ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

А. Г. АСЛАНЯН, В. Б. ЛИДСКИЙ

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Краевая задача, к которой приводит отыскание частот оболочки вращения, защемленной по двум параллелям, имеет вид [1]

$$\sum_{j=1}^{3} (L_{ij} + h^2/12\, N_{ij})\, u_j = \lambda u_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{0.1}$$

$$u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma = u_3|_\Gamma = \partial u_3/\partial s|_\Gamma = 0. \tag{0.2}$$

Здесь L_{ij} и N_{ij} — операторы, содержащие дифференцирование по длине дуги s меридиана срединной поверхности оболочки и полярному углу φ; u_i-компоненты вектора смещения точки срединной поверхности; Γ—граница оболочки; h—малый параметр—толщина оболочки. Задача (0.1—2) является самосопряженной и имеет положительный дискретный спектр. Пусть $n(\lambda)$ — функция распределения собственных значений задачи (0.1—2), ($n(\lambda)$ равно числу собственных значений задачи, не превосходящих данного λ).

В настоящей статье мы находим асимптотическую формулу для ($n(\lambda)$ при $h \to 0$. Близкая по характеру задача возникает в квантовой механике (см. [2] и [3], там же библиография). Своеобразие задачи 0.1—2) состоит в том, что стоящий в левой части (0.1) оператор $L + h^2/_{12} N$ является эллиптическим, в то время как ни L, ни N этим свойством не обладают.

Для формулировки результата сделаем несколько замечаний. Отделив в (0.1) угловую координату, придем к системе уравнений (см. [4])*.

$$-u'' - \frac{B'}{B}u' - \frac{(1+\sigma)m}{2B}v' - \left[\left(\frac{B'}{B}\right)' + (1-\sigma)\left(\frac{1}{R_1R_2} - \frac{m^2}{2B^2}\right)\right]u +$$

$$+\frac{(3-\sigma)m}{2}\frac{B'}{B^2}v + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right)w' + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)' w = \lambda u,$$

$$-\frac{1-\sigma}{2}v'' + \frac{(1+\sigma)m}{2B}u' - \frac{1-\sigma}{2}\frac{B'}{B}v' + \frac{(3-\sigma)m}{2}\frac{B'}{B^2}u -$$

$$-\left[\frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{B'}{B}\right)' + \frac{1-\sigma}{R_1R_2} - \frac{m^2}{B^2}\right]v - \frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)w = \lambda v, \tag{0.3}$$

* Следуя [4], мы полагаем сначала $u_1 = u(s)\cos m\varphi$, $u_2 = v(s)\sin m\varphi$, $u_3 = w(s)\cos m\varphi$, а затем в этих формулах меняем местами косинус и синус, что приводит к замене в (0.3) m на $-m$.

$$\mu^4 \frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds} B \frac{d}{ds} - \frac{m^2}{B}\right)\frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds} B \frac{dw}{ds} - \frac{m^2}{B} w\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{du}{ds} - \left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{B'}{B} u -$$

$$-\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\sigma}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) w = \lambda w.$$

Здесь $B(s) > 0$—расстояние от точки меридиана до оси симметрии; $a \leqslant s \leqslant b$; $R_1^{-1}(s)$ и $R_2^{-1}(s)$— главные кривизны оболочки; m — целое число, равное числу волн по параллели: σ—коэффициент Пуассона, а μ — малый параметр:

$$\mu^4 = \frac{1}{12} h^2.$$

Граничные условия (0.2) принимают вид

$$u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = w(a) = w(b) = w'(a) = w'(b). \qquad (0.4)$$

Исследование спектров задач (0.3—4) при различных m приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Для функции распределения частот $n(\lambda)$ оболочки вращения с меридианом $B(s)$ $(a \leqslant s \leqslant b)$ справедлива при фиксированном $\lambda > 0$ и $\mu \to 0$ асимптотическая формула*

$$n(\lambda) = \frac{1}{4\pi\mu^2}\left[\int_a^b B(s)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\sqrt{\lambda - (1-\sigma^2)\left[\frac{\sin^2\theta}{R_1(s)} + \frac{\cos^2\theta}{R_2(s)}\right]^2}\, d\theta\right) ds + \right.$$

$$\left. + O(\mu^{1/3}) \right] \qquad (0.5)$$

с константой в O-члене, не зависящей от λ при $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$.*

