ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 5, 1972 Математика

М. Б. БАЛК, М. Ф. ЗУЕВ

О ЧИСЛЕ ЗНАЧЕНИЙ, ПРИНИМАЕМЫХ ЦЕЛОЙ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ НЕИЗОЛИРОВАННО

1°. Говорят, что функция $f(z)$, заданная в некоторой области D, принимает значение a **неизолированно**, если множество корней функции $f(z)-a$ имеет в D точку сгущения. Нетрудно привести пример полианалитического* *полинома* любого порядка $n>1$, который принимает неизолированно** бесконечно много значений (и даже каждое принимаемое им значение). Такова, например, функция

$$(z+\bar{z})^{n-1}.$$

Нетрудно привести пример целой *трансцендентной* п. а. функции порядка n, которая принимает $n-1$ значений неизолированно. Такова, например, функция

$$z+\bar{z}+\cos z\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(z+\bar{z}-k),$$

которая принимает неизолированно каждое значение k ($k=1, 2,\cdots, n-1$), а именно, на всей прямой $2x=k$.

Однако, оказывается, что верен такой результат: *принимать неизолированно n различных значений целая трансцендентная n-аналитическая функция не может.*

В данной статье мы намерены установить это предложение (на самом деле мы докажем более общее утверждение—см. ниже, теорему 2).

2°. В ходе доказательства нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если п. а. функция порядка n имеет неизолированный корень, то существует аналитическая дуга, заполненная корнями этой функции.*

Доказательство. В случае бианалитических функций лемма была ранее доказана в [2]. Опираясь на это и на „подготовительную теорему“ Вейерштрасса, рассмотрим общий случай.

Пусть функция

---

* В дальнейшем пишем „п. а.“ вместо слов „полианалитический“ или „полианалитическая“.

** Ниже выражение „аналитический полином“ обозначает, естественно, полином $P(z)$, зависящий явно только от z, но не от $\bar{z}$. Для справок относительно терминологии, принятой в данной заметке, см. нашу статью [1].

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k A_k(z)$$

n-аналитична в некоторой окрестности точки a, причем эта точка является для $f(z)$ неизолированным корнем. Без потери общности можно считать, что $a = 0$. В силу „подготовительной теоремы" Вейерштрасса (см., например, [3]) возможно функцию

$$g(z, w) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} w^k A_k(z)$$

представить в виде такого произведения:

$$g(z, w) = z^{\mu}\, \Omega(z, w) \cdot P_1(z, w) \cdots P_s(z, w),$$

где μ — целое число, $\mu \geqslant 0$, $\Omega(z, w)$ — функция, голоморфная и отличная от нуля в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, а $P_k(z, w)$ $(k = 1, \cdots, s)$ — неприводимые отмеченные псевдополиномы. Если $f(z)$ имеет неизолированный корень, то хотя бы одна из функций $P_k(z, \bar{z})$ должна иметь неизолированный корень. Таким образом, нам достаточно доказать справедливость леммы 1 лишь для п. а. функции, являющейся сужением на плоскость $w = \bar{z}$ некоторого неприводимого отмеченного псевдополинома вида

$$P(z, w) = \sum_{k=0}^{m-1} w^k a_k(z) + w^m$$

(все $a_k(z)$ аналитичны в точке $z = 0$).

В силу „теоремы о явном задании аналитической поверхности" (см. [3], стр. 98) уравнение

$$P(z, w) = 0$$

в некоторой окрестности Δ точки $(0, 0)$ равносильно совокупности m уравнений вида

$$w - A(\sqrt[m]{z}) = 0,$$

где $A(\zeta)$ — голоморфная функция в точке $\zeta = 0$. Для каждой точки (z, w) из Δ, лежащей в плоскости $w = \bar{z}$ и обращающей в нуль функцию $P(z, w)$, имеем, что

