ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика,

М. М. ДЖРБАШЯН

ПРИМЫКАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЯДОВ ТИПА ДИРИХЛЕ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Введение

1°. Понятие примыкания асимптотических рядов Дирихле

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j\, e^{-\lambda_j z} \quad (0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_j<\cdots) \tag{1}$$

впервые было введено в анализ С. Мандельбройтом, эффективно применившим его в различных тонких вопросах теории функций [1, 2].

В предположении, что для последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ верхняя усредненная плотность

$$\overline{D}^* = \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda}, \; N(\lambda) = \sum_{\lambda_j<\lambda} 1 \tag{2}$$

положительна, понятие примыкания для рядов вида (1) представляет собой определенное соотношение между величиной $\overline{D}^*$ — шириной криволинейной бесконечной полосы Δ, содержащей некоторую горизонтальную полосу и порядком касания (логарифмической точностью) частичных сумм ряда (1) при $\operatorname{Re} z\to+\infty$ к функции $F(z)$, аналитической и ограниченной в полосе Δ.

В случае, когда ряд (1) примыкает к функции $F(z)$ в полосе Δ, С. Мандельбройтом были получены оценки его коэффициентов $\{d_j\}_1^{\infty}$ с помощью величины $\overline{D}^*$, максимума $|F(z)|$ в достаточно большом круге $K(z_0)\subset\Delta$ с центром в точке z_0 и величины $\operatorname{Re} z_0$.

Именно эти оценки и позволили ему установить тонкий критерий единственности для коэффициентов ряда (1) и функции $F(z)$, когда эта функция допускает аналитическое продолжение из Δ вдоль некоторой криволинейной полосы, шириной $2\pi R$ $(R>\overline{D}^*)$, продолжающейся до $-\infty$.

2°. В критическом случае, когда полоса Δ вырождается в полуось $[\sigma_0, -\infty)$ и $\overline{D}^*=0$, речь может идти лишь о примыкании ряда (1) к функции $F(x)$, определенной только на этой полуоси. Но в этом случае просто теряют свою силу исходы и результаты теории примыкания для рядов вида (1), хорошо разработанные, как отмечалось выше, для случая полосы Δ ненулевой ширины и при $\overline{D}^*>0$.

В настоящей статье строится аппарат теории примыкания и единственности на вещественной оси для более общих рядов типа Дирихле

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j-1} \tag{3}$$

в метрике L_2.

При этом мы предполагаем, что показатели $\{\lambda_j\}_1^\infty$—произвольные комплексные числа из полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, подчиненные условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < +\infty, \tag{4}$$

а целое число $s_j \geq 1$ означает кратность появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j\}$ нашей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$.

Заметим, что условие (4) неооходимо и достаточно для неполноты в $L_2[0, +\infty)$ обобщенной системы Мюнтца-Сасса*

$$\{e^{-\lambda_j x} x^{s_j-1}\}_1^\infty. \tag{5}$$

В § 1 статьи строится система функций $\{\omega_n(x)\}_1^\infty$, биортогональная с системой (5) на полуоси $[0, +\infty)$ (теорема 1). Затем приводится вычисление интегралов вида

$$J_n(\lambda_j, r) = \int_0^\infty e^{-\lambda_j x} x^r \omega_n(x)\, dx$$

при любом $n \geqslant 1$, $j \geqslant 1$ и $0 \leqslant r \leqslant p_j - 1$.

Отметим, что теорема 1 впервые была анонсирована нами в заметке [5] без доказательства. Но сам метод построения такого рода биортогональных систем, порожденных функциями с кратными нулями (в данном случае функцией Бляшке $B(z)$ с нулями $\{\lambda_j\}_1^\infty$), впервые был предложен в работе [6] в связи с построением биортогональных на конечном отрезке систем целых функций типа Миттаг-Леффлера.

Этот метод нашел затем важные применения в ряде других работ и, в частности, в недавней работе [7] автора**.

В § 2 статьи приводится определение понятия примыкания рядов типа Дирихле (3) к данной функции $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma_0, +\infty)$.

Затем, в предположении, что в последовательности $\{\lambda_j\}_1^\infty$ кратные числа появляются лишь подряд, и что ряд (3) примыкает к данной функции $F(x)$ с логарифмической точностью $p_n(\sigma) \leqslant \infty$, удаётся установить оценки для специальных полиномов $P_n(\sigma, \nu)$ степени $\leqslant p_n - s_n$, коэффициенты которых линейно выражаются посредством чисел $\{d_j\}$ $n \leqslant j \leqslant n + p_n - s_n$ (лемма 3 и теорема 2).

Наконец, наложив нужные дополнительные ограничения на функцию $F(x) \in L_2(\sigma_0, +\infty)$ (где $\sigma_0 > -\infty$ уже любое число) и на показа-

* По этому поводу см. [3, 4], а также [5].

** Остальные работы, где указанный метод биортогональности нашел другие существенные применения, указываются в той же работе [7].

тели $\{\lambda_j\}_1^\infty$ ряда (3), устанавливается критерий единственности для коэффициентов $\{d_j\}_1^\infty$ и для функции $F(x)$, к которой этот ряд примыкает на вещественной оси с определенной логарифмической точностью (теоремы 3 и 4).

§ 1. Биортогонализация системы функций $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k - 1}\}_1^\infty$ на полуоси $[0, +\infty)$

(а). Ниже пока что будем предполагать, что $\{\lambda_k\}_1^\infty$ —произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в полуплоскости

$$G^{(+)} = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\},$$

подчиненная лишь условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < +\infty. \tag{1.1}$$

Ввиду условия (1.1) очевидно, что для любого натурального числа $n \geqslant 1$ появление числа λ_n во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ может иметь лишь конечную кратность p_n.

