ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

А. А. МЕЛИКЯН

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С НАРУШЕНИЯМИ ИНФОРМАЦИИ

Идеальными условиями информированности в дифференциальных играх являются условия, при которых игрокам в каждый момент времени известен полный фазовый вектор ([1]—[3]). В работах [4], [5] изучались дифференциальные игры с запаздыванием информации. В данной работе, как и в [6], рассматриваются игры, в которых одна из сторон получает информацию о фазовом векторе другой стороны не во все моменты времени, а лишь на части интервала движения. Подобные нарушения информации могут возникать, например, из-за ограниченных возможностей измерения, либо из-за помех, исключающих наблюдения.

1°. Движение двух управляемых объектов (игроков) X, Y описывается уравнениями

$$X\colon \dot{x} = f(t, x, u), \quad Y\colon \dot{y} = g(t, y, v). \tag{1.1}$$

Здесь x, y — фазовые векторы объектов, $x \in E^n$, $y \in E^m$, u, v — векторы управлений, $u \in E^s$, $v \in E^r$, f, g — заданные вектор-функции. Движение рассматривается на фиксированном интервале времени $[t_0, T]$. В начальный момент t_0 фазовые векторы принимают значения

$$x(t_0) = x^0, \; x^0 \in E^n, \; y(t_0) = y^0, \; y^0 \in E^m. \tag{1.2}$$

Векторы управлений стеснены ограничениями

$$u(t) \in U \subset E^s, \; v(t) \in V \subset E^r, \; t \in [t_0, T], \tag{1.3}$$

где U, V — выпуклые компакты.

Опишем условия информированности игрока X. В каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ игроку X точно известен вектор собственных фазовых координат $x(t)$. Фазовый вектор стороны Y и вектор управления $v(t)$ точно известны игроку X лишь в моменты времени $t \in Q$, где Q — заданное множество, $Q \in [t_0, T]$. Множество Q будем считать состоящим из $N+1$ замкнутого интервала $[a_i, b_i]$ (интервалы наблюдения), причем

$$t_0 = a_0 \leqslant b_0 < a_1 < \cdots \leqslant b_{N-1} < a_N \leqslant b_N = T. \tag{1.4}$$

Выполнение равенства $a_i = b_i$ для некоторых (или всех) значений индекса i означает, что наблюдение проводится в изолированный момент времени $t = a_i$. Далее, в моменты времени $t \in (b_i, a_{i+1})$, $i = 0, 1, \cdots, N-1$, игрок X не получает информации о фазовом векторе противника, но располагает информацией, полученной ранее. Таким образом, в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ игроку X известен набор величин $\{t, x(t), y(t'), v(t')\}$, где t' — последний момент наблюдения, равный

$$t'(t) = t, \quad t \in [a_i, b_i], \; i=0, \cdots, N,$$
$$t'(t) = b_i, \quad t \in (b_i, a_{i+1}), \; i=0, \cdots, N-1. \tag{1.5}$$

Игрок X формирует свое управление в момент t, располагая имеющейся информацией, т. е. применяет стратегии в виде функций $u = u(t, x(t), y(t'), v(t'))$. Целью игрока X является минимизация функционала

$$J = F(x(T), y(T)), \tag{1.6}$$

где $F(x, y)$ — заданная функция. Игрок Y противодействует игроку X и реализует свое управление в виде функций времени $v = v(t)$, принадлежащей некоторому классу функций, определенных на $[t_0, T]$ (например, кусочно-непрерывных или суммируемых). Будем предполагать, что условия задачи позволяют получить единственное решение системы (1.1) с учетом (1.2), (1.3). Тогда каждой стратегии u и управлению v соответствует значение $J(u, v)$ функционала (1.6).

Задача 1. Найти оптимальную гарантирующую стратегию u^* стороны X, т. е. стратегию, доставляющую минимакс

$$J^* = \min_u \sup_v J(u, v) = \sup_v J(u^*, v). \tag{1.7}$$

Здесь min берется по стратегиям u, sup — по управлениям v описанного выше типа, удовлетворяющим (1.3). Для решения задачи 1 условия информированности игрока Y оказываются несущественными.

