ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

Р. Л. ШАХБАГЯН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть A—псевдодифференциальный оператор вида

$$Au=(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}\int\limits_{R^{n+1}} e^{-i(x,\,\xi)}\,a\,(x,\,\xi)\,\tilde u\,(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

где $(x,\,\xi)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}x_k\,\xi_k$, $\tilde u\,(\xi)=\underset{x\to\xi}{F}u\,(x)$ — преобразование Фурье функции $u\,(x)$, R^{n+1} — $(n+1)$-мерное эвклидово пространство, $a\,(x,\,\xi)$ — некоторая функция, называемая символом оператора A.

В случае, когда $a\,(x,\,\xi)$ является полиномом относительно ξ порядка m с главной частью $a_0\,(x,\,\xi)$, оператор A является дифференциальным оператором порядка m; как известно, если $a_0\,(x,\,\xi)$ имеет вид

$$a_0\,(x,\,\xi)=c\prod_{k=1}^{m}(\xi_0-\lambda_k\,(x,\,\xi')),$$

где при любом x и $\xi'\neq 0$ корни $\lambda_k\,(x,\,\xi')$ $(k=1,\,2,\,\cdots,\,n)$ действительны и различны, $\xi=(\xi_0,\,\xi')$, то соответствующий оператор A называется **гиперболическим**.

По аналогии введем следующее*

Определение 1. Мы скажем, что оператор A, задаваемый формулой (1), является **гиперболическим** псевдодифференциальным оператором, если его символ $a_0\,(x,\,\xi)$ имеет вид

$$a_0\,(x,\,\xi)=b\,(x,\,\xi)\prod_{k=1}^{m}(\xi_0-\lambda_k\,(x,\,\xi')),$$

где $\lambda_k\,(x,\,\xi')$ $(k=1,\,2,\,\cdots,\,m)$—действительны и различны при любых x и $\xi'\neq 0$, положительно однородны относительно ξ' порядка 1, а $b\,(x,\,\xi)$ — положительно однородная по ξ функция порядка α при всех x, аналитически продолжаемая по ξ_0 в полуплоскость $\operatorname{Im}\xi_0>0$, причем $b\,(x,\,\xi)\neq 0$ при $\operatorname{Im}\xi_0\geqslant 0$, $|\xi_0|+|\xi'|\neq 0$.

В настоящей статье рассматривается случай $m=1$. Обозначим $x=(x_0,\,x_1,\cdots,\,x_n)=(x_0,\,x')$. Мы предполагаем, что оператор A является **вольтерровским** относительно x_0; это означает, что если

---

* См. [1].

$u(x_0, x')=0$ при $x_0<t$, то $Au=0$ при $x_0<t$ (t — любое), иными словами, оператор A переводит функции, равные нулю при $x_0<t$ в функции, также равные нулю при $x_0<t$.

Настоящая статья посвящена изучению задачи Коши для гиперболических псевдодифференциальных уравнений, порожденных операторами вида (1) с нулевыми начальными данными на гиперплоскости $x_0=0$.

Изучению задачи Коши для гиперболических уравнений, а также для гиперболических псевдодифференциальных уравнений с данными Коши на компактных многообразиях, посвящен ряд работ (см., например, [1], [3], [4]).

Как хорошо известно, гиперболические уравнения обладают свойством конечной зависимости решений от начальных данных. Однако, в отличие от гиперболических уравнений, гиперболические псевдодифференциальные уравнения, вообще говоря, этим свойством не обладают. Л. Гордингом получены условия существования конечной области зависимости в случае, когда символ соответствующего оператора не зависит от x и является целой функцией экспоненциального типа. Если же символ $a_0(x, \xi)$ является положительно однородной функцией относительно ξ, то, как известно, порожденное соответствующим этому символу оператором уравнение будет обладать свойством конечной зависимости решений от начальных данных в том и только в том случае, когда символ $a_0(x, \xi)$ является полиномом относительно ξ.

В силу сказанного, нам представляется естественным рассмотреть следующую задачу Коши:

Требуется найти решение $u_+(x_0, x')$ уравнения

$$P^+ Au_+(x)=f(x), \quad x\in R^{n+1}_T, \tag{2}$$

где $R^{n+1}_T=R^{n+1}\{x\colon 0<x_0<T,\ x'\in R^n\}$, P^+ — оператор сужения с R^{n+1} на R^{n+1}_T, удовлетворяющее однородным начальным условиям на гиперплоскости $x_0=0$. Предполагается, что $T>0$ достаточно мало.