Обозначим далее через s_n кратность появления числа λ_n на отрезке $\{\lambda_1 \cdots, \lambda_n\}$ нашей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$; разумеется, всегда будем иметь

$$1 \leqslant s_n \leqslant p_n \quad (n \geqslant 1). \tag{1.2}$$

Известно (см., напр., [8], стр. 187), что при условии (1.1) произведение Бляшке

$$\mathrm{B}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - \lambda_k}{z + \bar{\lambda}_k} \varkappa_k; \quad \varkappa_k = \frac{|1 + \lambda_k^2|}{1 + \lambda_k^2} \tag{1.3}$$

сходится в полуплоскости $G^{(+)}$ к функции $\mathrm{B}(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющей условиям:

1) $|\mathrm{B}(z)| \leqslant 1, \quad z \in G^{(+)}$;

2) $\mathrm{B}(\lambda_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

3) почти для всех $y \in (-\infty, +\infty)$ существует предел

$$\lim_{x \to +0} |\mathrm{B}(x + iy)| = |\mathrm{B}(iy)| = 1.$$

Но поскольку при каждом $n \geqslant 1$ число λ_n в последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ появляется с кратностью p_n, то на самом деле функция $\mathrm{B}(z)$ обладает более общим чем 2) свойством

2^1)

$$\begin{aligned} &\mathrm{B}^{(k)}(\lambda_n) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant p_n - 1 \\ &\mathrm{B}^{(p_n)}(\lambda_n) \neq 0 \quad (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned} \tag{1.4}$$

(б). Из свойств (1.4) функции $B(z)$ следует, что в некоторой окрестности $|z-\lambda_n|<\delta$ $(\delta>0)$ точки $z=\lambda_n$ функция

$$\frac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{B(z)}$$

регулярна и, следовательно, допускает разложение вида

$$\frac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{B(z)}=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(\lambda_n)(z-\lambda_n)^j;\quad |z-\lambda_n|<\delta, \tag{1.5}$$

где

$$A_j(\lambda_n)=\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{dz^j}\left[\frac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{B(z)}\right]\right\}_{z=\lambda_n}\quad (j=0,1,2,\cdots). \tag{1.6}$$

Теперь для любого $n\geqslant 1$ введем в рассмотрение функцию*

$$\Omega_n(z)=(-1)^{s_n-1}\frac{B(z)\,Q_n(z)}{(s_n-1)!\,(z-\lambda_n)^{p_n-s_n+1}}, \tag{1.7}$$

где

$$Q_n(z)=\sum_{j=0}^{p_n-s_n}A_j(\lambda_n)(z-\lambda_n)^j \tag{1.8}$$

и докажем лемму.

Лемма 1. 1°. *Для любого $n\geqslant 1$ функция $\Omega_n(z)$ удовлетворяет условиям:*

$$\Omega_n^{(r)}(\lambda_\nu)=\begin{cases}0, \text{ при } \lambda_\nu\neq\lambda_n,\ 0\leqslant r\leqslant p_\nu-1\\ (-1)^{s_n-1}, \text{ при } \lambda_\nu=\lambda_n,\ r=s_n-1\\ 0, \text{ при } \lambda_\nu=\lambda_n,\ r\neq s_n-1,\ 0\leqslant r\leqslant p_n-1.\end{cases} \tag{1.9}$$

2°. *Функция $\Omega_n(z)$ регулярна в полуплоскости $G^{(+)}$ и допускает представление вида*

$$\Omega_n(z)=\int_0^{\infty}e^{-tz}\,\omega_n(t)\,dt,\ z\in G^{(+)}, \tag{1.10}$$

где $\omega_n(t)\in L_2(0,+\infty)$.

Доказательство. 1°. Из разложения (1.5), ввиду (1.7) и (1.8), следует, что в окрестности $|z-\lambda_n|<\delta$ $(\delta>0)$ точки $z=\lambda_n$ функция $\Omega_n(z)$ допускает также представление вида

$$(-1)^{s_n-1}\Omega_n(z)=\frac{(z-\lambda_n)^{s_n-1}}{(s_n-1)!}-$$

$$-\frac{B(z)}{(s_n-1)!\,(z-\lambda_n)^{p_n-s_n+1}}\sum_{j=p_n-s_n+1}^{\infty}A_j(\lambda_n)(z-\lambda_n)^j.$$

---

* В заметке [5] автора в определении функции $\Omega_n(z)$ множитель $Q_n(z)$ был пропущен.

Отсюда непосредственно следуют, как второе, так и третье из свойств функции $\Omega_n(z)$, если учесть также свойство (1.4) функции $B(z)$. Что касается первого из свойств (1.9) функции $\Omega_n(z)$, то оно также следует из (1.4), поскольку в каждой точке $z=\lambda_\nu \neq \lambda_n$ наряду с $B(z)$ функция $\Omega_n(z)$ имеет нуль порядка p_ν.