2°. Покажем, что задача 1 сводится к некоторой дифференциально-многошаговой игре с полной информацией. Пусть игрок X применяет некоторую стратегию $u = u_0$, а игрок Y реализует некоторую функцию $v_0(t)$, $t \in [t_0, T]$. Из предположений п. 1 следует, что на интервалах (b_i, a_{i+1}) информация игрока X о фазовом векторе Y не увеличивается и сводится к знанию $y_0(b_i)$. Поэтому траектория $x_0(t)$ игрока X при $t \in (b_i, a_{i+1})$ и вектор $x_0(a_{i+1})$, соответствующие применяемой стратегии, известны в момент b_i. С точки зрения игрока X фазовый вектор $y_0(a_{i+1})$ игрока Y может принять некоторое значение из соответствующей области достижимости. Значение $J(u_0, v_0)$ функционала (1.6) не изменится, если на интервалах (b_i, a_{i+1}) заменить стратегию u_0 любой другой стратегией, переводящей фазовый вектор игрока X из $x_0(b_i)$ в $x_0(a_{i+1})$. Следовательно, движение игроков на интервалах (b_i, a_{i+1}), $i = 0, \cdots, N-1$ можно не рассматривать, разрешая им совершать в моменты b_i импульсы соответствующей интенсивности.

Преобразуем уравнения движения (1.1), используя приведенные соображения. Введем переменную τ (уплотненное время):

$$\tau(t)=\sum_{j=0}^{i-1}(b_j-a_j)+t-a_i,\ t\in[a_i,\ b_i],\ i=0,\cdots,N,$$

$$\tau(t)=\sum_{j=0}^{i}(b_j-a_j),\ t\in(b_i,\ a_{i+1}),\ i=0,\cdots,N-1, \tag{2.1}$$

равную суммарной длительности наблюдений к моменту t. Записав уравнения движения во времени τ, получим

$$X\colon \frac{dx}{d\tau}=f(t(\tau),\ x,\ u)+\sum_{i=0}^{N-1}p_i\delta(\tau-\tau_i),$$

$$Y\colon \frac{dy}{d\tau}=g(t(\tau),\ y,\ v)+\sum_{i=0}^{N-1}q_i\delta(\tau-\tau_i), \tag{2.2}$$

$$\tau_i=\sum_{j=0}^{i}(b_j-a_j),\ i=0,\cdots,N,\ 0<\tau\leqslant\tau_N.$$

Здесь δ—дельта-функция, зависимость $t(\tau)$ есть обращение первого равенства в (2.1). Для определенности будем считать функции $t(\tau)$, $x(\tau)$, $y(\tau)$ непрерывными слева в точках τ_i, $i=0,\cdots,N-1$. Моменты τ_i соответствуют левым концам интервалов отсутствия наблюдений. В эти моменты игроки X и Y выбирают векторы импульсов p_i, q_i, которые подчинены ограничениям

$$p_i+x(\tau_i)\in D_i(x(\tau_i)),\ q_i+y(\tau_i)\in G_i(y(\tau_i)),\ i=0,\cdots,N-1. \tag{2.3}$$

Здесь $D_i(x)$, $G_i(y)$ — области достижимости объектов X, Y, описываемых соотношениями (1.1), (1.3), к моменту $t=a_{i+1}$ при условии, что их фазовые векторы в момент $t=b_i$ равны x и y соответственно. Будем считать, что сторона X в (2.2) применяет стратегии в виде функций

$$u=u(\tau,\ x(\tau),\ y(\tau),\ v(\tau)),\ \tau\in[\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ i=0,\ \cdots,\ N,$$

$$p_i=p_i(x(\tau_i),\ y(\tau_i)),\ i=0,\cdots,N-1. \tag{2.4}$$

Игрок Y на интервалах $[\tau_i, \tau_{i+1})$ реализует некоторые функции времени $v(\tau)$ и выбирает в моменты τ_i векторы скачков q_i, стесненные лишь (2.3). Начальные условия и функционал для объектов (2.2) запишем в виде

$$x=x^0,\ y=y^0,\ \tau=0;\ J=F(x(\tau_N),\ y(\tau_N)). \tag{2.5}$$

Соотношениями (2.2), (1.3), (2.3)—(2.5) описана дифференциально-многошаговая игра с полной информацией для игрока X.