$$\bar{z} - A(\sqrt[m]{z}) = 0$$

хотя бы при одном значении корня $\sqrt[m]{z}$. Перейдем к новому переменному ζ путем замены: $z = \zeta^m$. Тогда хотя бы для одного ζ, удовлетворяющего последнему условию, имеем $\bar{\zeta}^m - A(\zeta) = 0$. Так как (по условию) точка $z = 0$ — предел последовательности $\{z_\nu\}$ корней функции $P(z, \bar{z})$, то должна найтись такая последовательность $\{\zeta_\nu\}$, что при $\nu \to \infty$

$$\zeta_\nu \to 0 \text{ и } \bar{\zeta}_\nu^m - A(\zeta_\nu) = 0.$$

Отсюда (рассуждая, как в [2]) легко убедиться, что $A(\zeta) \equiv \zeta^m a(\zeta)$, где $a(\zeta)$ — аналитическая функция в точке $\zeta=0$ и $a(0) \neq 0$. Поэтому можно $\bar{\zeta}^m - A(\zeta)$ записать так:

$$\bar{\zeta}^m - A(\zeta) \equiv \prod_{k=1}^{m} [\bar{\zeta} - \lambda_k \theta(\zeta)], \tag{1}$$

где λ_k $(k=1, \cdots, m)$ — корни из единицы, а $\theta(\zeta)$—одна из ветвей функции $\sqrt[m]{a(\zeta)}$. Так как точка $\zeta=0$ является неизолированным корнем для функции (1), то эта точка—неизолированный корень хотя бы одной из бианалитических функций $\bar{\zeta} - \lambda_k \theta(\zeta)$. Следовательно (в силу того, что доказываемая лемма справедлива для бианалитических функций), наверняка найдется такая аналитическая дуга γ $\{\zeta = \lambda(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, каждая точка которой является корнем функции (1); можно считать, что $\lambda(\alpha)=0$ (т. е. одним концом „дуги корней" служит предельная точка для корней). При отображении $z = \zeta^m$ дуга γ перейдет в некоторую аналитическую дугу Γ (имеющую своим концом точку $z=0$). Тем самым лемма доказана.

3°. В статье [2] было установлено, что мероморфная бианалитическая функция $B(z)$, имеющая неизолированный корень, представима в виде

$$B(z) \equiv M(z) \cdot V(z), \tag{2}$$

где $M(z)$ — мероморфная аналитическая функция, а $V(z)$— вырожденная п. а. функция (т. е. осуществляющая вырожденное отображение). Учитывая приведенное в [4] явное выражение для вырожденных мероморфных бианалитических функций, можно в этом утверждении считать $V(z)$ вещественнозначным полиномом. Очевидно, что приведенная выше формула (2) остается в силе и для функции, являющейся произведением нескольких мероморфных бианалитических функций, каждая из которых имеет неизолированный корень. Если же функция $B(z)$ является произведением мероморфных бианалитических функций, среди которых некоторые имеют неизолированные корни, а другие имеют лишь изолированные корни, то для нее, очевидно, представление (2) тоже останется в силе, если под $M(z)$ понимать мероморфную п. а. функцию, имеющую лишь изолированные корни.

Мы намерены доказать, что такое же представление возможно и для каждой мероморфной п. а. функции; а именно, верна следующая

Теорема 1. *Всякая мероморфная п. а. функция представима в виде произведения мероморфной п. а. функции, имеющей лишь изолированные корни, на вещественнозначный п. а. полином.*

Доказательство. Сначала рассмотрим целую п. а. функцию $\Pi(z)$ точного порядка $n \geqslant 2$, которую будем предполагать неприводимой в классе всех таких функций*:

* Иначе говоря, $\Pi(z)$ не может быть представлена в виде произведения двух целых полианалитических, но не аналитических функций.