2°. Из определения (1.3) функции $B(z)$ непосредственно следует, что при любом $n>1$

$$|B(z)| \leqslant \left|\frac{z-\lambda_n}{z+\bar{\lambda}_n}\right|^{-p_n}, \quad z \in G^{(+)}.$$

Поэтому, пользуясь формулами (1.7) и (1.8), получим следующую оценку:

$$|\Omega_n(z)| \leqslant \frac{|z+\bar{\lambda}_n|^{-p_n}}{(s_n-1)!} \sum_{j=0}^{p_n-s_n} |A_j(\lambda_n)| \cdot |z-\lambda_n|^{j+s_n-1}, \quad z \in G^{(+)},$$

откуда следует, что

$$\sup_{G^{(+)}} \{ |1+z| \cdot |\Omega_n(z)| \} \leqslant C_n < +\infty \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{1.11}$$

Из оценки (1.11) заключаем далее, что при $n \geqslant 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega_n(x+iy)|^2 \, dy \leqslant C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(1+x)^2+y^2} \leqslant$$

$$\leqslant C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi C_n^2 \quad (0 < x < \infty). \tag{1.12}$$

Но из (1.12), в частности, следует, что $\Omega_n(iy) \in L_2(-\infty, \infty)$ и, поэтому, ее преобразование Фурье-Планшереля

$$\omega_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity}-1}{iy} \, \Omega_n(iy) \, dy \tag{1.13}$$

почти всюду на $(-\infty, +\infty)$ определяет функцию $\omega_n(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$.

Как известно, тогда формула обращения

$$\Omega_n(iy) = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iyt}-1}{-it} \, \omega_n(t) \, dt \tag{1.14}$$

также справедлива почти для всех $y \in (-\infty, +\infty)$.

Вместе с тем неравенство (1.12), справедливое для всех $0 \leqslant x < < +\infty$, означает, что аналитическая в полуплоскости функция $\Omega_n(z)$ принадлежит там к известному классу $H_2(G^{(+)})$ Хилла-Тамаркина. Поэтому, согласно известной теореме Винера-Пэли (3), будем иметь почти всюду

$$\omega_n(t) = 0, \quad -\infty < t < 0. \tag{1.15}$$

Ввиду свойства (1.15) функции $\omega_n(t)$, формула (1.14) запишется в виде

$$\Omega_n(iy) = \frac{d}{dy}\int_0^{\infty} \frac{e^{-iyt}-1}{-it}\,\omega_n(t)\,dt,\ y \in (-\infty, +\infty). \tag{1.14'}$$

Из (1.14′) уже легко следует, что функция $\Omega_n(z)$ в полуплоскости $G^{(+)}$ допускает представление (1.10) Винера-Пэли.

(в). В следующей лемме приводится явное выражение для нормы функций $\omega_n(x)$

$$\|\omega_n\| = \left\{\int_0^{\infty} |\omega_n(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.16}$$

Лемма 2. 1°. *Для любого* $n \geqslant 1$

$$\|\omega_n\|^2 = \frac{1}{2\pi\Gamma^2(s_n)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Q_n(iy)|^2}{|iy-\lambda_n|^{2(p_n-s_n+1)}}\,dy. \tag{1.17}$$

2°. *Имеем также*

$$\|\omega_n\| = \frac{1}{\Gamma(s_n)}\left\{\sum_{r,\,s=0}^{p_n-s_n} \Phi_n(r, s)\ a_r^{(n)}\,\overline{a_s^{(n)}}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.18}$$

где

$$\Phi_n(r, s) = (-1)^{r-s}\frac{\Gamma(2p_n-2s_n-r-s+2)}{\Gamma(p_n-s_n-r+1)\,\Gamma(p_n-s_n-s+1)}$$

$$(r, s = 0, 1, \cdots, p_n-s_n), \tag{1.19'}$$

$$a_j^{(n)} = \frac{A_j(\lambda_n)}{(2\operatorname{Re}\lambda_n)^{p_n-s_n-j+1}}\quad (j = 0, 1, \cdots, p_n-s_n). \tag{1.19''}$$

Доказательство. 1°. Из (1.13) и (1.15), согласно равенству Парсеваля, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega_n(t)|^2\,dt = \|\omega_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega_n(iy)|^2\,dy.$$

Отсюда, принимая во внимание (1.15), (1.16), а также определение (1.7)—(1.8) функции $\Omega_n(z)$, приходим к формуле (1.17), если учесть также свойство 3) функции $\mathrm{B}(z)$.

2°. Из (1.17), в силу определения (1.8) функции $Q_n(z)$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Q_n(iy)|^2}{|iy-\lambda_n|^{2(p_n-s_n+1)}}\,dy = \sum_{r,\,s=0}^{p_n-s_n} A_r(\lambda_n)\,\overline{A_s(\lambda_n)}\,I_n(r, s), \tag{1.20}$$

где

$$I_n(r, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(iy-\lambda_n)^{p_n-s_n-r+1}(-iy-\bar{\lambda}_n)^{p_n-s_n-s+1}}.$$

Записав интеграл $I_n(r, s)$ в виде

$$I_n(r, s) = (-1)^{p_n-s_n-s+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz}{(z-\lambda_n)^{p_n-s_n-r+1}(z+\bar{\lambda}_n)^{p_n-s_n-s+1}}$$

и вычислив вычет подынтегральной функции в точке $z=\lambda_n$, мы получим

$$I_n(r, s) = \frac{\Phi_n(r, s)}{(2\operatorname{Re}\lambda_n)^{2(p_n-s_n)-r-s+2}}.$$

Наконец, подставляя это значение $I_n(r, s)$ в правую часть (1.20), приходим к формуле (1.18), в силу (1.17).

(г). Докажем основную теорему о биортогонализации системы $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$.

Теорема 1. *Системы функций*

$$\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty \text{ и } \{\omega_k(x)\}_1^\infty \tag{1.21}$$

биортогональны на полуоси $[0, +\infty)$, *т. е.*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\omega_n(x)\,dx =$$

$$= \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & \text{при } k=n \\ 0, & \text{при } k\neq n \end{cases} \quad (k, n = 1, 2, \cdots). \tag{1.22}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 для любого $n\geqslant 1$ имеем представление

$$\Omega_n(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\omega_n(t)\,dt, \quad z\in G^{(+)}.$$

Отсюда, путем r-кратного дифференцирования по параметру z, получим

$$\Omega_n^{(r)}(z) = (-1)^r\int_0^\infty e^{-tz}t^r\omega_n(t)\,dt, \quad z\in G^{(+)} \quad (r=0, 1, 2, \cdots). \tag{1.23}$$

Наконец, принимая во внимание свойства (1.9) функций $\Omega_n(z)$, $n\geqslant 1$, из (1.23) легко приходим к соотношениям биортогональности (1.22) теоремы.

