ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

СВОЙСТВО ОТДЕЛИМОСТИ СИСТЕМЫ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ

В работе [1] А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин предложили одну теорему об отделимости выпуклых конусов. Эта теорема представляет собой весьма удобный аппарат для получения необходимых условий в различных экстремальных задачах (относящихся к математическому программированию, теории оптимального управления и т. п.). Обзор применений этой теоремы можно найти в небольшой прекрасно написанной книге Б. Н. Пшеничного [2]. Характерным для теоремы Дубовицкого-Милютина является то, что в ней все рассматриваемые конусы, кроме одного, телесны. Настоящая статья посвящена обобщению этой теоремы на произвольную систему выпуклых конусов.

Через E в дальнейшем будет обозначаться конечномерное евклидово векторное пространство, рассматриваемое в обычной топологии. Символ $\operatorname{int} M$ будет означать совокупность всех внутренних точек множества $M \subset E$. Под термином „конус" мы в дальнейшем всегда будем понимать *замкнутый выпуклый конус* пространства E с вершиной в нулевой точке 0. Конус $K \subset E$ называется *телесным*, если его несущая плоскость совпадает с E, т. е. если $\operatorname{int} K \neq \varnothing$. Внутренность произвольного выпуклого множества M относительно его несущей плоскости будет обозначаться через $\operatorname{int}_{\rm rel} M$.

Ниже нам понадобятся несколько хорошо известных фактов теории выпуклых множеств (теоремы 1—4).

Теорема 1. *Если выпуклые множества $M_1, M_2, \cdots, M_s$ обладают тем свойством, что*

$$(\operatorname{int}_{\rm rel} M_1) \cap (\operatorname{int}_{\rm rel} M_2) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\rm rel} M_s) \neq \varnothing,$$

то несущая плоскость множества $M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_s$ совпадает с пересечением несущих плоскостей множеств $M_1, \cdots, M_s$ и справедливо соотношение

$$\operatorname{int}_{\rm rel} (M_1 \cap \cdots \cap M_s) = (\operatorname{int}_{\rm rel} M_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\rm rel} M_s).$$

Теорема 2. *Пусть $K_1, K_2, \cdots, K_s$ — конусы в E и $[K_1, K_2, \cdots, K_s]$ — порожденный ими конус, т. е. выпуклая оболочка множества $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_s$. Вектор $a \in E$ в том и только в том случае принадлежит конусу $[K_1, \cdots, K_s]$, если его можно представить в виде $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$, где $a_i \in K_i$, $i = 1, \cdots, s$.*

Конусы K_1 и K_2 называются *отделимыми* в E, если существует такая гиперплоскость Γ пространства E (проходящая через точку 0), что конус K_1 содержится в одном замкнутом полупространстве, определяемом гиперплоскостью Γ, а конус K_2—в другом.

Теорема 3. *Конусы K_1, K_2 в том и только в том случае неотделимы в E, если выполнены следующие два условия:*

1°. $(\mathrm{int}_{rel}\, K_1) \cap (\mathrm{int}_{rel}\, K_2) \neq \varnothing$;

2°. *не существует в E гиперплоскости, содержащей оба конуса K_1, K_2.*

Пусть K—произвольный конус в E. Через $D(K)$ обозначим множество всех таких векторов $a \in E$, что $ax \leqslant 0$ для любого вектора $x \in K$. Множество $D(K)$ также является конусом; этот конус называется *двойственным* к конусу K. Несложно доказывается, что $D(D(K)) = K$.

Теорема 4. *Для любых конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ справедливы соотношения*

$$D([K_1, K_2, \cdots, K_s]) = D(K_1) \cap D(K_2) \cap \cdots \cap D(K_s),$$

$$D(K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_s) = [D(K_1), D(K_2), \cdots, D(K_s)].$$

Будем говорить, что система конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ обладает в E *свойством отделимости*, если их можно так распределить в две подсистемы (каждая из которых содержит хотя бы один конус), что пересечение конусов первой подсистемы отделимо от пересечения конусов второй подсистемы.

