагать, что в необходимых случаях выполнено условие общности положения, так что можно рассматривать пересечения построенных цепей (операция пересечения отмечается знаком $\times$). Напомним (ср. [2], стр. 112), что граница пересечения цепей вычисляется, для случая цепей по модулю 2, по формуле

$$d(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_s) = (d\delta_1) \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_s +$$
$$+ \delta_1 \times (d\delta_2) \times \delta_3 \times \cdots \times \delta_s + \cdots + \delta_1 \times \cdots \times \delta_{s-1} \times (d\delta_s). \qquad (5)$$

Рассмотрим цепь

$$\lambda_l = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \zeta_l^* \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s, \quad l = 1, \cdots, s.$$

Размерность этой цепи равна

$$\dim \lambda_l = r_1 + \cdots + r_{l-1} + (r_l + 1) + r_{l+1} + \cdots + r_s - (s-1)\, n = 1.$$

Согласно формуле (5), граница цепи λ_l имеет следующий вид:

$$d\lambda_l = \sum_{j=1}^{l-1} (\cdots \times d\zeta_j \times \cdots \times \zeta_l^* \times \cdots) +$$

$$+ (\cdots \times d\zeta_l^* \times \cdots) + \sum_{j=l+1}^{s} (\cdots \times \zeta_l^* \times \cdots \times d\xi_j \times \cdots), \qquad (6)$$

где многоточия означают невыписанные члены (которые перед ζ_l^* имеют вид ζ_i, а после ζ_l^* имеют вид ξ_i). Рассмотрим слагаемое $\cdots \times d\zeta_j \times \cdots$ $\cdots \times \zeta_l^* \times \cdots$, или, более подробно

$$\zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{j-1} \times d\zeta_j \times \zeta_{j+1} \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \zeta_l^* \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s. \qquad (7)$$

Так как каждая из цепей ζ_l, ζ_l^*, ξ_l расположена в $U_{2\delta_\varepsilon}(g_\varepsilon(P_l))$, а цепь $d\zeta_l = d\xi_l + d\eta_l$ расположена в $U_{2\delta_\varepsilon}(\mathrm{bd}\, g_\varepsilon(P_l))$, то пересечение (7) расположено в множестве (1). Так как это множество пусто, то пересечение (7) равно нулю. По тем же соображениям равно нулю и каждое слагаемое второй суммы, стоящей в правой части соотношения (6). Следовательно, формула (6) принимает вид

$$d\lambda_l = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times d\zeta_l^* \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s.$$

Вспоминая соотношение $d\zeta_l^* = \xi_l + \zeta_l + \eta_l$, мы получаем отсюда

$$d\lambda_l = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \xi_l \times \cdots \times \xi_s +$$
$$+ \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_l \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s + \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \eta_l \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s.$$

Последнее слагаемое в правой части здесь равно нулю (по тем же соображениям, что и прежде), и потому

$$d\lambda_l = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \xi_l \times \cdots \times \xi_s + \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_l \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s.$$

Напишем эти соотношения для $l = 1, \cdots, s$ и сложим все получившиеся таким образом равенства. Мы получим (учитывая, что дважды встречающиеся слагаемые можно в сумме цепей вычеркивать):

$$d(\lambda_1 + \cdots + \lambda_s) = \xi_1 \times \cdots \times \xi_s + \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_s.$$

Вспомним теперь, что цепь ζ_j расположена в γ-окрестности цепи $\psi_j(\xi_j)$ и, следовательно, в множестве $U_\gamma(\psi_j(g_\varepsilon(P_j)))$, а в силу сделанного предположения, множества (3) и (4) пусты. Следовательно, $\zeta_1 \times \cdots \times \zeta_s = 0$, и потому

$$d(\lambda_1 + \cdots + \lambda_s) = \xi_1 \times \cdots \times \xi_s.$$

Но цепь $\xi_1 \times \cdots \times \xi_s$ представляет собой о д н у точку (с коэффициентом 1), так как пересечение $P_1 \cap \cdots \cap P_s$ есть точка b. Мы получили, что граница одномерной цепи $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ есть одна точка, между тем как граница любой одномерной цепи должна состоять из ч е т н о г о числа точек. Полученное противоречие показывает, что пересечение (3) н е п у с т о.

Пусть x_0 — произвольная точка множества (3). Так как

$$x_0 \in \psi_j(g_\varepsilon(P_j)) \subset U_{\varepsilon_0}(g_\varepsilon(P_j)) \text{ и } a \notin U_{\varepsilon_0}(g_\varepsilon(P_j)),$$

то $x_0 \neq a$. Далее, для любого $j = 1, \cdots, s$ мы имеем

$$x_0 \in \psi_j(g_\varepsilon(P_j)) \subset \psi_j(M_j^*) \subset \Omega_j,$$

и потому $x_0 \in \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_s$. Таким образом, точка $x = x_0$—искомая.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 7.III.1972

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻ. Թեորեմ բազմությունների հատման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում է թեորեմ բազմությունների հատման մասին, որը հարմար է օգտագործել որպես ապարատ մաթեմատիկական ծրագրավորման, օպտիմալ կառավարման (ինչպես անընդհատ, այնպես էլ դիսկրետ վարիանտներում) և նման ուրիշ տեսություններում էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններ ստանալու համար։

Այդ թեորեմայի ստացման համար հիմք են ծառայում, մի կողմից, ավելի վաղ հեղինակի կողմից գտնված ուռուցիկ կոների սիստեմի բաժանելիության պայմանները, իսկ մյուս կողմից, հատումների տոպոլոգիական տեսությունը։

V. G. BOLTJANSKIJ. *An intersection theorem* (summary)

In this article a theorem on intersection of sets is proved. The theorem asserts, that if convex cones $K_1, \cdots, K_s$, which are in sense „tangent" to the sets $\Omega_1, \cdots, \Omega_s$ in a point $x_0 \in \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_s$, do not satisfy the separation condition, then there exists a point $b \neq a$, contained in $\Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_s$. This theorem is a convenient tool, in different extremal problems of mathematical programming, optimal controls etc. The proof of the theorem is founded on separation conditions of convex cones, obtained earlier by the author, and on the Lefschetz's topological intersection theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Лефшец*. Алгебраическая топология, ИЛ, М., 1949.
2. *М. Глезерман* и *Л. Понтрягин*. Пересечения в многообразиях, УМН, II, вып. 1, 1947, 58—155.
3. *M. Canon, C. Cullum* and *E. Polak*. Constrained minimization problems in finite-dimensional spaces, J. SIAM Control, 4, № 3, 1966, 528—547.
4. *В. Г. Болтянский*. Свойство отделимости системы выпуклых конусов, Известия АН Арм.ССР, „Математика", VII, № 4, 1972, 250—257.