Вопросу распределения частот тонких оболочек посвящен ряд работ по механике [3—8]. В частности, в [5] приводится интеграл, аналогичный внутреннему интегралу в (0.5), в случае оболочки, главные кривизны которой близки к постоянным. К формуле, аналогичной (0.5) в случае оболочек вращения, пришел недавно П. Е. Товстик [8], при дополнительных предположениях относительно корней разрешающего уравнения, что оставляло открытым вопрос о применимости формулы во всем диапазоне частот.

Строгое доказательство формулы (0.5) при всех λ с оценкой остаточного члена получено в настоящей статье, по-видимому, впервые.

Авторы признательны А. Л. Гольденвейзеру и П. Е. Товстику за полезные обсуждения и советы.

---

* По поводу остаточного члена см. замечание 1 на стр. 248.

§ 1. Вспомогательные леммы

Систему уравнений (0.3) условимся сокращенно записывать в виде

$$L_\mu f = \lambda f, \tag{1.1}$$

где $f = (u, v, w)$. Пусть* $n(m, \lambda)$—функция распределения задачи (0.3), (0.4) при фиксированном m и пусть $c \in (a, b)$. Рассмотрим на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ две краевые задачи для системы (1.1) с нулевыми граничными условиями вида (0.4) на концах отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, и пусть $n_1(m, \lambda)$ и $n_2(m, \lambda)$—соответствующие функции распределения.

Лемма 1.1. *При всех λ справедливо неравенство*

$$n_1(m, \lambda) + n_2(m, \lambda) \leqslant n(m, \lambda) \leqslant n_1(m, \lambda) + n_2(m, \lambda) + 4. \tag{1.2}$$

По поводу левого неравенства см. [9], стр. 345. Правое неравенство легко следует из теоремы 13 монографии [10], стр. 31.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на конечное число частей $\Delta_i = [s_i, s_{i+1}]$ $(i=0, \cdots, p-1)$ длины Δ и пусть $n_i(m, \lambda)$—функция распределения собственных значений задачи (0.1) на i-ом отрезке с граничными условиями типа (0.3). Тогда из формулы (1.2) следует неравенство

$$\sum_{(i)} n_i(m, \lambda) \leqslant n(m, \lambda) \leqslant \sum_{(i)} n_i(m, \lambda) + \frac{4(b-a)}{\Delta}. \tag{1.3}$$

Нам понадобится далее следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Для любого λ найдется $C_0(\lambda)$ такое, что при всех m, удовлетворяющих условию*

$$|m| > \frac{C_0(\lambda)}{\mu}, \tag{1.4}$$

будет

$$n(m, \lambda) = 0. \tag{1.5}$$

Для доказательства оценим снизу квадратичную форму**

$$I = (L_\mu f, f) \tag{1.6}$$

оператора L_μ. Рассмотрим сначала то слагаемое I_1 формы (1.6), которое содержит множитель μ^4. После интегрирования по частям получаем

$$I_1 = \mu^4 \left[\int_a^b \frac{1}{B(s)} |(Bw')'|^2 \, ds + 2m^2 \int_a^b \frac{|w'|^2}{B(s)} \, ds + \right.$$

$$\left. + 2m^2 \int_a^b |w|^2 \left(\frac{B'}{B^2}\right)' ds + m^4 \int_a^b \frac{|w|^2}{B^3(s)} \, ds \right]. \tag{1.7}$$

---

* Ниже мы всюду опускаем аргумент μ под знаком функции распределения.

** Под скалярным произведением двух вектор-функций f_1 и f_2 понимается интеграл $(f_1, f_2) = \int_a^b B(s)(u_1 \bar{u}_2 + v_1 \bar{v}_2 + w_1 \bar{w}_2) \, ds$. Легко проверить, что система (0.1) с граничными условиями (0.3) является самосопряженной.