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k e_k(z),$$

где все $e_k(z)$ — целые аналитические функции. Будем еще предполагать, что $\Pi(z)$ имеет неизолированный корень. Понятно, что $\Pi(z)$ всегда можно записать в виде

$$\Pi(z) \equiv e(z) \cdot \pi(z), \tag{3}$$

где $e(z)$ — целая аналитическая функция, а функция

$$\pi(z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k a_k(z) \tag{3'}$$

— целая п. а. функция, у которой все аналитические компоненты $a_k(z)$ ($k=0, 1, \cdots, n-1$) не имеют общего корня, причем $\pi(z)$ тоже неприводима (в вышеуказанном смысле).

Построим две вспомогательные целые функции (целые псевдополиномы) двух независимых комплексных переменных:

$$A(z, w) = \sum_{k=0}^{n-1} w^k a_k(z), \tag{4}$$

$$B(z, w) = \overline{A(\bar{w}, \bar{z})} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k b_k(w), \tag{5}$$

где

$$b_k(w) = \overline{a_k(\bar{w})}.$$

Докажем, что найдется такая целая аналитическая функция $h(z, w)$, что

$$A(z, w) \equiv B(z, w) \exp h(z, w). \tag{6}$$

Воспользуемся тем, что каждый целый делитель целого псевдополинома* также является, с точностью до сомножителя, являющегося целой функцией без корней, целым псевдополиномом ([5]). Из теоремы Пуанкаре ([6], стр. 219) следует, что должны найтись такие целые функции $a(z, w)$, $b(z, w)$ и $D(z, w)$, что

1) $$A(z, w) \equiv D(z, w) \cdot a(z, w), \quad B(z, w) \equiv D(z, w) \cdot b(z, w), \tag{7}$$

2) в каждой точке (z_0, w_0), где $a(z, w)$ и $b(z, w)$ одновременно обращаются в нуль, ростки функций $a(z, w)$ и $b(z, w)$ взаимно просты в кольце ростков голоморфных в этой точке функций.

Если бы функция $D(z, w)$ не обращалась нигде в нуль, то при любом выборе корня z_0 функции $\pi(z)$ точка $(z_0, \bar{z}_0)$ оказалась бы общим корнем функций $a(z, w)$ и $b(z, w)$. Следовательно, эта точка

---

* Функция $D(z, w)$ называется целым делителем целой функции $G(z, w)$, если $D(z, w)$ — целая функция и существует такая целая функция $H(z, w)$, что

$$G(z, w) \equiv D(z, w) \cdot H(z, w).$$

оказалась бы точкой неопределенности для мероморфной функции $A(z, w)/B(z, w)$. Так как множество всех корней функции $\pi(z)$ имеет по условию (конечную) точку сгущения, то оно содержит аналитическую дугу (см. лемму 1); поэтому множество всех точек $(z_0, \bar{z}_0)$, являющихся в C^2 точками неопределенности мероморфной функции $A(z, w)/B(z, w)$, не является дискретным. А это невозможно для мероморфной функции двух комплексных переменных (см. [3], стр. 157).

Итак, существуют точки (z, w), в которых $D(z, w)$ обращается в нуль. Следовательно, $D(z, w)$ представима в виде

$$D(z, w) \equiv H(z, w) \cdot d(z, w),$$

где $d(z, w)$—псевдополином (по w), а $H(z, w)$—целая функция, которая вовсе не имеет корней. Известно, что в таком случае найдется такая целая функция $\gamma(z, w)$, что $H(z, w) \equiv \exp \gamma(z, w)$, так что

$$D(z, w) \equiv d(z, w) \exp \gamma(z, w). \tag{8}$$

Покажем, что $a(z, w)$ нигде в C^2 не обращается в нуль. Действительно, допустим противное; тогда $a(z, w)$ представима в виде

$$a(z, w) \equiv \alpha(z, w) \cdot \exp \delta(z, w),$$

где $\delta(z, w)$—целая аналитическая функция от z и w, а $\alpha(z, w)$ — псевдополином по w, обращающийся в нуль хотя бы в одной точке. Но тогда