Кратко о содержании работы. В § 1 описывается класс рассматриваемых символов, а также вводится ряд функциональных пространств, в которых решается поставленная задача. В параграфе 2 дается формулировка основного результата статьи (теорема 1), доказательство которого приводится в § 4. В третьем параграфе статьи решается вспомогательная задача Коши (2.9), (2.10).

§ 1. Функциональные пространства и класс символов

1°. Доказательство разрешимости задачи Коши будет основано на априорных оценках. С этой целью введем в рассмотрение функциональные пространства, естественным образом связанные с рассматриваемой задачей.

Пространства $H'_s(T)$. По определению $u(x) \in H'_s(T)$ (s — любое, $x_0 \in [0, T]$, $x' \in R^n$), если конечна следующая норма:

$$[\|u\|]_s = \left(\int_0^T \|u\|_s'^2 \, dx_0 \right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

где $\|u\|'_s$ — норма в $H_s(R^n)$ функции $u(x_0, x')$ по x':

$$\|u(x_0, x')\|'_s = \left(\int_{R^n} (1 + |\xi'|^2)^s \, |\tilde{u}(x_0, \xi')|^2 \, d\xi' \right)^{1/2}$$

($\tilde{u}(x_0, \xi')$ — преобразование Фурье $u(x_0, x')$ по x' в R^n:

$$\tilde{u}(x_0, \xi') = F_{x' \to \xi'} \, u(x_0, x')).$$

Пространства $B_s(T)$. По определению $u \in B_s(T)$ ($s > 1$), если конечна норма

$$\|u\|_s = \left([\|u\|]_s^2 + \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial x_0} \right\| \right]_{s-1}^2 \right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

Пространства $H_s(T)$. Мы скажем, что $u(x_0, x') \in H_s(T)$ (s — произвольное вещественное число), если конечна следующая норма:

$$\|u\|_s^2 = \inf_{lu} \int_{R^{n+1}} (1 + |\xi_0|^2 + |\xi'|^2)^s \, |\widetilde{lu}(\xi_0, \xi')|^2 \, d\xi < +\infty, \tag{1.3}$$

где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям функции

$$u(x_0, x') \text{ по } x_0 \subset R_T^{n+1} \text{ на } R^{n+1}, \quad \widetilde{lu}(\xi) = F_{x \to \xi} lu\,^*.$$

Обозначим через $H_s(T)$ (соответственно $B_s^0(T)$) подпространство $H_s(T)$ (соответственно $B_s(T)$), состоящее из функций $u(x_0, x')$, являющихся замыканием по норме (1.3) (соответственно (1.2)) функций класса $C^\infty(R_T^{n+1})$, обращающихся в нуль в окрестности гиперплоскости $x_0 = 0$.

2°. Опишем теперь класс символов изучаемых операторов.

Класс O_*^+. Мы скажем, что функция $a(x, \xi)$, определенная в $R_T^{n+1} \times (R_\xi^{n+1} \setminus \{0\})$ принадлежит классу O_*^+, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $a(x, \xi)$ является положительно однородной функцией относительно ξ порядка α, то есть $a(x, t\xi) = t^\alpha a(x, \xi)$ при всех $t > 0$ и $x \in R_T^{n+1}$;

в) $a(x, \xi) \in C^\infty$ по совокупности переменных x, ξ для всех $x \in R_T^{n+1}$ и $\xi \in R^{n+1} \setminus \{0\}$, при этом для любых $x \in R_T^{n+1}$, ξ' и ξ_0 таких, что $|\xi_0| + |\xi'| \neq 0$, $D_x^l D_{\xi'}^{m} a(x, \xi)$ — непрерывны и удовлетворяют оценке

$$|D_x^l D_{\xi'}^{m} a(x, \xi)| \leqslant C_{l,m} (1 + |\xi|)^{\alpha - m}, \tag{1.4}$$

---

* Элементы пространства $H_s(T)$ получаются как замыкания в норме (1.3) бесконечно дифференцируемых функций, определенных на R^{n+1}.