(д). Назовем последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty \in G^{(+)}$ *упорядоченной*, если ее нумерация произведена так, что все кратные элементы в ней имеют подряд идущие индексы.

Ниже мы будем полагать, что наряду с условием (1.1) последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — также упорядоченная.

Тогда, принимая во внимание смысл чисел p_n $(n\geqslant 1)$ и обозначив

$$k_1=0,\ k_i=p_1+p_2+\cdots+p_{i-1}\quad (i\geqslant 2), \tag{1.24}$$

очевидно, будем иметь

$$\lambda_{k_i}\neq\lambda_{k_i+1}=\cdots=\lambda_{k_{i+1}}\neq\lambda_{k_{i+1}+1}\quad (i\geqslant 0), \tag{1.25}$$

если условиться полагать $\lambda_{k_0}=0$.

Поскольку последовательность $\{k_i\}_1^\infty$ монотонно возрастает к $+\infty$, то, таким образом, мы получаем разбиение множества всех натуральных чисел на непересекающиеся классы $\{(k_i,\ k_{i+1}]\}_0^\infty$, т. е.

$$\{n\}_1^\infty=\bigcup_{i=0}^\infty (k_i,\ k_{i+1}]. \tag{1.26}$$

Следовательно, любое натуральное число $n>1$ принадлежит лишь одному из наших классов $\{(k_i,\ k_{i+1}]\}_0^\infty$. Это значит, что каждому $n\geqslant 1$ можно ставить в соответствие лишь один индекс $i=i_n\geqslant 0$ так, что

$$n\in(k_{i_n},\ k_{i_n+1}]. \tag{1.27}$$

Но при данном $n\geqslant 1$ в нашей упорядоченной последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ число λ_n имеет кратность p_n, а на ее отрезке $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ оно обладает кратностью $s_n<p_n$. Из этого факта, ввиду (1.27), мы приходим к следующим утверждениям:

$$\begin{aligned}&1)\ k_{i_n+1}-k_{i_n}=p_{i_n}=p_n,\ n=k_{i_n}+s_n;\\ &2)\ \lambda_j=\lambda_n,\ k_{i_n}+1\leqslant j\leqslant k_{i_n+1};\\ &3)\ \lambda_j\neq\lambda_n,\ 1<j\leqslant k_{i_n},\ j\geqslant k_{i_n+1}+1.\end{aligned} \tag{1.28}$$

Заметим также, что, поскольку s_j есть кратность появления λ_j на отрезке $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_j\}$, то очевидно

$$s_j=j-k_{i_n},\ k_{i_n}+1\leqslant j\leqslant k_{i_n+1} \tag{1.29}$$

и, в частности

$$s_n=n-k_{i_n}. \tag{1.29'}$$

Из (1.29) следует, далее, что

$$s_j<s_n,\ \text{при}\ k_{i_n}+1\leqslant j<k_{i_n}+s_n\ ^*, \tag{1.30}$$

$$s_j\geqslant s_n,\ \text{при}\ k_{i_n}+s_n\leqslant j\leqslant k_{i_n}+1=k_{i_n}+p_n.$$

Введем, наконец, в рассмотрение интегралы

---

* Если при данном $n\in(k_{i_n},\ k_{i_n+1}]$ мы имеем $s_n=1$, то это утверждение вообще следует отбросить.

$$J_n(\lambda_j, r) = \int_0^\infty e^{-\lambda_j x} x^r \omega_n(x)\,dx \quad (n, j=1, 2, \cdots; \ 0 \leqslant r \leqslant p_j - 1). \tag{1.31}$$

Из свойств (1.28) и (1.30) введенных нами параметров, в силу теоремы 1 непосредственно следует справедливость следующих важных для дальнейшего утверждений.

Для любого $n \in (k_{l_n}, k_{l_{n+1}}]$, $j \geqslant 1$ и $0 < r \leqslant p_j - 1$

$$J_n(\lambda_j, r) = \begin{cases} 0, & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k_{l_n} \text{ и } j \geqslant k_{l_{n+1}} + 1 \\ 0, & \text{при } k_{l_n} + 1 \leqslant j < k_{l_n} + s_n \ * \\ 1, & \text{при } k_{l_n} + s_n < j \leqslant k_{l_{n+1}} = k_{l_n} + p_n. \end{cases} \tag{1.32}$$

§ 2. Теоремы примыкания и единственности

(а). С самого начала предполагая лишь, что $\{\lambda_j\}_1^\infty \in G^{(+)}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, следуя идее С. Мандельбройта [1], введем некоторые обозначения и определения.

Рассмотрим формальный ряд типа Дирихле

$$\sum_{j=1}^\infty d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j - 1}, \tag{2.1}$$

где $\{d_j\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, а целые числа $s_j \geqslant 1$ имеют тот же смысл, что и в § 1, т. е. s_j означает кратность появления λ_j на отрезке $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_j\}$.

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ $(j \geqslant 1)$, то очевидно, что для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ и $m \geqslant 1$ суммы вида

$$S_m(x) \equiv \sum_{j=1}^m d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j - 1} \tag{2.2}$$

принадлежат классу $L_2(\sigma, +\infty)$.