$$A(z, w) \equiv d(z, w) \cdot \alpha(z, w) \exp E(z, w), \tag{9}$$

где $E(z, w) = \gamma(z, w) + \delta(z, w)$. Так как при каждом z хотя бы одна из аналитических компонент $a_k(z)$ псевдополинома $A(z, w)$ (согласно оговорке, сделанной в начале доказательства) не обращается в нуль, то тем же свойством обладают псевдополиномы $d(z, w)$ и $\alpha(z, w)$ (и, следовательно, их точная степень по w выше нулевой). Функцию $E(z, w)$ можно разложить в ряд Хартогса:

$$E(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(z) w^k,$$

где все $E_k(z)$ — целые аналитические функции. Невозможно, чтобы хотя бы при одном $k \geqslant 1$ было $E_k(z) \not\equiv 0$, ибо, выбрав z_0 так, чтобы хоть одно из чисел $E_k(z_0)$ $(k \geqslant 1)$ было отлично от нуля, мы получили бы из (9), что

$$\exp E(z_0, w) \equiv \frac{A(z_0, w)}{d(z_0, w) \cdot \alpha(z_0, w)},$$

а это явно невозможно (трансцендентная функция не может оказаться равной рациональной); следовательно

$$E(z, w) \equiv E_0(z),$$

$$A(z, w) = d(z, w) \cdot \alpha(z, w) \cdot \exp E_0(z). \tag{10}$$

Отсюда видно, что псевдополином $A(z, w)$ приводим в кольце целых псевдополиномов; поэтому п. а. функция $\Pi(z)$ приводима в классе целых п. а. функций, что противоречит ограничению, наложенному на $\Pi(z)$ в начале доказательства.

Итак, $a(z, w)$ действительно не имеет корней, т. е.

$$a(z, w) = \exp h_1(z, w),$$

где $h_1(z, w)$ — целая аналитическая функция.

Аналогичные рассуждения применимы и к функции $b(z, w)$, если воспользоваться тем, что $B(z, w)$ — псевдополином (по z); получим, что $b(z, w) = \exp h_2(z, w)$, где $h_2(z, w)$ — целая аналитическая функция. Из (7) следует равенство (6):

$$A(z, w) \equiv B(z, w) \cdot \exp h(z, w), \tag{6}$$

где $h \equiv h_1 - h_2$ — целая аналитическая функция. Мы ниже убедимся, что $h(z, w)$ не зависит от w. Сначала докажем более слабый факт: *возможно подобрать n различных чисел $w_1, w_2, \cdots, w_n$ так, чтобы каждая разность*

$$h(z, w_k) - h(z, w_1) \quad (k = 2, 3, \cdots)$$

была постоянной (не зависела от z).

Допустим противное, тогда замечаем, что при любом выборе числа w_{2n} должны существовать еще такие $2n-1$ чисел w_k $(k=1, 2, \cdots, 2n-1)$, что каждая из разностей

$$h(z, w_k) - h(z, w_l) \not\equiv \text{const}$$
$$(k, l = 1, 2, \cdots, 2n;\ k \neq l).$$

Из (4) и (6) получаем

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(z)\, w_k^\nu = B(z, w_k) \exp h(z, w_k) \tag{11}$$
$$(k=1, 2, \cdots, n),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(z)\, w_k^\nu = B(z, w_k) \exp h(z, w_k) \tag{12}$$
$$(k = n+1, n+2, \cdots, 2n).$$

Из каждой системы (11) и (12) найдем $a_{n-1}(z)$. Получим

$$a_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B(z, w_k) \exp h(z, w_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} B(z, w_{n+k}) \exp h(z, w_{n+k}), \tag{13}$$