Теорема 5. *Для того чтобы система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно существование таких векторов $a_1 \in D(K_1), \cdots, a_s \in D(K_s)$, хотя бы один из которых отличен от нуля, что*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_s = 0. \qquad (1$$

Доказательство. Пусть система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обла-) дает свойством отделимости. Без ограничения общности можно считать (изменив, если нужно, нумерацию конусов), что отделимы конусы $K_1 \cap \cdots \cap K_l$ и $K_{l+1} \cap \cdots \cap K_s$, где l — некоторое натуральное число, меньшее s. Иначе говоря

$$K_1 \cap \cdots \cap K_l \subset P_1, \; K_{l+1} \cap \cdots \cap K_s \subset P_2,$$

где P_1, P_2—два замкнутых полупространства, определяемых в E некоторой гиперплоскостью Γ (проходящей через точку 0). Пусть $n \neq 0$— такая нормаль к гиперплоскости Γ, что $nx \leqslant 0$ для любого вектора $x \in P_1$ (и, значит, $nx \geqslant 0$ для любого вектора $x \in P_2$). Тогда

$$n \in D(K_1 \cap \cdots \cap K_l) = [D(K_1), \cdots, D(K_l)],$$

$$-n \in D(K_{l+1} \cap \cdots \cap K_s) = [D(K_{l+1}), \cdots, D(K_s)],$$

и потому, в силу теоремы 2

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_l, \; -n = a_{l+1} + \cdots + a_s,$$

где $a_i \in D(K_i)$, $i = 1, \cdots, s$. Складывая эти соотношения, мы и получаем равенство (1). Заметим, что среди векторов $a_1, \cdots, a_s$ заведомо имеются отличные от нуля, так как $n \neq 0$.

Обратно, пусть существуют векторы $a_1 \in D(K_1), \cdots, a_s \in D(K_s)$, удовлетворяющие соотношению (1) и не все равные нулю. Пусть, для определенности, $a_1 \neq 0$. Обозначим через Г гиперплоскость, проходящую через точку 0 и ортогональную вектору a_1. Так как $a_1 \in D(K_1)$, то конус K_1 находится в полупространстве P_1, определяемом неравенством $a_1 x \leqslant 0$. Далее, так как, в силу теорем 2 и 4

$$-a_1 = a_2 + \cdots + a_s \in [D(K_2), \cdots, D(K_s)] = D(K_2 \cap \cdots \cap K_s),$$

то конус $K_2 \cap \cdots \cap K_s$ находится в полупространстве P_2, определяемом неравенством $a_1 x \geqslant 0$. Таким образом, конусы K_1 и $K_2 \cap \cdots \cap K_s$ отделимы, и потому система конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ обладает свойством отделимости.

Теорема 6. *Если ни один из конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ не отделим от пересечения остальных, то система конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ не обладает свойством отделимости.*

В самом деле, если система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обладает свойством отделимости, то по теореме 5, найдутся векторы $a_1 \in D(K_1), \cdots, a_s \in D(K_s)$, не все равные нулю и удовлетворяющие соотношению (1). Но тогда вторая часть доказательства теоремы 5 показывает, что найдется среди конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ такой, который отделим от пересечения остальных.

Теорема 7. *Для того чтобы система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно существование в E таких линейных функционалов $f_1, \cdots, f_s$, хотя бы один из которых не равен тождественно нулю, что $f_i(x) \leqslant 0$ при $x \in K_i$, $i = 1, \cdots, s$, и выполнено соотношение*

$$f_1 + \cdots + f_s \equiv 0.$$

Это непосредственно вытекает из теоремы 5: достаточно определить функционалы f_i равенствами

$$f_i(x) = a_i x \quad (i = 1, \cdots, s).$$

Теорема 8. *Для того чтобы система конусов $K_1, \cdots, K_s$ не обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

1°. $(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\, K_1) \cap (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\, K_2) \cap \cdots \cap (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\, K_s) \neq \varnothing$;

2°. *существуют такие подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_s$, в прямую сумму которых распадается E (причем, возможно, $\dim L_i = 0$ для некоторых i), что при любых $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \cdots, s$) подпространство L_i содержится в несущей плоскости конуса K_j.*