Для решения таких игр можно применить, например, метод динамического программирования, введя в рассмотрение функцию Беллмана $S(x,\ y,\ \tau)$, равную минимальному значению, которое можно гарантировать функционалу (2.5) из позиции $(x,\ y,\ \tau)$. Функция $S(x,\ y,\ \tau)$ должна удовлетворять при $\tau\neq\tau_i$ дифференциальному уравнению Беллмана-Айзекса (см., например, [1]). В точках $\tau=\tau_i$ значения

$S(x, y, \tau_i - 0)$, $S(x, y, \tau_i + 0)$ связаны условиями скачка, аналогичными соотношениям для многошаговых игр. На правом конце $S(x, y, \tau_N) = F(x, y)$.

Задача 2. Найти стратегию вида (2.4) игрока X, доставляющую на траекториях системы (2.2) при начальных условиях (2.5) и ограничениях (1.3), (2.3) минимальное гарантированное значение функционала (2.5).

Найдя стратегию, разрешающую задачу 2, нетрудно осуществить переход к решению исходной задачи 1. Для этого следует перейти в найденной стратегии от уплотненного времени τ ко времени t по соотношениям (2.1). Это даст значение гарантирующей стратегии u^* задачи 1 на интервалах $[a_i, b_i)$. На „пропущенных" же интервалах $[b_i, a_{i+1})$ игрок X может применять любую стратегию, которая переводит его фазовый вектор $x(b_i)$ в вектор $x(b_i) + \overset{*}{p_i}(x(\tau_i), y(\tau_i))$, где $\overset{*}{p_i}$—импульс, предписываемый оптимальной гарантирующей стратегией задачи 2.

Замечание. Пусть $a_i = b_i$, $i = k, k+1, \cdots, k+l$, $l > 0$, $k > 0$, $k + l \leqslant N$, т. е. $l+1$ изолированных моментов наблюдения следуют друг за другом. Из (2.2) видно, что $\tau_k = \tau_{k+1} = \cdots = \tau_{k+l}$. В этом случае будем считать, что игроки в момент $\tau = \tau_k$ уплотненного времени совершают $l+1$ последовательных импульсов. Символы $x(\tau_i)$, $y(\tau_i)$, $i = k, \cdots, k+l$ будут означать фазовые векторы игроков перед i-тым импульсом. Уравнения (2.2) перейдут при этом в уравнения многошагового процесса с $l+1$ шагом

$$x(\tau_{i+1}) = x(\tau_i) + p_i,$$
$$y(\tau_{i+1}) = y(\tau_i) + q_i, \quad i = k, \; k+1, \cdots, k+l,$$

где p_i, q_i подчинены условиям (2.3).

3°. Приведем некоторые обобщения задачи 1, которые допускают сведение к дифференциально-многошаговой игре.

а. Параметры, задающие множество Q, т. е. число $N+1$ интервалов наблюдения и их длительности $b_i - a_i$, $j=0, \cdots, N$ находятся в распоряжении игрока X. Фиксирована лишь суммарная длительность наблюдений. При этом помимо задачи 1 можно ставить задачу об оптимальном распределении времени наблюдения и оптимальном числе интервалов наблюдения.

б. Игрок Y задает в момент t_0 или в процессе движения число N и длительности $a_{i+1} - b_i$, $i = 0, \cdots, N-1$ интервалов отсутствия наблюдений при заданной суммарной их длительности, т. е. может включать помехи. В этом случае можно ставить задачу о наихудшем для игрока X распределении помех.

в. Момент окончания игры не фиксирован. Множество Q задано и может состоять из бесконечного числа интервалов $[a_i, b_i]$, $i=0, 1, \cdots$, распределенных на полуоси $t \geqslant t_0$. Игра считается законченной, когда пара векторов $x(t)$, $y(t)$ попадает впервые на заданное множество $M \subset E^n \times E^m$, причем момент T окончания игры $T \in [a_i, b_i]$, $i=0,1, \cdots$, т. е. игра может окончиться лишь в те моменты времени, когда игрок X

информирован о фазовом векторе Y. Последнее предположение позволяет и в этом случае свести задачу к игре с полной информацией. Как и в постановках а, б, можно считать, что параметры множества Q находятся в распоряжении одного из игроков. При этом можно ограничить суммарную длительность наблюдений, либо длительность отдельного сеанса наблюдений или помех. Функционал может иметь более общий вид, например, $J = F(x(T),\ y(T),\ T)$.