где λ_k $(k=1, \cdots, 2n)$ — константы, $B(z, w_k)$ — полиномы от z. Воспользуемся следующим фактом, который представляет собой частный случай более общего результата, полученного Э. Борелем в [7]: если $H_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, m)$ — такие целые функции, что

$$H_\nu(z) - H_\mu(z) \not\equiv \text{const при } \nu \neq \mu,$$

а $p_\nu(z)$ — полиномы, то тождество

$$\sum_{\nu=1}^{m} p_\nu(z) \exp H_\nu(z) \equiv 0$$

возможно лишь тогда, когда $p_\nu(z) \equiv 0$ при $\nu=1,\cdots, m$. Применяя это предложение к тождеству (13), получаем, в частности, что

$$\lambda_{2n} B(z, w_{2n}) \equiv 0.$$

Но из (12)—(13) ясно, что $\lambda_{2n} \neq 0$, ибо

$$\lambda_{2n} = \frac{V(w_{n+1}, w_{n+2}, \cdots, w_{2n-1})}{V(w_{n+1}, w_{n+2}, \cdots, w_{2n})}$$

(числитель и знаменатель — определители Вандермонда). Поэтому $B(z, w_{2n}) \equiv 0$. Так как это верно при любом w_{2n} и при любом z, то, в частности, $B(\overline{z}, z) \equiv 0$, т. е. $\pi(z) \equiv 0$, вопреки сделанному в начале доказательства ограничению, согласно которому $\pi(z)$—п. а. функция точного порядка $n \geqslant 2$. Итак, действительно, всегда должны существовать такие числа $w_1, w_2, \cdots, w_n$ и такие константы $c_1, c_2, \cdots, c_n$, что

$$h(z, w_k) - h(z, w_1) \equiv c_k.$$

Но тогда из системы (11) легко найдем, что при $k=0, 1, \cdots, n-1$

$$a_k(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(k)} B(z, w_\nu) \exp h(z, w_\nu) = q_k(z) \exp \theta(z),$$

где $\lambda_\nu^{(k)}$ — константы, $\theta(z) \equiv h(z, w_1)$, $q_k(z)$—некоторый полином от z. В силу (3) и (3′) получаем, что

$$\Pi(z) \equiv E(z) \cdot q(z, \overline{z}), \tag{14}$$

где

$$E(z) \equiv e(z) \cdot \exp \theta(z)$$

—целая аналитическая функция, а

$$q(z, \overline{z}) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k q_k(z)$$

— п. а. полином.

Полином $q(z, \overline{z})$ можно представить в виде

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$—вещественнозначные полиномы. Так как $\Pi(z)$ имеет по условию неизолированный корень, то кривые $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$ имеют бесконечно много общих точек. Известно (см. [8], гл. XVI, п. 75), что это невозможно, если полиномы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ взаимно простые. Следовательно, существуют такие вещественнозначные полиномы (от двух переменных x, y) $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ и $s(x, y) \equiv V(z, \overline{z})$, что $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ взаимно простые и

$$\varphi(x, y) \equiv s(x, y) \cdot \Phi(x, y), \Psi(x, y) = s(x, y)\ \Psi(x, y).$$

Но тогда

$$q(z, \bar{z}) \equiv [\Phi(x, y) + i\,\Psi(x, y)]\ V(z, \bar{z}). \tag{15}$$

Из формулы (14) следует, что

$$\Pi(z) \equiv G(z) \cdot V(z, \bar{z}),$$

где

$$G(z) \equiv E(z) \cdot [\Phi(x, y) + i\,\Psi(x, y)]$$

— целая п. а. функция, имеющая лишь изолированные корни, а $V(z, \bar{z})$ — полином, принимающий на всей z-плоскости лишь вещественные значения. Так как $\Pi(z)$ — *неприводимая* п. а. функция, имеющая неизолированный корень, то $G(z)$ — целая *аналитическая* функция.

Итак, для целой неприводимой п. а. функции, имеющей неизолированный корень, теорема верна. Но отсюда, очевидно, следует справедливость теоремы для произвольной целой п. а. функции. Если еще учтем, что мероморфная п. а. функция представима в виде отношения целой п. а. функции к целой аналитической функции, то убедимся в справедливости теоремы 1 в общем случае.