где l, m — произвольные целые неотрицательные числа, $C_{l,m}$ — постоянная;

c) Функция $a(x, \xi)$ допускает аналитическое продолжение по ξ_0 в полуплоскость $\operatorname{Im}\xi_0 > 0$ с сохранением свойств a), b) однородности и гладкости;

d) Существует следующий предел:

$$\lim_{|x|\to\infty} a(x_0, x', \xi) = a(x_0, \infty, \xi),$$

равномерный относительно x_0 и ξ, причем $a'(x, \xi) = a(x, \xi) - a(x_0, \infty, \xi)$ принадлежит по x' пространству $S(R^n_{x'})$ функций, убывающих при $|x'|\to\infty$ быстрее любой степени $|x'|$ вместе со всеми производными по x'* равномерно по x_0 и ξ.

Класс $U_{\alpha+1}$. Мы скажем, что функция $a(x, \xi)\in O^+_{\alpha+1}$ принадлежит классу $U_{\alpha+1}$, если для любых $x\in R^{n+1}_T$ и $\xi\in R^{n+1}_\xi\setminus\{0\}$ она представима в виде

$$a(x, \xi) = \lambda(x, \xi)\, b(x, \xi), \tag{1.5}$$

при этом выполняются следующие условия:

1. Функция $\lambda(x, \xi)\in O^+_1$, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial\xi_k}\in O^+_0$ $(k=1, 2,\cdots, n)$, и имеет место представление

$$\lambda(x, \xi) = \xi_0 - \lambda_1(x, \xi'), \tag{1.6}$$

где $\lambda_1(x, \xi')\in C^\infty\{R^{n+1}_T\times(R^n_{\xi'}\setminus\{0\})\}$,

$$\operatorname{ord}\lambda_1 = 1,\ \operatorname{Im}\lambda_1 = 0.$$

2. Функция $b(x, \xi)$ удовлетворяет условию эллиптичности, то есть

$$b(x, \xi)\neq 0 \tag{1.7}$$

при всех $x\in R^{n+1}_T$ и ξ: $\operatorname{Im}\xi_0\geqslant 0$,

$$|\xi'| + |\xi_0| > 0;\ b(x, \xi)\in O^+_\alpha,\ \frac{\partial b}{\partial\xi_k}\in O^+_{\alpha-1}\quad (k=1, 2,\cdots, n).$$

§ 2. Постановка задачи

Пусть $a(x, \xi)$ — вообще говоря, неоднородная функция относительно ξ вида

---

* Более точно, пространство $S(R^n_{x'})$ состоит из тех и только тех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $u(x')$, для которых при любых k и α

$$(1+|x'|)^k|D^\alpha(u(x')| \leqslant C_{k,\alpha},$$

где положено,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_n),\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},\ D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\quad (j=1, 2,\cdots, n),$$

$C_{k,\alpha}$ — некоторые постоянные, зависящие от k и α.

$$a(x, \xi) = a_0(x, \xi) + v(x, \xi), \tag{2.1}$$

где $a_0(x, \xi) \in U_{\alpha+1}$, а оператор V, порожденный символом $v(x, \xi)$, является вольтерровским оператором порядка, не превосходящего $\alpha-1$. То есть для любого $\beta < \alpha - 1$ и $u \in C_0^\infty(R_T^{n+1})$ имеет место оценка

$$\|Vu\|_{s-\beta} \leqslant C_\beta \|u\|_s, \tag{2.2}$$

где C_β — некоторая константа.

Продолжим функцию $a(x_0, x', \xi)$ по переменной x_0 финитным образом вне интервала $(0, T)$.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор вида

$$Au = (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \int\limits_{R^{n+1}} e^{-i(x, \xi)} \varphi(x_0)\, a_0(x, \xi)\, \tilde{u}(\xi)\, d\xi + Vu,^* \tag{2.3}$$

где $\varphi(x_0) \in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$, $\varphi(x_0) \equiv 1$ на интервале $(0, T)$. Функцию $a_0(x, \xi)$ назовем символом оператора A, а $a(x, \xi)$ — полным символом оператора A (см. [1]).

Пусть, далее, P^+ — оператор сужения функций с пространства R^{n+1} на R_T^{n+1}.

Рассмотрим уравнение вида

$$P^+ A u_+ = f, \tag{2.4}$$

где A — вольтерровский псевдодифференциальный оператор порядка $\alpha+1$ (α — некоторое вещественное число), символ которого $a_0(x, \xi) \in U_{\alpha+1}$; $u_+(x_0, x')$ — произвольное продолжение функции $u(x_0, x')$ по x_0 на всю ось $(-\infty, +\infty)$, принадлежащее пространству $B_s^0(T)^{**}$.

Задача заключается в отыскании решения u_+ уравнения (2.4), принадлежащего пространству $B_s^0(T)$.