Предположим теперь, что функция $F(x)$ определена на полуоси $[\sigma_0, +\infty)$ и принадлежит классу $L_2(\sigma_0, +\infty)$ при некотором фиксированном $\sigma_0 > -\infty$.

Тогда величина

$$\|F(x) - S_m(x)\|_\sigma = \left\{ \int_\sigma^{+\infty} |F(x) - S_m(x)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

конечна при любом $\sigma \geqslant \sigma_0$ и $m \geqslant 1$.

Поэтому, когда $\sigma \in [\sigma_0, +\infty)$ и $k \geqslant 1$

$$\inf_{m \geqslant k} \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma \equiv \rho_k(\sigma, F) < +\infty. \tag{2.4}$$

Из самого определения (2.4) видно, что $\rho_k(\sigma, F) \leqslant \rho_{k+1}(\sigma, F)$

* См. примечание на стр. 265.

$(k \geqslant 1)$, причем каждая из этих функций не возрастает на $[\sigma_0, +\infty)$ и стремится к нулю при $\sigma \to \infty$.

Условимся теперь последовательность функций $\{p_k(\sigma)\}_1^\infty$ относить к классу P_{σ_0}, если

1) $\inf\limits_{\sigma > \sigma_0} p_k(\sigma) > -\infty \quad (k = 1, 2, \cdots)$;

2) функция $p_k(\sigma)$ $(k \geqslant 1)$ не убывает на $[\sigma_0 + \infty)$ и

$$\lim_{\sigma \to +\infty} p_k(\sigma) = +\infty \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Заметим, что если $\{p_k(\sigma)\}_1^\infty \in P_{\sigma_0}$, то, вообще говоря, не исключено, что каждая из функций $p_k(\sigma) = +\infty$ при достаточно большом $\sigma_k \subset \subset [\sigma_0, +\infty)$.

Условимся, наконец, обозначать $R_{\sigma_0}[\{\lambda_j, d_j\}; p_k(\sigma)]$ множество функций $F(x)$ из $L_2(\sigma_0, +\infty)$, для которых

$$\rho_k(\sigma, F) \leqslant \exp\{-p_k(\sigma)\} \quad (\sigma_0 \leqslant \sigma < +\infty, \ k \geqslant 1), \tag{2.5}$$

где $\{p_k(\sigma)\} \in P_{\sigma_0}$.

Таким образом, для каждой функции $F(x) \in R_{\sigma_0}[\{\lambda_j; d_j\}; p_k(\sigma)]$ имеем

$$\inf_{m > k} \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma \leqslant \exp\{-p_k(\sigma)\} \quad (k \geqslant 1), \tag{2.6}$$

где $\{p_k(\sigma)\} \in P_{\sigma_0}$.

Если $F(x) \in R_{\sigma_0}[\{\lambda_j, d_j\}; p_k(\sigma)]$, то будем говорить также, что суммы

$$S_m(x) = \sum_{j=1}^m d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j - 1}$$

при $m > k$ представляют функцию $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma_0, +\infty)$ с логарифмической точностью $p_k(\sigma)$.

Отметим, что если ряд $S_\infty(x)$ сходится к $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma, +\infty)$ при достаточно большом $\sigma_1 \geqslant \sigma_0$, то суммы $S_m(x) (m \geqslant k)$ представляют $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma_1, +\infty)$ с логарифмической точностью, равной $+\infty$ при любом $k \geqslant 1$. Иначе говоря, тогда на всей полуоси $[\sigma_1, +\infty)$ $\rho_k(\sigma) = 0$ $(k \geqslant 1)$ и, тем самым, можно положить, что $p_k(\sigma) = +\infty$, $\sigma \in [\sigma_1, +\infty)$ $(k > 1)$.

Но вместе с тем отметим также, что если даже при всех $k \geqslant 1$ $p_k(\sigma) = +\infty$ при $\sigma \geqslant \sigma_0$, то тогда мы все же не сможем утверждать о сходимости ряда $S_\infty(x)$ к $F(x)$ в метрике L_2, хотя бы на части полуоси $[\sigma_0 + \infty)$. Тогда, конечно, можно утверждать лишь, что для некоторой бесконечной последовательности $\{m_l\}$ все же

$$\lim_{l \to +\infty} \|F(x) - S_{m_l}(x)\|_{\sigma_0} = 0.$$

Иначе говоря, в этом случае (как и в случае, когда $p_k(\sigma) = +\infty$ $\sigma \in [\sigma_0, +\infty)$, даже при некотором $k \geqslant 1$) можно лишь утверждать сверхсходимость ряда $S_\infty(x)$ к функции $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma_0, +\infty)$.

(б). В этом пункте и всюду в дальнейшем, предполагая, что последовательность $\{\lambda_j\}_1^\infty \in G^+$ — упорядоченная и удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < \infty, \tag{2.7}$$

будем пользоваться обозначениями, введенными в § 1 (д).