4°. Примеры. 1. Пусть уравнения (1.1), начальные условия (1.2), ограничения (1.3) и функционал (1.6) имеют вид

$$\dot{x} = u,\ \dot{y} = v,\ x(0) = x^0,\ y(0) = y^0,\ x,\ y,\ u,\ v \in E^n,$$
$$|u| \leqslant \mu,\ |v| \leqslant \nu,\ \mu > \nu > 0,\ J = |x(T) - y(T)|. \tag{4.1}$$

Множество Q состоит из $N+1$ точки наблюдения a_i, $i = 0, \cdots, N$, $a_0 = t_0 = 0$, $a_N = T$, т. е. в (1.4) положено $a_i = b_i$, $i = 0, \cdots, N$. Требуется выбрать точки наблюдения $a_i \in [0,\ T]$, $i = 1, \cdots, N-1$ и стратегию u^* стороны X так, чтобы обеспечить минимальное гарантированное значение функционала. При сделанных предположениях уравнения (2.2) будут уравнениями многошагового процесса:

$$x_{i+1} = x_i + (a_{i+1} - a_i)\, u_i,$$
$$y_{i+1} = y_i + (a_{i+1} - a_i)\, v_i,\ i = 0, \cdots, N-1, \tag{4.2}$$

где $x_i = x(a_i)$, $y_i = y(a_i)$, $i=0, \cdots, N$, а векторы скачков имеют вид $p_i = (a_{i+1} - a_i)\, u_i$, $q_i = (a_{i+1} - a_i)\, v_i$, $|u_i| \leqslant \mu$, $|v_i| \leqslant \nu$. Из (2.1) видно, что $\tau_N = 0$ для рассматриваемой задачи, т. е. игроки совершают все N импульсов в момент $\tau = 0$ уплотненного времени. Уравнения (4.2) и задают связь между последовательными импульсами. Функционал J принимает вид

$$J = |x_N - y_N|. \tag{4.3}$$

Определим функцию Беллмана соотношением

$$S(x_n,\ y_n,\ a_n) = \min_{a_{n+1}} \min_{u_n} \max_{v_n} \cdots \min_{a_{N-1}} \min_{u_{N-2}} \max_{v_{N-2}} \min_{u_{N-1}} \max_{v_{N-1}} J,$$
$$n = 0, \cdots, N-2;\ S(x_{N-1},\ y_{N-1},\ a_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \max_{v_{N-1}} J, \tag{4.4}$$
$$|u_i| \leqslant \mu,\ |v_i| \leqslant \nu,\ i = n, \cdots, N-1;\ S(x_N,\ y_N,\ a_N) = |x_N - y_N|.$$

Функция $S(x_n,\ y_n,\ a_n)$ равна минимальному значению, которое можно гарантировать для функционала (4.3) на траекториях системы (4.2) при $i = n, \cdots, N-1$, соответствующим выбором моментов a_i, $i = n+1, \cdots, N-1$ и векторов управлений u_i, $i = n, \cdots, N-1$. Минимумы по a_i в (4.4) берутся по значениям $a_{i-1} \leqslant a_i \leqslant T$, $i = n+1, \cdots$ $\cdots, N-1$. Из (4.4) следует, что функция Беллмана удовлетворяет уравнению и граничному условию

$$S(x_n,\ y_n,\ a_n) = \min_{a_{n+1}} \min_{u_n} \max_{v_n} S(x_{n+1},\ y_{n+1},\ a_{n+1}),\ n=0, \cdots, N-2,$$

$$S(x_{N-1}, y_{N-1}, a_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \max_{v_{N-1}} S(x_N, y_N, T), \quad S(x_N, y_N, T) = |x_N - y_N|, \tag{4.5}$$