Обозначим через D_A множество функций $u_+ \in B_s^0(T)$, таких что $P^+ A u_+ \in \mathring{H}_{s-\alpha}(T)$. Из определения шкалы пространств $B_s(T)$ непосредственно следует, что множество D_A всюду плотно в пространстве $B_s^0(T)$ ($\overline{D}_A = B_s^0(T)$) в метрике последнего, ибо имеют место очевидные вложения

$$B_{s+1}^0(T) \subset D_A \subset B_s^0(T).$$

Основной результат статьи заключается в установлении однозначной разрешимости сформулированной задачи (точнее, в доказательстве существования и единственности решения $u_+ \in D_A$ задачи) для любой правой части $f \in \mathring{H}_{s-\alpha}(T)$ при достаточно малых $T > 0$, а именно, справедлива следующая

---

* В случае, если функция $a(x, \xi)$ имеет неинтегрируемую особенность при $\xi=0$ в (2.3) берется некоторая регуляризация интеграла.

** В силу вольтерровости оператора A значения $P^+ A u_+$ не зависят от выбора продолжения функции $u(x_0, x')$ при $x_0 > T$.

Теорема 1. *Пусть задано уравнение* (2.4), *и символ оператора* A $a_0(x, \xi)$ *принадлежит классу* $U_{\alpha+1}$. *Тогда для любого* $f \in H_{s-\alpha}(t_0)$ (*при достаточно малом* t_0) *уравнение* (2.4) *имеет единственное решение* $u_+(x)$, *принадлежащее пространству* $B_s^0(t_0)$, *причем справедлива априорная оценка*

$$\|u_+\|_s \leqslant C\|f\|_{s-\alpha}, \tag{2.5}$$

где C — *некоторая постоянная*, $s \geqslant 1$.

Поскольку символ оператора A $a_0(x, \xi) \in U_{\alpha+1}$, то имеет место представление

$$a_0(x, \xi) = \lambda(x, \xi)\, b(x, \xi), \tag{2.6}$$

где $\lambda(x, \xi)$ и $b(x, \xi)$ удовлетворяют условиям 1 и 2 § 1.

Обозначим через B оператор, построенный по символу $b(x, \xi) \in \in O_\alpha^+$. В силу эллиптичности оператора B для него существует ограниченный обратный оператор (см., например, [2]), являющийся также эллиптическим псевдодифференциальным оператором.

Точнее, для оператора B существует оператор B^{-1} (символ которого $\frac{\varphi(x_0)}{b(x, \xi)}$, где $\frac{1}{b} \in O_{-\alpha}^+$) такой, что имеет место представление

$$BB^{-1} = B^{-1}B = E + V_1, \tag{2.7}$$

где E — тождественный оператор, а порядок оператора V_1 не превосходит —2, то есть

$$\|V_1 u\|_s \leqslant C\|u\|_{s-2} \tag{2.8}$$

для любого $u \in C^\infty(R^{n+1})$, C — некоторая постоянная.

Перепишем уравнение (2.4) в следующем виде:

$$P^+Au_+ = P^+ B\Lambda u_+ + V_2 u_+ = f, \tag{2.4$'$}$$

где Λ — оператор, построенный по символу $\lambda(x, \xi)$, а V_2—вольтерровский оператор, порядок которого не превосходит $\alpha - 1$.

Поскольку оператор B обратим, задача свелась, по существу, к нахождению обратного оператора к оператору Λ, а именно, требуется найти функцию $u_+(x_0, x')$, удовлетворяющую уравнению

$$P^+ \Lambda u_+(x) = f(x),\ x \in R_T^{n+1}, \tag{2.9}$$

а при $x_0 = 0$ краевому условию

$$u_+|_{x_0=0} = 0. \tag{2.10}$$

Обозначим через $\lambda(x, \xi)$ полный символ оператора Λ:

$$\hat{\lambda}(x, \xi) = \lambda(x, \xi) + c_0(x, \xi'), \tag{2.11}$$

при этом оператор, построенный по символу $c_0(x, \xi')$ является вольтерровским оператором, порядок которого не превосходит 0, и $c_0(x, \xi')$ удовлетворяет условию d). В силу (2.6) оператор Λ имеет следующий вид:

$$\Lambda u_+ = i\frac{\partial u_+}{\partial x_0} - \Lambda_1 u_+ + C_0 u_+, \tag{2.12}$$

где Λ_1 и C_0 — операторы, построенные по символам $\lambda_1(x, \xi')$ и $c_0(x, \xi')$ соответственно.