Доказательство. Допустим, что условия 1° и 2° выполнены, и предположим, вопреки утверждению, что система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обладает свойством отделимости. Тогда, в силу теоремы 6, какой-нибудь из этих конусов (скажем, K_1) отделим от пересечения остальных, т. е. существует такая гиперплоскость Γ (проходящая через точку 0), что $K_1 \subset P_1$, $K_2 \cap \cdots \cap K_s \subset P_2$, где P_1, P_2 — замкнутые полупространства, определяемые гиперплоскостью Γ. Пусть a—какая-либо точка множества $\bigcap\limits_{i=1}^{s} \operatorname{int}_{\text{rel}} K_i$ (такая точка существует в силу условия 1°). Тогда $a \in K_1 \subset P_1$, $a \in K_2 \cap \cdots \cap K_s \subset P_2$, и потому $a \in P_1 \cap P_2 = \Gamma$. При $i \neq 1$ плоскость M_i, параллельная L_i и проходящая через точку a, содержится в несущей плоскости конуса K_1, а так как a—внутренняя точка конуса K_1 относительно его несущей плоскости, то все достаточно близкие к a точки плоскости M_i принадлежат конусу K_1 и, значит, полупространству P_1. Из этого следует, что $M_i \subset \Gamma$ ($i=2, 3, \cdots, s$). Далее, плоскость M_1, параллельная L_1 и проходящая через a, содержится в несущей плоскости каждого из конусов $K_2, \cdots, K_s$, и все достаточно близкие к a точки плоскости M_1 принадлежат каждому из конусов $K_2, \cdots, K_s$, а потому и их пересечению $K_2 \cap \cdots \cap K_s$. Из этого следует, что $M_1 \subset \Gamma$. Итак, все плоскости $M_1, M_2, \cdots, M_s$ содержаться в Γ, и потому $E \subset \Gamma$, что противоречиво. Полученное противоречие показывает, что система конусов $K_1, \cdots, K_s$ свойством отделимости не обладает.

Обратно, пусть система конусов $K_1, \cdots, K_s$ не обладает свойством отделимости. Покажем, что выполнены условия 1° и 2°. Допустим, напротив, что условие 1° не выполнено и выберем такое натуральное $l < s$, что

$$(\operatorname{int}_{\text{rel}} K_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\text{rel}} K_l) \neq \varnothing, \quad (\operatorname{int}_{\text{rel}} K_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\text{rel}} K_{l+1}) = \varnothing. \qquad (2)$$

Первое из соотношений (2) показывает (в силу теоремы 1), что

$$(\operatorname{int}_{\text{rel}} K_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\text{rel}} K_l) = \operatorname{int}_{\text{rel}} (K_1 \cap \cdots \cap K_l),$$

и потому второе соотношение (2) переписывается в виде

$$(\operatorname{int}_{\text{rel}} (K_1 \cap \cdots \cap K_l)) \cap (\operatorname{int}_{\text{rel}} K_{l+1}) = \varnothing.$$

Из этого следует, в силу теоремы 3, что конусы $K_1 \cap \cdots \cap K_l$ и K_{l+1} отделимы, а потому, подавно, отделимы конусы $K_1 \cap \cdots \cap K_l$ и $K_{l+1} \cap \cap \cdots \cap K_s$. Но это противоречит предположению. Полученное противоречие показывает, что условие 1° выполнено.

Докажем, наконец, что выполнено условие 2°. Для этого проведем индукцию по числу s рассматриваемых конусов. При $s=2$ условие 2° теоремы 8 совпадает с условием 2° теоремы 3 и, следовательно, справедливо. Предположим, что справедливость условия 2° уже доказана для меньшего, чем s, числа конусов, и рассмотрим s конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ (не обладающих свойством отделимости). Обозначим через Π_s несущую плоскость конуса K_s, а через Π^*—несущую плоскость конуса $K_1 \cap \cdots \cap K_{s-1}$. Так как конусы $K_1 \cap \cdots \cap K_{s-1}$ и K_s неотделимы, то, по теореме 3, Π_s и Π^* не лежат в одной гиперплоскости. Следовательно найдется такое подпространство $L_s \subset \Pi^*$, что E распадается в прямую сумму подпространств Π_s и L_s.