где x_{n+1}, y_{n+1} взяты в виде (4.2). Нетрудно теперь, разрешив (4.5), получить решение примера в форме задачи 2. Оптимальными моментами наблюдений будут

$$a_i = T[1-(k^i - k^N)/(1-k^N)], \ k = \nu/\mu, \ i = 0, \cdots, N. \tag{4.6}$$

Гарантированное значение функционала (4.1) равно

$$J^* = S(x^0, y^0, 0) = \max[|x^0 - y^0| - (\mu - \nu)T, \ \mu T k^N (1-k)/(1-k^N)]. \tag{4.7}$$

Оптимальная стратегия игрока X в терминах задачи 1 будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &u^* = \mu(y(t') - x(t))|y(t') - x(t)|^{-1}, \ x(t) \neq y(t'), \\ &u^* = 0, \ x(t) = y(t'), \ t \in [0, T], \end{aligned} \tag{4.8}$$

где t' определено в (1.5).

Перейдя к пределу при $N \to \infty$ в (4.6), (4.7) можно получить счетное множество оптимальных точек наблюдения и гарантированное значение функционала

$$\begin{aligned} &a_i = T(1-k^i), \ i = 0, 1, \cdots, \\ &J^* = \max[|x^0 - y^0| - (\mu - \nu)T, 0]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

При этом оптимальная стратегия игрока X будет иметь тот же вид ($\mu - \nu$).

2. Движение объектов при $t \in [0, T]$ описывается уравнениями, начальными условиями, ограничениями и функционалом

$$\begin{gathered} \ddot{x} = u, \ \ddot{y} = v, \ x(0) = x^0, \ \dot{x}(0) = \xi^0, \ y(0) = y^0, \ \dot{y}(0) = \eta^0, \\ |u| \leqslant \mu, \ |v| \leqslant \nu, \ \mu > \nu > 0, \ x, y, u, v, \xi, \eta \in E^n, \\ J = |x(T) - y(T)|. \end{gathered}$$

Множество Q и цель игрока X те же, что и в примере 1. Применяя аналогичный подход, можно показать, что оптимальная гарантирующая стратегия игрока X имеет вид

$$\begin{gathered} u^* = \mu(\xi(t') - z(t))|\xi(t') - z(t)|^{-1}, \ z(t) \neq \xi(t'), \\ u^* = 0, \ z(t) = \xi(t'), \ t \in [0, T], \qquad (4.10) \\ z(t) = x(t) + (T-t)\dot{x}(t), \ \xi(t) = y(t) + (T-t)\dot{y}(t). \end{gathered}$$

Оптимальные моменты наблюдений и соответствующее минимальное значение функционала оказываются равными

$$\begin{aligned} &a_i = T(1 - [(k^i - k^N)/(1-k^N)]^{1/2}), \ k = \nu/\mu, \ i = 0, \cdots, N, \\ &J^* = \max[|z(0) - \xi(0)| - (\mu - \nu)T^2/2, \ \mu T^2 k^N (1-k)/2(1-k^N)]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Перейдя в (4.11) к пределу при $N \to \infty$, получим счетное число оптимальных точек наблюдения и соответствующее значение функционала

$$a_i = T(1 - k^{i/2}),\ i = 0, 1, \cdots,$$

$$J^* = \max[|z(0) - \xi(0)| - (\mu - \nu)\,T^2/2,\ 0]. \tag{4.12}$$

Гарантирующая стратегия будет иметь вид (4.10).

Отметим, что оптимальные моменты наблюдений, задаваемые в (4.6), (4.9), (4.11), (4.12), при некоторых начальных значениях не являются единственными. Далее, в (4.9) и (4.12) гарантированное значение функционала такое же, как и в соответствующих задачах с полной информацией, т. е. наблюдения в счетном множестве точек $[0, T]$, $i=0, 1, \cdots$, обеспечивают тот же результат, что и непрерывное наблюдение на интервале $[0, T]$. Рассмотрим задачи преследования, соответствующие примерам 1, 2. Поимкой будем считать выполнение условия

$$|x(T) - y(T)| \leqslant l,\ l > 0,$$

причем в момент поимки T должно проводиться наблюдение. Из решений примеров 1, 2 следует, что как и в случае преследования с полной информацией, игрок X может осуществить поимку из некоторого начального состояния соответственно не позже моментов

$$T^* = (|x^0 - y^0| - l)/(\mu - \nu),\ \ T^* = t^*,$$

где t^* — минимальный положительный корень уравнения

$$(\mu - \nu)\,t^2/2 - |x^0 - y^0 + (\xi^0 - \eta^0)\,t| + l = 0.$$

При этом игрок X может ограничиться наблюдением в конечном числе точек. В [7] этот факт доказан для широкого класса игр.