§ 3. Решение задачи (2.9), (2.10)

В этом $n°$ будет рассмотрена задача Коши (2.9), (2.10) в предположении, что символ λ оператора Λ имеет вид:

$$\lambda(x, \xi) = \xi_0 - \lambda_1(x_0, \xi').$$

Предполагая, что решение поставленной задачи существует, произведем в (2.9), (2.10) преобразование Фурье по переменным x'; имеем

$$\frac{\partial \tilde{u}_+(x_0, \xi')}{\partial x_0} + i\int\limits_{R^n} \tilde{\lambda}_1(x_0, \xi'-\eta', \eta')\tilde{u}_+(x_0, \eta')\,d\eta' = -i\tilde{f}(x_0, \xi'), \tag{3.1}$$

$$\tilde{u}_+|_{x_0=0} = 0, \tag{3.2}$$

где через $\tilde{u}_+$, $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{f}$ обозначено, соответственно, преобразование Фурье по x' функций u_+, λ_1, f.

В силу условий, наложенных на полный символ оператора A, функцию $c_0(x, \xi')$ можно представить в виде

$$c_0(x, \xi') = c_0(x_0, \infty, \xi') + c_0'(x_0, x', \xi'),$$

где

$$c_0(x_0, \infty, \xi') = \lim_{|x'|\to\infty} c_0(x_0, x', \xi'), \quad c_0'(x_0, x', \xi') = $$
$$= c_0(x_0, x', \xi') - c_0(x_0, \infty, \xi').$$

Тогда задача (3.1), (3.2) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{u}_+(x_0, \xi')}{\partial x_0} + i[\lambda_1(x_0, \xi') - c_0(x_0, \infty, \xi')]\tilde{u}_+(x_0, \xi') -$$
$$-i\int\limits_{R^n} \tilde{c}_0'(x_0, \xi'-\eta', \eta')\tilde{u}_+(x_0, \eta')\,d\eta' = \tilde{f}(x_0, \xi'), \tag{3.3}$$

$$\tilde{u}_+\Big|_{x_0=0} = 0. \tag{3.4}$$

(Здесь, для простоты, через $\tilde{f}$ мы обозначили $-i\tilde{f}$).

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial \tilde{v}(x_0, \xi')}{\partial x_0} + i[\lambda_1(x_0, \xi') - c_0(x_0, \infty, \xi')]\tilde{v}(x_0, \xi') = \tilde{g}(x_0, \xi'), \tag{3.5}$$

$$\tilde{v}\Big|_{x_0=0} = 0. \tag{3.6}$$

Лемма 1. *Пусть функция* $\lambda(x_0, \xi)$ *удовлетворяет условию* 1 § 1. *Тогда для любой правой части* $g \in \overset{\circ}{H}_s(t_0)$ *задача* (3.5), (3.6) *имеет одно и только одно решение* $\tilde{v}$, *принадлежащее пространству* $B^0_s(t_0)$, *причем при достаточно малом* t_0 *имеет место оценка*

$$\|v\|_s \leqslant \varepsilon \|g\|_s + C\|g\|_{s-1}, \tag{3.7}$$

где $\varepsilon > 0$ — *произвольное число, а* C — *постоянная.*

Доказательство. Легко видеть, что единственным решением задачи (3.5), (3.6) является функция

$$\tilde{v}(x_0, \xi') = \int_0^{x_0} \exp\left\{-i\int_y^{x_0} [\lambda_1(z, \xi') - c_0(z, \infty, \xi')]\, dz\right\} \tilde{g}(y, \xi')\, dy. \tag{3.8}$$

Получим оценку для решения $\tilde{v}$, задаваемого формулой (3.8). С этой целью рассмотрим

$$\|v\|_s'^2 = \int_{R^n} (1 + |\xi'|^2)^s |\tilde{v}(x_0, \xi')|^2\, d\xi',$$

где $0 < x_0 < t_0$, $v(x_0, x') = F^{-1}_{\xi' \to x'} \tilde{v}(x_0, \xi')$. В силу (3.8) функцию v можно оценить следующим образом:

$$\|v\|_s'^2 \leqslant \int_{R^n} (1 + |\xi'|^2)^s \left(\int_0^{x_0} |\tilde{g}(y, \xi')|\, dy\right)^2 d\xi' \leqslant$$

$$\leqslant t_0 \int_0^{t_0} \|g\|_s'^2\, dy = t_0 [\|g\|]_s^2 .$$

Откуда

$$[\|v\|]_s \leqslant t_0 [\|g\|]_s. \tag{3.9}$$

Поскольку $g \in \overset{\circ}{H}_s(t_0)$, из (3.9) получим

$$[\|v\|]_s \leqslant t_0 \|g\|_s. \tag{3.10}$$

Далее, в силу уравнения, имеем

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x_0}\right\|_{s-1}' \leqslant C(\|v\|_s' + \|g\|_{s-1}'),$$