Во-первых, для любого

$$n = k_{l_n} + s_n \in (k_{l_n},\ k_{l_{n+1}}] \text{ и } \nu \in [s_n,\ p_n]$$

определим полиномы

$$P_n(\sigma, \nu) = \sum_{j=k_{l_n}+s_n}^{k_{l_n}+\nu} d_j C_{s_j-1}^{s_n-1} \sigma^{s_j-s_n} =$$

$$= \sum_{j=k_{l_n}+s_n}^{k_{l_n}+\nu} d_j \frac{\Gamma(s_j)}{\Gamma(1+s_j-s_n)\,\Gamma(s_n)} \sigma^{s_j-s_n}. \tag{2.8}$$

Заметим, во-вторых, что по (1.29)

$$s_j = j - k_{l_n},\quad k_{l_n}+1 \leqslant j < k_{l_{n+1}},$$

ввиду чего наши полиномы могут быть записаны также в виде

$$P_n(\sigma, \nu) = \sum_{j=n}^{n+\nu-s_n} d_j \frac{\Gamma(j-k_{l_n})}{\Gamma(1+j-n)\,\Gamma(n-k_{l_n})} \sigma^{j-n},\quad s_n \leqslant \nu \leqslant p_n. \tag{2.9}$$

Из (2.9) видно, что $P_n(\sigma, \nu)$ — полином степени $\nu - s_n \leqslant p_n - s_n$, причем, в предельном случае, когда $\nu = p_n$, соответствующий полином

$$P_n(\sigma, p_n) \equiv P_n(\sigma) = \sum_{j=n}^{n+p_n-s_n} d_j \frac{\Gamma(j-k_{l_n})}{\Gamma(1+j-n)\,\Gamma(n-k_{l_n})} \sigma^{j-n} \tag{2.9'}$$

равен степени $p_n - s_n$.

Докажем теперь лемму.

Л е м м а 3. *Пусть $\{\lambda_j\}_1^\infty \in G^{(+)}$ — упорядоченная последовательность комплексных чисел, подчиненная условию* (2.7). *Тогда для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ и $n \in (k_{l_n}, k_{l_n+1}]$ справедливо тождество*

$$Q_{n,m}(\sigma) \equiv e^{\sigma\lambda_n} \int_0^\infty S_m(x+\sigma)\, \omega_n(x)\, dx =$$

$$= \begin{cases} P_n(\sigma, p_n) \equiv P_n(\sigma), & \text{если } m \geqslant k^{l}{}_{n+1} = k_{l_n} + p_n \\ P_n(\sigma, \nu), & \text{если } m = k_{l_n} + \nu \ (s_n \leqslant \nu \leqslant p_n). \end{cases} \tag{2.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя значение $S_m(x+\sigma)$ из (2.2) под знак интеграла $Q_{n,m}(\sigma)$ и пользуясь обозначением (1.31), мы получим

$$e^{-\sigma\lambda_n} Q_{n,m}(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} d_j\, e^{-\sigma\lambda_j} \sum_{r=0}^{s_j-1} C_{s_j-1}^{r}\, \sigma^{s_j-1-r} J_n(\lambda_j, r).$$

Пользуясь теперь первым из свойств (1.32) интегралов $J_n(\lambda_j, r)$ и утверждением 2) из (1.28), будем иметь

$$Q_{n,m}(\sigma) = \sum_{j=k_{l_n}+1}^{\varkappa(n,m)} d_j \sum_{r=0}^{s_j-1} C_{s_j-1}^{r}\, \sigma^{s_j-1-r} J_n(\lambda_n, r), \tag{2.11}$$

где

$$\varkappa(n, m) = \min\{k_{l_n}+1, m\} =$$

$$= \begin{cases} k_{l_n+1} = k_{l_n} + p_n, & \text{если } m \geqslant k_{l_n+1} \\ k_{l_n} + \nu, & \text{если } m = k_{l_n} + \nu,\ s_n \leqslant \nu \leqslant p_n. \end{cases} \tag{2.11'}$$

Наконец, из (2.11)—(2.11′), если учтем второе и третье из свойств (1.32) интегралов $J_n(\lambda_j, r)$, мы приходим к формуле

$$Q_{n,m}(\sigma) = \sum_{j=k_{l_n}+s_n}^{k_{l_n}+\nu} d_j\, C_{s_j-1}^{s_n-1}\, \sigma^{s_j-s_n} \equiv P_n(\sigma, \nu),\ s_n \leqslant \nu \leqslant p_n,$$

чем и завершим доказательство леммы.

(в). Докажем теперь следующую теорему об оценке полиномов $P_n(\sigma, \nu)$, когда соответствующие им ряды вида (2.1) примыкают к данной функции $F(x) \in L_2(\sigma, +\infty)$ с логарифмической точностью $p_1(\sigma)$.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_j\}_1^\infty \in G^{(+)}$ — упорядоченная последовательность, удовлетворяющая условию* (2.7).

Если

$$F(x) \in R_{\sigma_0}[\{\lambda_j, d_j\}; p_n(\sigma)], \tag{2.12}$$

то при любом $\sigma \geqslant \sigma_0$ и $n \geqslant 1$

$$|P_n(\sigma, \nu)| \leqslant \|\omega_n\| \{\|F_n\|_\sigma + e^{-p_n^{-}(\sigma)}\}\, e^{-\sigma \operatorname{Re}\lambda_n},\ s_n \leqslant \nu \leqslant p_n, \tag{2.13}$$

где $\|\omega_n\|$ определяется из формул (1.16)—(1.18) *леммы 2 и*

$$\|F\|_\sigma = \left\{ \int_\sigma^\infty |F(x)|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Полагая, что $\sigma \in [\sigma_0, +\infty)$ и $n \geqslant 1$ — любое фиксированное целое число, рассмотрим интеграл

$$U_n(\sigma) = \int_0^\infty F(x+\sigma)\, \omega_n(x)\, dx.$$

Пользуясь неравенством Шварца-Буняковского, ввиду принятых нами обозначений, получим оценку

$$|U_n(\sigma)| \leqslant \|\omega_n\| \cdot \|F\|_\sigma\ (n \geqslant 1,\ \sigma_0 \leqslant \sigma < \sigma < +\infty). \tag{2.14}$$

Полагая теперь, что $n \in (k_{l_n}, k_{l_n+1}]$, при любом $m \geqslant n$ представим интеграл $U_n(\sigma)$ в виде

$$U_n(\sigma) = \int_0^\infty \{F(x+\sigma) - S_m(x+\sigma)\}\,\omega_n(x)\,dx +$$

$$+ \int_0^\infty S_m(x+\sigma)\,\omega_n(x)\,dx = U^{(1)}_{n,m}(\sigma) + U^{(2)}_{n,m}(\sigma), \tag{2.15}$$

но очевидно, что

$$|U^{(1)}_{n,m}(\sigma)| \leqslant \|\omega_n\| \cdot \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma \quad (m \geqslant n),$$

и поэтому

$$\inf_{m>n} |U^{(1)}_{n,m}(\sigma)| \leqslant \|\omega_n\| \inf_{m>n} \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma \leqslant$$

$$\leqslant e^{-p_n(\sigma)} \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.16}$$

ввиду условия (2.12) теоремы.