Рассмотрим теперь конусы

$$K_1 \cap K_s,\ K_2 \cap K_s, \cdots, K_{s-1} \cap K_s. \qquad (3)$$

лежащие в подпространстве Π_s. Покажем, что эта система конусов не обладает в евклидовом векторном пространстве Π_s свойством отделимости. Допустим, напротив (см. теорему 6), что один из конусов (3) (скажем, первый) отделим в Π_s от пересечения остальных, т. е. конус $K_1 \cap K_s$ отделим в Π_s от конуса $K_2 \cap \cdots \cap K_{s-1} \cap K_s$. В силу уже доказанного условия 1°, мы имеем (по теореме 1)

$$\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,(K_1 \cap K_s) = (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,K_1) \cap (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,K_s),$$

$$\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,(K_2 \cap \cdots \cap K_s) = (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,K_2) \cap \cdots \cap (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,K_s),$$

так что (в силу условия 1°)

$$(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,(K_1 \cap K_s)) \cap (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,(K_2 \cap \cdots \cap K_s)) \neq \varnothing.$$

Следовательно, отделимость конусов $K_1 \cap K_s$ и $K_2 \cap \cdots \cap K_s$ в Π_s означает (по теореме 3), что несущие плоскости конусов $K_1 \cap K_s$ и $K_2 \cap \cdots \cap K_s$ лежат в одной гиперплоскости Γ евклидова пространства Π_s. В силу теоремы 1, несущая плоскость конуса $K_1 \cap K_s$ совпадает с $\Pi_1 \cap \Pi_s$, где Π_1—несущая плоскость конуса K_1. Пусть B_1—прямое дополнение подпространства $\Pi_1 \cap \Pi_s$ в евклидовом пространстве Π_1. Обозначим через C линейную оболочку подпространств B_1 и Π_s, а через C' — линейную оболочку подпространств B_1 и Γ. Тогда C' есть гиперплоскость пространства C, причем $K_1 \subset \Pi_1 \subset C'$ и $K_2 \cap \cdots \cap K_s \subset \Gamma \subset \subset C'$. Так как C' не совпадает с C (и, подавно, не совпадает с E), то это означает отделимость конусов K_1 и $K_2 \cap \cdots \cap K_s$, что однако противоречит предположению.

Итак, система конусов (2) не обладает в Π_s свойством отделимости. Так как число этих конусов меньше s, то по предположению индукции, существуют такие подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_{s-1}$, в прямую сумму которых распадается Π_s, что при любых $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \cdots, s-1$) подпространство L_i содержится в несущей плоскости конуса $K_j \cap K_s$. Непосредственно проверяется, что эти подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_{s-1}$ вместе с построенным ранее подпространством L_s удовлетворяют условию 2°, т. е. являются искомыми (напомним, что пространство E распадается в прямую сумму подпространств L_s и Π_s).

Сопоставляя доказанную теорему с теоремой 7, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть в E заданы конусы $K_1, \cdots, K_s$, удовлетворяющие условию 2° теоремы 8. Для того чтобы пересечение*

$$(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,K_1) \cap \cdots \cap (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\,K_s)$$

было пусто, необходимо и достаточно чтобы существовали на E такие линейные функционалы $f_1, \cdots, f_s$, хотя бы один из которых не равен тождественно нулю, что $f_i(x) \leqslant 0$ при $x \in K_i$, $i = 1, \cdots, s$, и выполнено соотношение

$$f_1+\cdots+f_s=0.$$

В этой теореме, как и в теореме 7, условие неположительности функционалов f_i на конусе K_i, $i=1,\cdots,s$, можно заменить условием неотрицательности: достаточно изменить знаки всех функционалов $f_1,\cdots,f_s$.

Теоремы 8 и 9 особенно упрощаются в случае, если все конусы $K_1,\cdots,K_s$, кроме, может быть, одного, являются телесными. В этом случае условие 2° теоремы 8, как легко видеть, выполняется автоматически. Действительно, пусть конусы $K_2,\cdots,K_s$ телесны, а K_1—произвольный конус. Чтобы убедиться, что выполнено условие 2°, достаточно за L_2 принять несущую плоскость конуса K_1, за L_1—ее прямое дополнение, а за $L_3,\cdots,L_s$ — тривиальные (нульмерные) подпространства. Заметим еще, что в силу телесности конусов $K_2,\cdots,K_s$ условие 1° теоремы 8 равносильно условию

$$K_1\cap(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\ K_2)\cap\cdots\cap(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\ K_s)\neq\varnothing. \tag{4}$$

Таким образом, мы получаем следующие две теоремы.