Минимальное число моментов наблюдения N^0+1 зависит от начального состояния и задается соответственно для примеров 1, 2 формулами

$$N^0 = -[(\ln|x^0 - y^0| - \ln l)/\ln k],\ \ N^0 =$$

$$= -[(\ln|x^0 - y^0 + (\xi^0 - \eta^0)\,t^*| - \ln l)/\ln k]. \tag{4.13}$$

Здесь квадратные скобки означают функцию целой части: $[x] = n$, где n—максимальное целое число, не превосходящее x, $x \geqslant n$, $-\infty < x < +\infty$. Соотношения (4.13) можно получить, если при фиксированных начальных данных принять в (4.7) и (4.11) $T = T^*$ и отыскать такое N, чтобы вторые альтернативы в формулах для J^* не превосходили l. Сами моменты наблюдений задаются соотношениями (4.6), (4.11) при $N = N^0$.

Из (4.13) видно, что для примера 1 с увеличением начального расстояния между игроками $|x^0 - y^0|$ минимальное число точек наблюдения растет как его логарифм. В обоих случаях, как следует из (4.13), $N^0 \to \infty$ при $l \to 0$.

3. Пусть движение игроков при $t > 0$ задается уравнениями, начальными данными и ограничениями

$$\dot{x} = u,\ \ \dot{y} = v,\ x(0) = x^0,\ y(0) = y^0,\ x, y \in E^0,$$

$$|u| \leqslant \mu,\ |v| \leqslant \nu,\ \mu > \nu > 0.$$

Множество Q состоит из бесконечного числа интервалов $[a_i, b_i]$, $i=0, 1, \cdots$, $a_0=0$, $\lim a_i = \infty$ при $i \to \infty$. Игра закончена, когда впервые выполняется условие

$$|x(T)-y(T)| \leqslant l,\ l>0,\ T \in [a_i,\ b_i],\ i=0,\ 1, \cdots.$$

Требуется найти: распределение чисел a_i, b_i, $i=0, 1, \cdots$ на полуоси $t \geqslant 0$, $0=a_0 \leqslant b_0 < \cdots < a_i \leqslant b_i < \cdots$, при котором гарантировано окончание игры из любой начальной ситуации x^0, $y^0 \in E^n$, $|x^0-y^0|>l$; минимальное гарантированное время поимки; стратегию, гарантирующую поимку не позже этого времени.

Уравнения (2.2) запишутся для рассматриваемой задачи в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = u + \sum_i (a_{i+1}-b_i)\, u_i \delta(\tau-\tau_i),\ |u|,\ |u_i| \leqslant \mu,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = v + \sum_i (a_{i+1}-b_i)\, v_i \delta(\tau-\tau_i),\ |v|,\ |v_i| \leqslant \nu,\ \tau \geqslant 0. \qquad (4.14)$$

Условия окончания игры (4.14) запишутся в виде $|x(\tau^*)-y(\tau^*)| \leqslant l$, $\tau^* \geqslant 0$. Найдя минимальное гарантированное время поимки в игре (4.14), например, с помощью введения функции Беллмана, можно показать, что в исходной задаче поимка возможна для любых x^0, $y^0 \in E^n$, $|x^0-y^0|>l$ в том и только том случае, когда существуют сколь угодно большие значения N, такие что выполняется

$$k \leqslant (b_N - a_{i+1} + l/\mu)/(b_N - b_i),\ i=0, \cdots, N-1,\ k=\nu/\mu<1. \qquad (4.15)$$

Минимальное гарантированное время поимки $T(x^0, y^0)$ находится следующим образом. Пусть величины T_n, $n=0, 1, \cdots$, определяются соотношениями

$$T_n = \max_{0<i<n} \theta_i,\ \theta_0 = (|x^0-y^0|-l)/(\mu-\nu),$$

$$\theta_i = (\mu a_i - \nu b_{i-1} - l)/(\mu-\nu),\ i=1, \cdots, n,$$

и $n=N$ — минимальный индекс, при котором удовлетворяется неравенство $T_N \leqslant b_N$. Условия (4.15) обеспечивают существование такого индекса. Тогда $T(x^0, y^0)=T_N$.