Укажем еще следующие интегралы, входящие в (1.5), которые мы используем для оценки формы

$$I_2 = \int_a^b B\,|u'|^2\,ds, \quad I_3 = \frac{m^2}{2}\int_a^b \frac{|u|^2}{B}\,ds, \tag{1.8}$$

$$I_4 = \frac{1-\sigma}{2}\int_a^b B\,|v'|^2\,ds, \quad I_5 = m^2\int_a^b \frac{|v|^2}{B}\,ds. \tag{1.9}$$

Наличие последнего интеграла в (1.7) с большим множителем $m^4\mu^4 > C_0^4(\lambda)$ и интегралов в (1.8) и (1.9) позволяет при оценке формы (1.6) снизу отбросить все интегралы, содержащие w и w' в первой степени. Оценим, например, слагаемое $I_6 = \int_a^b (R_1^{-1} + \sigma R_2^{-1})\, w'\bar{u}\, ds$. После интегрирования по частям получаем

$$|I_6| \leqslant c\int_a^b |w|\,|u'|\,ds + c\int_a^b |w|\,|u|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\delta}\int_a^b |w|^2\,ds + c\delta\int_a^b |u'|^2 ds + c\delta\int_a^b |u|^2\,ds, \tag{1.10}$$

где постоянная c определяется коэффициентами системы (0.1), а δ — произвольное положительное число. Выбрав δ достаточно малым, а затем C_0 в (1.4) достаточно большим, можно, ввиду (1.10) и наличия интегралов I_2 и I_3, без ущерба для оценки формы (1.6) снизу слагаемое I_6 отбросить. Наличие интегралов I_3 и I_5, содержащих множителем m^2, позволяет по очевидной причине отбросить интегралы с $u\bar{v}$ и $v\bar{u}$. Остается оценить два слагаемых

$$I_7 = -\frac{1+\sigma}{2}m\int_a^b v'\bar{u}\,ds \quad \text{и} \quad I_8 = \frac{1+\sigma}{2}m\int_a^b u'\bar{v}\,ds. \tag{1.11}$$

Эти интегралы комплексно сопряжены и, следовательно, $|I_7| = |I_8|$. Имеем

$$|I_8| \leqslant \frac{1}{2}(1+\sigma)/2\left(\int_a^b B\,|u'|^2\,ds + m^2\int_a^b \frac{|v|^2}{B(s)}\,ds\right). \tag{1.12}$$

Учитывая наличие интегралов I_2 и I_5 и неравенство $\frac{1}{2}(1+\sigma)<1$, можно отбросить также оба слагаемых (1.11). В результате мы приходим к оценке

$$(L_\mu f,\ f) > \left(c_0^4(\lambda)\,\varkappa \int_a^b |w|^2\, ds + m^2 \varkappa \int_a^b (|u|^2 + |v|^2)\, ds \right) \geqslant c^*(f,\ f), \tag{1.13}$$

где через $\varkappa$ обозначена некоторая положительная постоянная, определяемая только коэффициентами системы (0.1) и не зависящая от m. Из неравенства (1.13) следует, что спектр задачи (0.1), (0.3) оказывается выше наперед заданного c^*, если $|m|$ достаточно велико. Лемма 1.2 доказана.

Просуммируем теперь неравенства (1.3) по всем m. В силу леммы 1.2 получаем

$$\sum_{(i)} n_i(\lambda) \leqslant n(\lambda) \leqslant \sum_{(i)} n_i(\lambda) + \frac{8(b-a)}{\Delta} \cdot \frac{C_0}{\mu}, \tag{1.14}$$

где через $n_i(\lambda)$ обозначена функция распределения частот части оболочки, соответствующей отрезку $\Delta_i = [s_i,\ s_{i+1}]$.