С другой стороны, согласно лемме 3, при $m \geqslant n$

$$U^{(2)}_{n,m}(\sigma) \equiv e^{-\sigma\lambda_n}\, Q_{n,m}(\sigma) \equiv$$

$$\equiv e^{-\sigma\lambda_n}\, P_n(\sigma, \nu),\ s_n \leqslant \nu \leqslant p_n, \tag{2.17}$$

где полиномы $P_n(\sigma, \nu)$ определяются из формул (2.8)—(2.9).

Таким образом, возвращаясь к тождеству (2.15), мы можем записать его в виде

$$e^{-\sigma\lambda_n}\, P_n(\sigma, \nu) = U_n(\sigma) - U^{(1)}_{n,m}(\sigma),\ m \geqslant n. \tag{2.15'}$$

Наконец, отсюда мы получим оценку (2.13) теоремы, ввиду (2.14) и (2.16).

Замечания к теореме 2. 1°. *В случае, когда суммы $S_m(x)$ сходятся к $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma, +\infty)$ хотя бы при достаточно большом $\sigma_1 \geqslant \sigma_0$, неравенство* (2.13) *можно заменить на следующее*

$$|P_n(\sigma, \nu)| \leqslant \|\omega_n\| \cdot \|F\|_\sigma\, e^{\sigma\lambda_n} \quad (\sigma \geqslant \sigma_1,\ n \geqslant 1,\ s_n < \nu \leqslant p_n). \tag{2.13'}$$

2°. *В случае, когда суммы $S_m(x)$ представляют функцию $F(x)$ с логарифмической точностью $p_n(\sigma)$, равной $+\infty$ при $\sigma \geqslant \sigma_n \geqslant \sigma_0$, неравенства* (2.13′) *вновь останутся в силе, но лишь при $\sigma \geqslant \sigma_n$.*

(г). Из теоремы 2 приходим к следующим двум теоремам единственности.

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{\lambda_j\}_1^\infty$ и функция $F(x)$ при любом $\sigma_0 > -\infty$ удовлетворяют условиям теоремы* 2.

Положим далее, что кроме условия (2.7) *имеем также*

$$\inf_{j \geqslant 1} \{\operatorname{Re} \lambda_j\} \geqslant \mu_0 > 0. \tag{2.18}$$

Тогда 1°. *Если*

$$\lim_{\sigma\to-\infty} \{\|F\|_\sigma e^{\sigma_1\lambda_0}\} = 0 \tag{2.19}$$

и

$$\lim_{\sigma\to-\infty} \inf \{\sigma \operatorname{Re} \lambda_n - p_n(\sigma)\} = -\infty \ (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.20}$$

то

$$d_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots). \tag{2.21}$$

2°. *В условиях* (2.19) *и* (2.20) *имеем также**

$$\|F\|_\sigma \leqslant e^{-p(\sigma)} \ (-\infty < \sigma < +\infty), \tag{2.22}$$

где

$$p(\sigma) = \sup_{k\geq 1} \{p_k(\sigma)\} \leqslant +\infty. \tag{2.23}$$

Доказательство. 1°. Поскольку по условию у нас $\sigma_0 > -\infty$ произвольно, то в данном случае мы можем воспользоваться неравенствами (2.13) теоремы 2, полагая, что $\sigma > -\infty$ — любое число.

Итак, в силу (2.13) и (2.18), мы для любого $n \geqslant 1$ и $\sigma > -\infty$ имеем оценки

$$|P_n(\sigma, \nu)| \equiv \left| \sum_{j=n}^{n+\nu-s_n} d_j \frac{\Gamma(j-k_{i,n})}{\Gamma(1+j-n)\,\Gamma(n-k_{i,n})} \sigma^{j-n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\omega_n\| \{\|F\|_\sigma e^{\sigma\lambda_0} + \exp[\sigma \operatorname{Re} \lambda_n - p_n(\sigma)]\} \ (s_n \leqslant \nu \leqslant p_n).$$

Отсюда, в силу условий (2.19) и (2.20), при $\sigma \to -\infty$ мы получим утверждение (2.21) теоремы.

2°. Так как $F(x) \in R_{\sigma_0} [\{\lambda_j, d_j\}; p_n(\sigma)]$, то в силу (2.21) будем иметь

$$\inf_{m\geq k} \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma \equiv \|F\|_\sigma \leqslant e^{-p_k(\sigma)} \ (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.24}$$

при любом $\sigma > -\infty$. Поэтому неравенство (2.22) есть непосредственное следствие из (2.24) и (2.23).

К доказанной теореме добавим также, что если в условиях (2.19) и (2.20) мы имеем

$$p(\sigma) = \sup_{k\geq 1} \{p_k(\sigma)\} = +\infty, \ \sigma \geqslant x_0,$$

то $F(x) = 0$ почти всюду на полуоси $[x_0; +\infty)$.