Отметим еще, что из хода доказательства ясна справедливость следующего факта: всякая целая п. а. функция $f(z)$, являющаяся *произведением неприводимых* целых п. а. функций, каждая из которых имеет неизолированные корни, представима в виде произведения целой аналитической функции $G(z)$ на вещественнозначный п. а. полином $V(z, \bar{z})$;

$$f(z) \equiv G(z)\ V(z, \bar{z}).$$

4°. Теперь обратимся к основной теореме данной статьи.

Теорема 2. *Пусть*

$$f(z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k a_k(z)$$

— целая n-аналитическая функция;

$$p_\nu(z) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

— аналитические полиномы от z, попарно различные между собой ($p_\nu(z) \not\equiv p_\mu(z)$ при $\nu \neq \mu$); E_ν — множество всех точек z-плоскости, в которых $f(z)$ и $p_\nu(z)$ принимают равные значения. Если каждое из n множеств E_ν ($\nu = 1, \cdots, n$) имеет хотя бы одну конечную точку сгущения, то $f(z)$ — п. а. полином.

Доказательство. Рассмотрим целую п. а. функцию

$$\varphi_\nu(z) = f(z) - p_\nu(z) \quad (\nu = 1, \cdots, n).$$

Ее можно представить в виде произведения конечного числа неприводимых целых п. а. функций; хотя бы одна из них (обозначим ее через

$\theta_\nu(z))$ должна иметь неизолированный корень (ибо $\varphi_\nu(z)$ имеет неизолированный корень). Поэтому (см. конец п. 3) возможно $\theta_\nu(z)$ представить в виде

$$\theta_\nu(z) \equiv G_\nu(z)\, V_\nu(z, \bar{z}),$$

где $G_\nu(z)$ — целая аналитическая функция, а $V_\nu(z, \bar{z})$ — вещественнозначный полином. Ясно, что $V_\nu(z, \bar{z})$ имеет неизолированный корень. Множество всех корней полинома $V_\nu(z, \bar{z})$ обозначим через e_ν; понятно, что $e_\nu \subset E_\nu$.

Можно $V_\nu(z, \bar{z})$ записать так:

$$V_\nu(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{m} q_k(z)\, \bar{z}^k,$$

где все $q_k(z)$ — полиномы. В силу леммы 1 множество e_ν должно содержать аналитическую дугу $\gamma_\nu\, \{\bar{z} = A_\nu(z)\}$, где $A_\nu(z)$—некоторая аналитическая (в какой-то области Δ_ν, содержащей дугу γ_ν) функция. Ясно, что на γ_ν и, следовательно, в Δ_ν, имеем

$$V_\nu[z, A_\nu(z)] \equiv 0.$$

Отсюда видно, что $A_\nu(z)$ — элемент некоторой алгебраической функции; его можно аналитически продолжить в каждую точку z-плоскости, за исключением конечного множества точек δ_ν (состоящего из корней полинома $q_m(z)$ и точек дискриминантного множества); это продолжение, для которого сохраним обозначение $w = A_\nu(z)$, также удовлетворяет уравнению

$$V_\nu(z, w) = 0. \tag{16}$$

Убедимся, что все функции

$$A_\nu(z) \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

различны. В самом деле, рассмотрим вспомогательную функцию двух независимых комплексных переменных z и w:

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)\, w^k.$$

Тогда на γ_ν

$$F[z, A_\nu(z)] = F(z, \bar{z}) = f(z) = p_\nu(z),$$

а, следовательно

$$F[z, A_\nu(z)] \equiv p_\nu(z) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n). \tag{17}$$

Если бы оказалось, что $A_\nu(z) \equiv A_\mu(z)$ при $\nu \neq \mu$, то из (17) следовало бы, что $p_\nu(z) \equiv p_\mu(z)$, что противоречит условию теоремы.