где C — постоянная, не зависящая от v и t_0. Отсюда, с учетом (3.10), получим

$$\left[\left\|\frac{\partial v}{\partial x_0}\right\|\right]_{s-1} \leqslant Ct_0\|g\|_s + C\|g\|_{s-1}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) непосредственно вытекает окончательная оценка для v:

$$\|v\|_s \leqslant \varepsilon \|g\|_s + C_1 \|g\|_{s-1}$$

при достаточно малом t_0 ($\varepsilon > 0$ — произвольное число).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Оператор C_0', построенный по символу $c_0'(x, \xi')$, действует ограниченным образом из пространства $B_s(t_0)$ в пространство $H_s'(t_0)$.*

Доказательство. Используя неравенство (1.4), оценим*

$$(1+|\xi'|^2)^s\,|\widetilde{C_0'u_+}(x_0, \xi')|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int\limits_{R^n} (1+|\xi'|^2)^{s/2}\,|\tilde{c}_0'(x_0, \xi'-\eta', \eta')|\,|\tilde{u}_+(x_0, \eta')|\,d\eta'\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_p\Big(\int\limits_{R^n} \frac{(1+|\xi'|^2)^{s/2}}{(1+|\eta'|^2)^{s/2}}\,\frac{(1+|\eta'|^2)^{s/2}\,|\tilde{u}_+(x_0, \eta')|}{(1+|\xi'-\eta'|^2)^p}\,d\eta'\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{p_1}\Big(\int\limits_{R^n} \frac{1}{(1+|\xi'-\eta'|^2)^{p_1}}\,(1+|\eta'|^2)^{s/2}\,|\tilde{u}_+(x_0, \eta')|\,d\eta'\Big)^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по ξ', получим

$$\|C_0'\,u_+\|_s' \leqslant K\,\|u_+\|_s', \tag{3.12}$$

где K — постоянная, не зависящая от u_+.

Интегрируя, далее, (3.12) по x_0 в промежутке от 0 до t_0, имеем

$$[\|C_0'\,u_+\|]_s \leqslant K_1\,[\|\,u_+\|]_s, \tag{3.13}$$

откуда следует оценка

$$[\![C_0'\,u_+]\!]_s \leqslant K_2\,\|\!|u_+|\!\|_s, \tag{3.13$'$}$$

где K_2 — постоянная, не зависящая от u_+. Лемма доказана.

Замечание. Легко видеть, что оператор C_0' ограничен также в пространстве $H_s'(t_0)$.

Перейдем к доказательству основного результата настоящего параграфа, а именно, к установлению однозначной разрешимости задачи (2.9), (2.10).

Теорема 2. *Если оператор Λ удовлетворяет условию* 1 § 1, *то при любой правой части $f \in \mathring{H}_s(t_0)$ и достаточно малом t_0 задача* (2.9), (2.10) *имеет одно и только одно решение $u_+(x)$), принадлежащее пространству $B_s^0(t_0)$, при этом справедлива оценка*

$$\|\!|u_+|\!\|_s \leqslant C\,\|f\|_s, \tag{3.14}$$

где C — постоянная, не зависящая от u_+.

---

* Ср. [2], теорема 1.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 оператор $P^+\Lambda$ представим в виде суммы двух операторов:

$\Lambda_2 = i\dfrac{\partial}{\partial x_0} - \Lambda_1 + C_0$ и оператора C_0'', из которых первый обратим, а порядок второго не превосходит 0. Перепишем уравнение (2.9) в следующем виде:

$$P^+\Lambda u_+ \equiv \Lambda_2 u_+ + C_0'' u_+ = f. \tag{3.15}$$

Произведем в последнем уравнении преобразование Фурье по x' и применим к обеим частям его оператор $\tilde{\Lambda}_2^{-1}$, обратный к оператору $F_{x'\to\xi'}\Lambda_2$. Имеем

$$\tilde{u}_+(x_0, \xi') + \tilde{\Lambda}_2^{-1}\tilde{C}_0' u_+(x_0, \xi') = \tilde{\Lambda}_2^{-1}\tilde{f}(x_0, \xi'). \tag{3.16}$$