Теорема 10. *Пусть $K_2,\cdots,K_s$ — телесные конусы и K_1 — произвольный конус. Для того чтобы система конусов $K_1,\cdots,K_s$ не обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно выполнение условия* (4).

Теорема 11. *Пусть $K_2,\cdots,K_s$ — телесные конусы и K_1 — произвольный конус. Для того чтобы пересечение*

$$K_1\cap(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\ K_2)\cap\cdots\cap(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\ K_s)$$

было пусто, необходимо и достаточно чтобы существовали на E такие линейные функционалы $f_1, f_2,\cdots,f_s$, хотя бы один из которых не равен тождественно нулю, что $f_i(x)\leqslant 0$ при $x\in K_i$, $i=1,\cdots,s$, и выполнено соотношение

$$f_1+f_2+\cdots+f_s\equiv 0.$$

Теорема 12. *Пусть векторное пространство E распадается в прямую сумму своих подпространств $L_1,\cdots,L_k$. Через L_i^* $(i=1,\cdots,k)$ обозначим подпространство пространства E, порожденное объединением всех подпространств $L_1,\cdots,L_k$, кроме L_i. Таким образом, $E=L_i\oplus L_i^*$ и $L_i\subset L_j^*$ при $i\neq j$. Пусть, далее, для каждого $i=1,\cdots,k$ в пространстве L_i задана система конусов*

$$K_1^{(i)},\cdots,K_{s_i}^{(i)}, \tag{5}$$

либо состоящая только из одного конуса (т. е. $s_i=1$), либо не обладающая в L_i свойством отделимости. Обозначим через $N_j^{(i)}$ (где $i=1,\cdots,k$; $j=1,\cdots,s_i$) выпуклую оболочку множества $K_j^{(i)}\cup L_i^*$. Тогда система конусов

$$N_j^{(i)}\ (i=1,\cdots,k;\ j=1,\cdots,s_i) \tag{6}$$

не обладает в E свойством отделимости.

Доказательство. Допустим, напротив, что система конусов (6) обладает в E свойством отделимости, т. е. найдется среди конусов (6) такой, который отделим от пересечения остальных. Без ограничения общности можно считать (изменив, если нужно, нумерацию подпространств L_i и конусов $K_j^{(i)}$), что конус $N_1^{(1)}$ отделим в E от пересечения остальных конусов (6). Таким образом, существует в E такая гиперплоскость Г, проходящая через 0, что $N_1^{(1)} \subset P_1$, где P_1— одно из замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью Г, а пересечение $\Pi_1^{(1)}$ всех остальных конусов (6) содержится в другом замкнутом полупространстве P_2, определяемом гиперплоскостью Г.

Предположим сначала, что $s_1>1$ и допустим, что подпространство L_1 не содержится целиком в гиперплоскости Г. Тогда $\Gamma \cap L_1$ есть гиперплоскость пространства L_1, а $P_1 \cap L_1$ и $P_2 \cap L_1$ представляют собой замкнутые полупространства, на которые эта гиперплоскость разбивает пространство L_1. Так как

$$K_1^{(1)} \subset N_1^{(1)} \cap L_1 \subset P_1 \cap L_1,$$

$$\bigcap_{j=2}^{s_1} K_j^{(1)} \subset \left(\bigcap_{j=2}^{s_1} N_j^{(1)}\right) \cap L_1 \subset \Pi_1^{(1)} \cap L_1 \subset P_2 \cap L_1$$

(поскольку $N_j^{(i)} \supset L_1$ при $i \neq 1$), то гиперплоскость $\Gamma \cap L_1$ отделяет в пространстве L_1 конус $K_1^{(1)}$ от пересечения $K_2^{(1)} \cap \cdots \cap K_{s_1}^{(1)}$, т. е. система конусов (5) обладает при $i=1$ свойством отделимости, что, однако, противоречит предположению. Полученное противоречие показывает, что при $s_1>1$ гиперплоскость Г должна содержать подпространство L_1.

Если же $s_1=1$, то пересечение $\Pi_1^{(1)}$ всех конусов (6), кроме $N_1^{(1)}$, содержит плоскость L_1 (поскольку при $i\neq 1$ мы имеем $N_j^{(i)} \supset L_i^* \subset L_1$), и потому $L_1 \subset \Pi_1^{(1)} \subset P_2$. Отсюда следует, что и в этом случае $L_1 \subset \Gamma$.