Пусть D—какая-либо односвязная область в

$$C - \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu$$

(C — комплексная плоскость). Выберем для каждой функции $A_\nu(z)$ по одной однозначной в D ветви $A_\nu^0(z)$. Из системы уравнений (ср. (17))

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)\,[A_\nu^0(z)]^k = p_\nu(z) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

видно, что все $a_k(z)$ выражаются через функции $A_\nu^0(z)\, p_\nu(z)$ рационально. Так как алгебраические функции образуют поле, то все $a_k(z)$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$—алгебраические функции. Но по условию они — целые. Следовательно, они—полиномы. Отсюда вытекает справедливость теоремы.

Отметим, что теорема, аналогичная теореме 2, может быть получена и для мероморфных п. а. функций.

5°. Некоторые любопытные свойства целых п. а. функций можно получить, если помимо теоремы 1 воспользоваться еще теоремой о факторизации целой п. а. функции с ограниченным множеством нулей [9]. Сначала установим следующее предложение.

Лемма 2. *Если целая трансцендентная п. а. функция $F(z)$ делится (в смысле делимости в классе целых п. а. функций) на п. а. полином точного порядка $m>1$, то множество всех точек, в которых $F(z)$ совпадает с отличным от тождественного нуля п. а. полиномом меньшего порядка, чем m, является неограниченным.*

Действительно, пусть

$$F(z) \equiv p(z, \bar{z}) \cdot \varphi(z, \bar{z}), \tag{18}$$

где $p(z, \bar{z})$— п. а. полином точного порядка $m>1$, $\varphi(z, \bar{z})$—целая п. а. функция; пусть $q(z, \bar{z})$—какой-либо п. а. полином точного порядка $s<m$. Допустим, что множество общих точек у $F(z)$ и $q(z, \bar{z})$ ограниченно. Тогда из упомянутой выше теоремы о факторизации имеем

$$F(z) - q(z, \bar{z}) \equiv h(z, \bar{z}) \cdot \exp A(z), \tag{19}$$

где $A(z)$— целая аналитическая функция, $A(z) \not\equiv \text{const}$, а $h(z, \bar{z})$— п. а. полином. Из (18) и (19) следует, что

$$p(z, \bar{z})\, \varphi(z, \bar{z}) - h(z, \bar{z}) \exp A(z) - q(z, \bar{z}) \equiv 0. \tag{20}$$

Приравнивая нулю аналитические компоненты левой части этого тождества, легко убедиться, что

$$\varphi(z, \bar{z}) \equiv R(z, \bar{z}) \exp A(z),$$

где $R(z, \bar{z})$—некоторый п. а. полином. Но тогда из (20) следует, что $q(z, \bar{z})$ — трансцендентная п. а. функция, что противоречит условию.

Пользуясь леммой 2, нетрудно установить следующие факты.

Теорема 3. *Если множество всех точек совпадения целой п. а. функции $f(z)$ и некоторого аналитического полинома $P(z)$*

ограничено, а множество точек совпадения той же функции с другим аналитическим полиномом $Q(z)$ имеет конечную точку сгущения, то $f(z)$—п. а. полином.

Для доказательства достаточно применить лемму 2 к функции $F(z)=f(z)-Q(z)$, которая в силу теоремы 1 должна делиться на п. а. полином порядка $m>1$.

В частности, при $P(z)\equiv a=\text{const}$ и $Q(z)\equiv b=\text{const}$ получим такое следствие.

Целая п. а. функция, которая одно значение a принимает лишь на ограниченном множестве, а другое значение b $(b\neq a)$—неизолированно, является п. а. полиномом.