§ 2. Переход к системе с постоянными коэффициентами

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы заменить в неравенстве (1.14) функции $n_i(\lambda)$ функциями распределения, соответствующими задаче с постоянными коэффициентами по s. Для этого зафиксируем некоторое $\xi_i \in \Delta_i$ и рассмотрим наряду с (0.3) следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
-u'' - \frac{m(1+\sigma)}{2B_i} v' + \frac{1-\sigma}{2} \frac{m^2}{B_i^2} u + (R_{1,i}^{-1} + \sigma R_{2,i}^{-1})\, w' = \lambda u, \\
-\frac{1-\sigma}{2} v'' + \frac{m(1+\sigma)}{2B_i} u' + \frac{m^2}{B_i^2} v - \frac{m}{B_i} (\sigma R_{1,i}^{-1} + R_{2,i}^{-1})\, w = \lambda v, \\
\mu^4 \left(\frac{d^2}{ds^2} - \frac{m^2}{B_i^2} \right)^2 w - (R_{1,i}^{-1} + \sigma R_{2,i}^{-1}) u' - \frac{m}{B_i} (\sigma R_{1,i}^{-1} + R_{2,i}^{-1})\, v + \\
+ (R_{1,i}^{-2} + 2\sigma R_{1,i}^{-1} R_{2,i}^{-1} + R_{2,i}^{-2})\, w = \lambda w.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь индекс i внизу означает значение соответствующей функции при $s = \xi_i$. Рассмотрим задачу на собственные значения для системы (2.1) при $s \in \Delta_i$ и граничных условиях

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = w|_\Gamma = w'|_\Gamma = 0, \tag{2.2}$$

где через Γ обозначены концы отрезка Δ_i. Систему (2.1) условимся сокращенно писать в виде $L_\mu^0 f = \lambda f$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Существует постоянная C (не зависящая от m, i и μ) такая, что для достаточно малых Δ и всех гладких вектор-функций*

$$f(s) = (u(s),\ v(s),\ w(s)),\quad s \in \Delta_i,$$

удовлетворяющих граничным условиям (2.2), *справедливо неравенство*

$$(1 + C\Delta)(L^0_{\lambda} f, f)_l \geqslant (L_{\lambda} f, f)_l > (1 - C\Delta)(L^0_{\lambda} f, f)_l. \tag{2.3}$$

В формуле (2.3) через Δ обозначена общая длина отрезков Δ_l. Скалярное произведение то же, что и в сноске на стр. 238, с той лишь разницей, что интегралы берутся по отрезку Δ_l. Мы ограничимся оценкой той группы членов в форме $(L_{\lambda} f, f)_l$, которая стоит при множителе μ^4 (см. (1.7); a и b в (1.7) следует здесь заменить на s_l и s_{l+1}). Записав $B(s)$ в виде $B(s) = B_l + (s - \xi_l)\, b(s)$, где $b(s)$ — гладкая функция, подставим $B(s)$ в (1.7). В результате получим

$$I_1 = \mu^4 \Bigl[\int_{\Delta_l} B_l |w''|^2\, ds + O(\Delta) \int_{\Delta_l} |w''|^2\, ds + O(1) \int_{\Delta_l} |w'|^2\, ds +$$

$$+ 2m^2 \int_{\Delta_l} \frac{1}{B_l} |w'|^2\, ds + 2m^2\, O(\Delta) \int_{\Delta_l} |w'|^2\, ds + 2m^2\, O(1) \int_{\Delta_l} |w|^2 ds +$$

$$+ m^4 \int_{\Delta_l} \frac{|w|^2}{B_l^3}\, ds + m^4 O(\Delta) \int_{\Delta_l} |w|^2\, ds \Bigr] = \tag{2.4}$$

$$= \mu^4 [K_1 + K_1^* + K_1^{**} + m^2 (K_2 + K_2^* + K_2^{**}) + m^4 (K_3 + K_3^*)],$$

где мы ввели понятные обозначения для возникших интегралов. Замечая, что в силу (2.2) выполняются хорошо известные неравенства

$$\int_{\Delta_l} |w''|^2\, ds > \pi^2/\Delta^2 \int_{\Delta_l} |w'|^2\, ds, \int_{\Delta_l} |w'|^2\, ds \geqslant \pi^2/\Delta^2 \int_{\Delta_l} |w|^2\, ds, \tag{2.5}$$

заключаем

$$I_1 = \mu^4 (K_1 + m^2 K_2 + m^4 K_3)(1 + O(\Delta)). \tag{2.6}$$

Аналогично оцениваются и все остальные слагаемые. Лемма 2.1 доказана.