Но при более жестких условиях можно утверждать большее.

Теорема 4. *Если для любого* $\sigma > -\infty$

$$\lim_{m\to\infty} \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma = 0, \tag{2.25}$$

---

* Отметим, что произвольно сильное убывание как $F(x)$, так и $\|F\|_\sigma$ при $\sigma \to +\infty$, здесь еще не обеспечивает единственности функции $F(x)$. В этом и заключается существенное качественное отличие природы примыкания на вещественной оси от случая примыкания в полосообразных областях Δ, когда аналитическая в ней функция $F(z) \neq 0$ не может убывать произвольно быстро при $Re\, z \to +\infty$.

то при условиях (2.18) и (2.19), $F(x)=0$ *почти всюду на всей оси* $-\infty<x<+\infty$.

Доказательство. Из (2.25) следует, что для любого $\sigma>-\infty$

$$\inf_{m>n}\|F(x)-S_m(x)\|_\sigma=\rho_n(\sigma)=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

Поэтому в данном случае можно утверждать, что для любого $\sigma>-\infty$ суммы $S_m(x)$ в метрике $L_2(\sigma,+\infty)$ представляют функцию $F(x)$ с логарифмической точностью $p_n(\sigma)=+\infty$ $(\sigma>-\infty)$. Следовательно, условие (2.20) теоремы у нас выполняется автоматически и при любом $n\geqslant1$.

Вместе с тем имеем также

$$p(\sigma)=\sup_{\nu>1}\{p_\nu(\sigma)\}=+\infty$$

для любого $\sigma>-\infty$, и наше утверждение непосредственно следует из неравенства (2.22) теоремы 3.

(д). В связи с теоремой 4 заметим, что в случае, когда последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ такова, что

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots,\ \sum_1^\infty\lambda_j^{-1}<+\infty$$

и, таким образом, $s_k=1$ $(k\geqslant1)$, то близкое к ней утверждение было установлено Л. Шварцем [9].

В предположении, что целая функция $F(z)$ разложима в ряд Дирихле

$$F(z)=\sum_{j=1}^\infty d_j\,e^{-\lambda_j z}\quad(|z|<\infty)$$

и

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|F(x)|<+\infty,$$

было доказано, что $F(z)\equiv\text{const}$.

В случае же, когда $\{\lambda_j\}_1^\infty$ — целые числа, Макинтайр [10] установил тот же результат, показав также, что при $\sum\limits_1^\infty\lambda_j^{-1}=+\infty$ он перестает быть верным.

В связи с этим заметим, что вопрос о необходимости условия (2.7) в общем случае—для теоремы 4, остается открытым.

В заключение отметим, что результаты, аналогичные теоремам 2, 3 и 4 можно установить и в тех случаях, когда примыкание рядов вида (2.1) имеет место и в других метриках, в частности, в метрике равномерного приближения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 10.VII.1972

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Դիրիխլեի տիպի շարքերի հպումը և միակությունը իրական առանցքի վրա (*ամփոփում*)

Ներկա հոդվածում կառուցվում է Դիրիխլեի տիպի

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j-1} \tag{1}$$

շարքերի հպման և միակության տեսության ապարատը իրական առանցքի վրա L_2 մետրիկայում։

Այդ արվում է ենթադրելով, որ (1) շարքի $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ ցուցիչները կամայական կոմպլեքս թվեր են $\mathrm{Re}\, z > 0$ *կիսահարթությունից, որոնք բավարարում են միայն*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < +\infty \tag{2}$$

պայմանին, իսկ $s_j \geqslant 1$ թիվը λ_j թվի հանդես գալու կարգն է մեր հաջորդականության $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_j\}$ հատվածում։

Նշենք, որ շերտաձև տիրույթներում Դիրիխլեի սովորական շարքերի հպման տեսության Ս. Մանդելբրոյտի զարգացրած հայտնի մեթոդը [1] հոդվածում դիտարկված իրական դեպքի համար կորցնում է իր ուժը։

M. M. DŽRBAŠIAN. *Adherence and uniqueness of Dirichlet type series on the real axis* (summary)

The present paper developes the apparatus of the theory of adherence and uniqueness of the Dirichlet type series

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j-1} \tag{1}$$

on the real axis in the L_2—metric.

This is done providing the powers $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ of the series (1) are arbitrary complex numbers from the halfplane $\mathrm{Re}\, z > 0$, which satisfy the condition

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < \infty. \tag{2}$$

The number $s_j \geqslant 1$ is the appearance-multiplisity of Δ_j in the segment $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_j\}$ of our sequence.

Remark, that the known method of the adhervence theory of usual Dirichlet series in stripe—type regions, developed by S. Mandelbrojt is not applicable in the case of real axis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Мандельбройт.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИИЛ, М., 1955.
2. *С. Мандельбройт.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции, ИИЛ, М., 1962.
3. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, Изд. „Наука", 1964.

4. *А. О. Гельфонд*. Об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна, Изв. АН СССР сер. мат., 14, 1956.

5. *М. М. Джрбашян*. О пополнении и замыкании неполной системы $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k - 1}\}_1^\infty$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961.

6. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян*. О построения некоторых биортогональных систем, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 12, № 5, 1959.

7. *М. М. Джрбашян*. Краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка типа Штурма-Лиувилля, Изв. АН АрмССР, „Математика", 5, № 2, 1970.

8. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, Л., 1948.

9. *L. Schwartz*. Etude des sommes d'exponentielles, cap. II, Hermann, Paris, 1959.

10. *A. J. Macintyre*. Asymptotic paths of integral functions with gap power series, Proc. London Math. Soc., 2, 1952.