Оценим оператор $\Lambda_2^{-1} C_0'$, используя явный вид оператора Λ_2^{-1}. Обозначим $\tilde{g} = \tilde{C}_0' u_+$, тогда

$$|\tilde{\Lambda}_2^{-1}\tilde{g}(x_0, \xi')|^2 \leqslant x_0 \int_0^{t_0} |\tilde{g}(y, \xi')|^2\, dy,$$

откуда

$$\int_{R^n} (1+|\xi'|^2)^s\, |\tilde{\Lambda}_2^{-1}\tilde{g}(x_0, \xi')|^2\, d\xi' \leqslant x_0\, [\|g\|]_s^2. \tag{3.17}$$

Интегрируя далее (3.17) по x_0 в промежутке $[0, t_0]$, получим

$$[\|\Lambda_2^{-1} g\|]_s^2 \leqslant \frac{t_0^2}{2}\, [\|g\|]_s^2$$

или

$$[\|\Lambda_2^{-1} C_0' u_+\|]_s \leqslant \frac{t_0}{\sqrt{2}}\, [\|C_0' u_+\|]_s.$$

Из последнего неравенства при достаточно малом t_0 и в силу (3.13) имеем

$$[\|\Lambda_2^{-1} C_0'\|]_s < 1. \tag{3.18}$$

Отсюда непосредственно следует непрерывная обратимость оператора $E + \Lambda_2^{-1} C_0'$ в пространстве $H_s'(t_0)$ при достаточно малом t_0, то есть существование оператора $(E + \Lambda_2^{-1} C_0')^{-1}$, действующего ограниченным образом в пространстве $H_s'(t_0)$.

Перейдем к доказательству оценки (3.14). Пусть u_+ — решение задачи (2.9), (2.10). В силу (1.2)

$$\|u_+\|_s \leqslant [\|u_+\|]_s + \left[\left\|\frac{\partial u_+}{\partial x_0}\right\|\right]_{s-1}. \tag{3.19}$$

Далее, поскольку ord $\lambda_1 = 1$, ord $C_0 = 0$, то в силу уравнения (2.9)

$$\left\|\left|\frac{\partial u_+}{\partial x_0}\right|\right\|_{s-1} \leqslant C_1 ([\![u_+]\!]_s + [\![u_+]\!]_{s-1} + [\![f]\!]_{s-1}). \qquad (3.20)$$

Из (3.19) и (3.20) очевидным образом следует оценка

$$\|u_+\|_s \leqslant C_2 ([\![u_+]\!]_s + [\![f]\!]_{s-1}). \qquad (3.21)$$

Но в силу ограниченности операторов $(E + \Lambda_2^{-1} C_0')^{-1}$ и Λ_2^{-1} в пространстве $\dot{H}_s(t_0)$, имеем

$$[\![u_+]\!]_s \leqslant C_3 [\![\Lambda_2^{-1} f]\!]_s \leqslant C_4 [\![f]\!]_s. \qquad (3.22)$$

Объединяя (3.21) и (3.22), убеждаемся в справедливости оценки (3.14) и, стало быть, доказано, что решение $u_+ \in B_s^0(t_0)$. Теорема полностью доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

При доказательстве теоремы мы будем существенно опираться на результаты, полученные в предыдущих параграфах.

Утверждение теоремы заключается в установлении существования и единственности решения $u_+(x_0, x')$ уравнения

$$P^+ Au_+(x) = f(x), \quad x \in R_{t_0}^{n+1}, \qquad (4.1)$$

принадлежащего пространству $B_s^0(t_0)$ при условии, что правая часть $f \in \dot{H}_{s-\alpha}(t_0)$ и t_0 достаточно мало; оператор A задан формулой (2.3), а оператор V, входящий в представление (2.3), предполагается вольтерровским и ord $V \leqslant \alpha - 1$.