Пусть теперь $n_l^0(m, \lambda)$ — функция распределения собственных значений задачи (2.1), (2.2), а $n_l(m, \lambda)$ — по-прежнему функция распределения задачи (0.3), (2.2).

Из леммы 2.1 вытекает неравенство

$$n_l^0 (m, 1 - C\Delta)\, \lambda) \leqslant n_l (m, \lambda) \leqslant n_l^0 (m, (1 + C\Delta)\, \lambda).$$

Суммируя по m, получаем

$$n_l^0 [(1 - C\Delta)\, \lambda] \leqslant n_l\ (\lambda) \leqslant n_l^0 [(1 + C\Delta)\, \lambda]. \tag{2.7}$$

Функции $n_l^0(\lambda)$ оцениваются все еще достаточно сложно. Поэтому наряду с задачей (2.1), (2.2) рассмотрим задачу для системы (2.1) с периодическими граничными условиями на концах отрезка Δ_l:

$$u|_{s_l} = u|_{s_{l+1}},\ u'|_{s_l} = u'|_{s_{l+1}},\ v|_{s_l} = v|_{s_{l+1}},\ v'|_{s_l} = v'_{s_{l+1}}, \tag{2.8}$$

$$w|_{s_l} = w_s|_{l+1},\ w'|_{s_l} = w'|_{s_{l+1}},\ w''|_{s_l} = w''|_{s_{l+1}},\ w'''|_{s_l} = w'''|_{s_{l+1}}.$$

Легко проверить, что задача (2.1), (2.6) является самосопряженной. Пусть $n_l^*(m, \lambda)$ — соответствующая функция распределения. Аналогично лемме 1.1 устанавливается следующее предложение.

Лемма 2.2. *При всех λ и m справедливо неравенство*

$$n_l^0(m, \lambda) \leqslant n_l^*(m, \lambda) \leqslant n_l^0(m, \lambda) + 8. \tag{2.9}$$

Суммируя эти неравенства по m с учетом леммы 2.1, которая в случае системы с постоянными коэффициентами (2.1) справедлива и при периодических граничных условиях (2.6), получаем

$$n_l^0(\lambda) \leqslant n_l^*(\lambda) \leqslant n_l^0(\lambda) + \frac{8C_0(\lambda)}{\mu}. \tag{2.10}$$

§ 3. Оценка функции распределения при периодических граничных условиях

В этом параграфе мы найдем асимптотику функции распределения $n^*(\lambda)$. Заметим, что собственные функции задачи (2.1), (2.6) (m фиксировано) имеют вид

$$e^{i\frac{2k\pi}{\Delta}} f_k, \tag{3.1}$$

где f_k — постоянный вектор-столбец, а k — целое число, $-\infty < k < +\infty$. Подставив (3.1) в систему (2.1), найдем для определения собственных значений задачи (2.1), (2.6) при фиксированном m, уравнение

$$D(\lambda) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{1-\sigma}{2}\frac{m^2}{B^2} - \lambda & -i\frac{2k\pi}{\Delta}\frac{1+\sigma}{2B}m & i\frac{2k\pi}{\Delta}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right) \\ i\frac{2k\pi}{\Delta}\frac{1+\sigma}{2B}m & \frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2} - \lambda & -\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ -i\frac{2k\pi}{\Delta}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right) & -\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & \mu^4\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right]^2 + \varphi_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Здесь $\varphi_2(s) = R_1^{-2}(s) + 2\sigma R_1^{-1}(s) R_2^{-1}(s) + R_2^{-2}(s)$.