Заметим, что теорема 3 не остается в силе, если заменить требование аналитичности полиномов $P(z)$ и $Q(z)$ требованием их полианалитичности. Мы получим контрпример, если положим

$$f(z)=(e^z+1)(\bar{z}\cdot z-1),\quad P(z)=\bar{z}\cdot z-1,\ Q(z)=z\,P(z).$$

Теорема 4. *Пусть $f(z)$—целая трансцендентная аналитическая функция, а $H(z,\bar{z})$—произвольный полианалитический, но не аналитический полином. Множество всех точек комплексной плоскости, в которых $f(z)$ совпадает с $H(z,\bar{z})$, является неограниченным и состоит лишь из изолированных точек.*

Действительно, из допущения, что $f(z)-H(z,\bar{z})$ имеет ограниченное множество корней или хотя бы один неизолированный корень, следует, что справедливо хотя бы одно из тождеств:

$$f(z)-H(z,\bar{z})\equiv P(z,\bar{z})\exp g(z), \tag{21}$$

$$f(z)-H(z,\bar{z})\equiv Q(z,\bar{z})\ \psi(z,\bar{z}), \tag{22}$$

где $g(z)$—целая аналитическая функция, $P(z,\bar{z})$ и $Q(z,\bar{z})$—п. а. полиномы, причем точный порядок полинома $Q(z,\bar{z})$ больше, чем 1; $\psi(z,\bar{z})$—целая п. а. функция. Пользуясь тем, что из совпадения двух п. а. функций в некоторой области следует совпадение их одноименных компонент, легко заключить (рассуждая как при доказательстве леммы 2), что каждое из тождеств (21) и (22) возможно лишь тогда, когда $f(z)$—п. а. полином.

Смоленский педагогический институт

Поступило 8.XII.1971

Մ. Բ. ԲԱԼԿ, Մ. Ֆ. ԶՈՒԵՎ. Ամբողջ բազմաանալիտիկ ֆունկցիայի կողմից ոչ մեկուսացված կերպով ընդունած արժեքների թվի մասին *(ամփոփում)*

Ապացուցվում է, որ n կարգի ամբողջ տրանսցենդենտ բազմաանալիտիկ ֆունկցիան կարող է չմեկուսացված կերպով ընդունել ոչ ավելի, քան n-1 տարբեր արժեքներ։

Այդ պնդումը արտածվում է հոդվածում ապացուցված այն փաստից, որ չմեկուսացված զրո ունեցող յուրաքանչյուր ամբողջ բազմաանալիտիկ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել որպես բազմաանալիտիկ բազմանդամի և միայն մեկուսացված զրոներ ունեցող ամբողջ բազմաանալիտիկ ֆունկցիայի արտադրյալ։

Բերված են նաև պիկարյան տիպի որոշ նոր թեորեմներ։

M. B. BALK, M. F. ZUYEV. *On the number of values which may be accepted by an entire polyanalytic function nonisolatedly* (summary)

It is proved in this article that an entire transcendental polyanalytic function of the order n cannot accept more than $n-1$ values nonisolatedly. This is derived from the possibility of decomposition of every entire polyanalytic function is a product of two factors: a polyanalytic polynomial and an entire polyanalytic function which has only isolated zeros. Some theorems of the Picard type are also discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Б. Балк, М. Ф. Зуев.* О полианалитических функциях, УМН, 25, вып. 5 (155), 1970, 203—226.
2. *М. Б. Балк.* Бианалитические функции с неизолированными a-точками, Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 3, 1964, 7—19.
3. *Б. А. Фукс.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., 1962.
4. *М. Б. Балк.* Вырожденные бианалитические отображения, Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 2, 1964, 9—15.
5. *М. Ф. Зуев.* О делителях целых псевдополиномов, Смоленский матем. сб., 3, 1970, 20—32.
6. *W. F. Osgood.* Lehrbuch der Funktionentheorie, B. 2, 1929.
7. *E. Borel.* Sur les zéros des fonctions entières, Acta mathematica, v. 20, 1897.
8. *М. Бохер.* Введение в высшую алгебру, ГТТИ, М., 1934.
9. *М. Б. Балк.* Целые полианалитические функции с ограниченным множеством нулей, Изв. АН Армянской ССР, „Математика", 1, № 5, 1966, 340—357.