В силу (2.6) уравнение (4.1) можно записать в следующем виде:

$$P^+ Au_+ \equiv P^+ B\Lambda u_+ + V_2 u_+ = f, \qquad (4.2)$$

где V_2 -- вольтерровский псевдодифференциальный оператор и ord $V_2 \leqslant \alpha - 1$. Как было отмечено в § 2, в силу эллиптичности оператора B, существует ограниченный обратный оператор B^{-1} с символом $\frac{\varphi(x_0)}{b}$, где $\frac{1}{b} \in O_{-\alpha}^+$, точнее, для любого $g \in \dot{H}_{s-\alpha}(t_0)$ имеет место оценка

$$\|P^+ B^{-1} g\|_s \leqslant C \|g\|_{s-\alpha}, \qquad (4.3)$$

где C — постоянная, не зависящая от g.

Далее, в силу теоремы 2, оператор Λ непрерывно обратим, как оператор, действующий из пространства $B_s^0(t_0)$ в пространство $\dot{H}_s(t_0)$ (при достаточно малом t_0), при этом имеет место оценка (3.14):

$$\|\Lambda^{-1} g\|_s \leqslant C \|g\|_s$$

для любого $g \in \dot{H}_s(t_0)$; C — постоянная, не зависящая от g.

Имеем

$$P^+ \Lambda\Lambda^{-1} g = g + V_3 g, \qquad (4.4)$$

где V_3 — вольтерровский оператор, порядок которого не превосходит—1.

Из (4.2) и (4.4) следует, что

$$P^+ A\Lambda^{-1} g = P^+ Bg + V_4 g, \tag{4.5}$$

где V_4 — оператор порядка $\leqslant \alpha - 1$.

Полагая $g = B^{-1} f$, из (4.5) получим

$$P^+ A\Lambda^{-1} B^{-1} f = f + V_5 f, \tag{4.6}$$

где V_5—вольтерровский оператор и $\operatorname{ord} V_5 \leqslant -1$.

Для завершения доказательства теоремы воспользуемся одной леммой, приведенной в [5].

Лемма 3. Пусть V — вольтерровский псевдодифференциальный оператор, действующий непрерывным образом из пространства $\overset{\circ}{H}_s(t_0)$ в $\overset{\circ}{H}_{s+1}(t_0)$.

Тогда оператор $E+V$ непрерывно обратим в пространстве $\overset{\circ}{H}_s(t_0)$ (или $B^0_s(t_0)$).

Замечание. Приведенная здесь формулировка леммы несколько отличается от той, которая имеется в цитируемой работе. В справедливости утверждения леммы 3 легко убедиться, очевидным образом видоизменяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 4.3 работы [5]*.

В силу леммы 3, оператор $E + V_5$ обладает ограниченным обратным оператором $(E + V_5)^{-1}$.

Следовательно, оператор

$$R = \Lambda^{-1} B^{-1} (E + V_5)^{-1}$$

является правым обратным к оператору A, то есть

$$P^+ ARf = f.$$

Далее, из оценок (3.14) и (4.3) непосредственно следует неравенство (2.5). Теорема полностью доказана.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступило 15.VII.1971

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ. Կոշու խնդիրը հիպերբոլական պսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների համար (ամփոփում)

Հոդվածը նվիրված է Կոշու խնդրի ուսումնասիրմանը հիպերբոլական պսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների մի որոշակի դասի համար։

Ապացուցված է, որ որոշակի պայմանների առկայության դեպքում, դրված համապատասխան օպերատորների սիմվոլների վրա, Կոշու խնդիրը ունի մեկ և միայն մեկ լուծում համապատասխան ֆունկցիոնալ տարածություններում։

* См. также [1].

R. L. SHAHBAGIAN. *The Cauchy problem for hyperbolic pseudodifferential equations* (summary)

The Cauchy problem for a certain class of hyperbolic pseudodifferential equations is considered.

It is proved that under some conditions imposed on the symbols of corresponding operators the Cauchy problem has a single solution in corresponding functional spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. И. Эскин.* Задача Коши для гиперболических уравнений в свертках, Матем. сб., 74 (116): 2, 1967, 262—297.
2. *Дж. Кон, Л. Ниренберг.* Алгебра псевдодифференциальных операторов, „Псевдодифференциальные операторы" (сборник статей), Изд. „Мир", 1967, 5—62.
3. *Л. Гординг.* Задача Коши для гиперболических уравнений, М., ИЛ, 1961.
4. *В. П. Маслов.* О регуляризации задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений, ДАН СССР, 177, № 6, 1967, 1277—1280.
5. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Параболические уравнения в свертках, Матем. сб., 71 (113), 1966, 162—190.
6. *Л. Хёрмандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Изд. „Мир", М., 1965.