Итак, $L_1 \subset \Gamma$. Кроме того, для любого $i=2, 3, \cdots, k$ мы имеем:

$$L_i \subset L_1^* \subset N_1^{(1)} \subset P_1,$$

и потому $L_i \subset \Gamma$. Мы видим, что все подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_k$ содержатся в Г, т. е. $E \subset \Gamma$, что невозможно. Таким образом, система конусов (6) не обладает в E свойством отделимости. Теорема доказана.

Заметим, что требование замкнутости рассматриваемых выпуклых конусов малосущественно: хотя некоторые факты (например, соотношение $D(D(K) = K)$ и не сохраняются в общем случае, теоремы 5—12 верны для произвольных выпуклых конусов с вершиной в точке 0 (так как переход к замыканиям не меняет смысла этих теорем).

Заметим также, что все эти теоремы справедливы не только в конечномерном случае, но и, при выполнении некоторых естественных ограничений, для конусов в локально выпуклом линейном топологическом пространстве E. Например, предположим, что выполнены следующие условия. Существует линейное топологическое пространство E^* и скалярное произведение xy с действительными значениями ($x \in E$, $y \in E^*$), линейное и непрерывное по совокупности переменных x, y. Любой линейный непрерывный функционал на E (соответственно на E^*) однозначно записывается в виде bx, где $b \in E^*$ (соответственно в виде ay, где $a \in E$). Любое замкнутое подпространство пространства E обладает в E прямым дополнением, и то же справедливо для E^*. Далее, через $D(K)$, где K—множество в одном из пространств E, E^*, обозначим множество всех тех элементов пространства E^*, E, которые с любым элементом из K имеют неположительное скалярное произведение. Каждый из конусов K_i и $D(K_i)$ ($i=1, \cdots, s$) имеет своей несущей плоскостью замкнутое подпространство и имеет относительно этого подпространства внутренние точки. Наконец, для любого $i=1, \cdots, s$ справедливо соотношение $D(D(K_i))=K_i$. *При выполнении указанных условий все сформулированные теоремы (и, с очевидными изменениями, все доказательства) остаются справедливыми.*

В том случае, когда K_1 есть подпространство, теорема 11 превращается в упомянутую в начале теорему Дубовицкого-Милютина.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 7.III.1972

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻ. Ուռուցիկ կոների սիստեմի բաժանելիության հատկությունը *(ամփոփում)*

Ա. Յա. Դուբովիցկին և Ա. Ա. Միլյուտինը իրենց աշխատանքներում առաջարկել են ուռուցիկ կոների բաժանելիության մասին մի թեորեմ։ Այդ թեորեման իրենից ներկայացնում է շատ հարմար ապարատ տարբեր էքստրեմալ (մաթեմատիկական ծրագրավորման, օպտիմալ կառավարման տեսության և նման ուրիշ տեսությունների վերաբերող) խնդիրներում անհրաժեշտ պայմաններ ստանալու համար։

Դուբովիցկու-Միլյուտինի թեորեմայի համար բնորոշ է այն, որ նրանում դիտարկվող բոլոր կոները, բացառությամբ մեկի, մարմնական են։ Ներկա հոդվածը նվիրված է այդ թեորեմայի ընդհանրացմանը ուռուցիկ կոների կամայական սիստեմի վերաբերյալ։

V. G. BOLTJANSKII. *The separation property of a system of convex cones*
(summary)

The theorem of A. Dubovitskil and Miljutin on separation of convex cones is a convenient toll, which helps to obtein necessary conditions in different extremal extremal problems of mathematical programming, optimal controls etc. It is essential in Dubovitskil-Miljutin's reasoning method, that each cone may by with exception of one of them, is a body, i. e. has interior points. In this article this restriction is omited and the theorem is proved (in a generalised form and by different method) for any system of convex cones.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Я. Дубовицкий* и *А. А. Милютин*. Задачи на экстремум при наличии ограничений, ДАН СССР, 149, № 4, 1963.
2. *Б. Н. Пшеничный*. Необходимые условия экстремума, Изд. „Наука“, М., 1969.