Если предположить, что интервалы наблюдений имеют одинаковую длительность Δ, $b_i - a_i = \Delta$, а интервалы выключения информации—длительность θ, $a_{i+1}-b_i=\theta$, $i=0, 1, \cdots$, то условия (4.15) запишутся в виде

$$\mu \geqslant [\nu(\Delta+\theta)-l]/\Delta,\ \mu>\nu,$$

а минимальное гарантированное время поимки будет равным

$$T(x^0, y^0) = \max\ [(|x^0-y^0|-l)/(\mu-\nu),\ N(\theta+\Delta)-\theta+(\mu\theta-l)/(\mu-\nu)],$$

где N — минимальное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$(N+1)(\theta+\Delta)-\theta-(|x^0-y^0|-l)/(\mu-\nu) \geqslant 0.$$

Гарантирующая стратегия будет иметь вид (4.8) с той лишь оговоркой, что при $x(t)=y(t')$ стратегию $u^*=0$ следует применять в моменты $t \in (b_i, a_{i+1})$, $i = 0, 1, \cdots$; в моменты времени $t \in Q$ следует применять $u^* = v(t)$.

Автор приносит благодарность Ф. Л. Черноусько за помощь и руководство при выполнении изложенной выше работы.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступило 13.I.1972

Ա. Ա. ՄԵԼԻՔՅԱՆ. Ինֆորմացիայի խափանումներով դիֆերենցիալ խաղերի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտվում են դիֆերենցիալ խաղեր, որոնց խաղացողներից մեկը (հետապնդողը) գիտի հակառակորդի ֆազային վեկտորը ոչ թե շարժման ամբողջ ինտերվալի վրա, այլ նրա մի որոշ մասի վրա։ Խաղի ավարտման ժամանակը կարող է ընտրված լինել նախօրոք, կամ որոշվել ավարտման որևէ պայմաններից։

Ցույց է տրված, որ հետևող խաղացողի մինիմալ ապահովող ստրատեգիան գտնելու խնդիրը ինֆորմացիայի խափանումներով խաղում բերվում է նման խնդրի լրիվ ինֆորմացիայով դիֆերենցիալ-բազմաքայլ խաղի համար։ Բերվում են նման խնդրի հնարավոր ընդհանրացումներ։ Տեսական դիտումները լուսաբանվում են երեք օրինակների լուծումով։

A. A. MELIKIAN. *On differential games with information gaps* (summary)

Differential games in which the pursuer knows his partner's phase vector only at some part of the movement interval are considered. It is shown, that the problem of finding the pursuer's minimal guaranteeing strategy in a game with information gaps may be reduced to the same problem for some differential-manystep game with full information.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Айзекс.* Дифференциальные игры, М., 1967.
2. *Л. С. Понтрягин.* К теории дифференциальных игр, УМН, 21, вып. 4, 1966.
3. *Н. Н. Красовский.* Игровые задачи о встрече движений, М., 1970.
4. *Ф. Л. Черноусько.* О дифференциальных играх с запаздыванием информации, ДАН СССР, 188, № 4, 1969.
5. *Б. Н. Соколов, Ф. Л. Черноусько.* Дифференциальные игры с запаздыванием информации, ПММ, 34, вып. 5, 1970.
6. *А. А. Меликян, Ф. Л. Черноусько.* О дифференциальных играх с переменными условиями информированности, ДАН СССР, 203, № 1, 1972.
7. *П. Б. Гусятников.* Необходимые условия оптимальности в линейной задаче преследования, ПММ, 35, вып. 5, 1971.