В (3.2) все функции s берутся при $s = \xi_l$; индекс внизу опущен. Раскрывая определитель (3.2), получаем

$$D(\lambda) \equiv -\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{3.3}$$

где

$$a_1 = \mu^4\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right]^2 + \frac{3-\sigma}{2}\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right] + \varphi_2, \tag{3.4}$$

$$a_2 = \frac{3-\sigma}{2}\mu^4\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right]^3 + \frac{1-\sigma}{2}\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right]^2 +$$

$$+\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2\left(\frac{1-\sigma}{2}\varphi_2+\varphi_1\right)+\frac{m^2}{B^2}\left(\frac{1-\sigma}{2}\varphi_2+\varphi_3\right), \tag{3.5}$$

$$a_3=\frac{1-\sigma}{2}\mu^4\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2+\frac{m^2}{B^2}\right]^4+$$

$$+\frac{1-\sigma}{2}(1-\sigma^2)\left[\frac{m^2}{B^2}R_1^{-1}+\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2\right]. \tag{3.6}$$

В формуле (3.5) $\varphi_1(s)=\frac{1-\sigma^2}{R_2^2(s)}$, $\varphi_3(s)=\frac{1-\sigma^2}{R_1^2(s)}$, а $\varphi_2(s)$ то же, что и в (3.2).

Значение $n_l^*(\lambda_0)$ равно числу всевозможных целых k и m, при которых уравнение (3.3) имеет корни, не превосходящие данного λ_0:

$$\lambda\leqslant\lambda_0. \tag{3.7}$$

Полагая

$$k=\frac{\Delta}{2\pi}r\cos\theta,\ \ m=Br\sin\theta, \tag{3.8}$$

найдем в соответствии с (3.4—6)

$$a_1=\mu^4r^4+\frac{3-\sigma}{2}r^2+\varphi_2,$$

$$a_2=\frac{3-\sigma}{2}\mu^4r^6+\frac{1-\sigma}{2}r^4+\left[\frac{1-\sigma}{2}\varphi_2+\varphi_1\cos^2\theta+\varphi_3\sin^2\theta\right]r^2,$$

$$a_3=\frac{1-\sigma}{2}\mu^4r^8+\frac{1-\sigma}{2}(1-\sigma^2)\,r^4\left(\frac{\sin^2\theta}{R_1}+\frac{\cos^2\theta}{R_2}\right)^2. \tag{3.9}$$

Здесь $r^2=\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2+\frac{m^2}{B^2}$.

Подставив найденные значения в (3.3) и расположив уравнение по степеням r, получим

$$D(\lambda)\equiv\mu^4r^8+\mu^4r^6A_{0,0}(\lambda)-r^4A_1(\theta,\lambda)+\mu^4r^4A_{0,1}(\lambda)-$$

$$-r^2A_2(\theta,\lambda)+A_3(\theta,\lambda)=0, \tag{3.10}$$

где

$$A_{0,0}=-\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda,\quad A_{0,1}=\lambda^2\frac{2}{1-\sigma},$$

$$A_1=\lambda-(1-\sigma^2)(R_1^{-1}\sin^2\theta+R_2^{-1}\cos^2\theta)^2,$$

$$A_2=\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda^2-\left[\varphi_2+\frac{2}{1-\sigma}(\varphi_1\cos^2\theta+\varphi_3\sin^2\theta)\right]\lambda,$$

$$A_3=(\varphi_2\lambda^2-\lambda^3)\frac{2}{1-\sigma}.$$

Считая $\mu\neq0$, сделаем в (3.10) подстановку

$$r=\frac{\rho}{\mu}. \tag{3.11}$$

В результате получим

$$\rho^8+\mu^2 A_{0,0}(\lambda)\rho^6-\rho^4 A_1(\theta,\lambda)+\mu^2\rho^2 A_2(\theta,\lambda)+\mu^4\cdot\rho^4 A_{0,1}(\lambda)+\mu^4 A_3(\lambda)=0. \tag{3.12}$$

Оценим положительные решения $\rho=\rho(\theta,\lambda,\mu)$ уравнения (3.12). Заметим, что

$$\rho=O(1), \tag{3.13}$$

где постоянная в O-члене не зависит от θ, μ и $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$. Поэтому (3.12) можно придать вид

$$\rho^8-A_1(\theta,\lambda)\rho^4+O(\mu^2)=0. \tag{3.14}$$

Рассмотрим три случая:

$$\text{a)}\ A_1(\theta,\lambda)\leqslant 0,$$

$$\text{в)}\ 0\leqslant A_1(\theta,\lambda)\leqslant\mu,$$

$$\text{c)}\ \mu\leqslant A_1(\theta,\lambda).$$

В случае а), предполагая в (3.12) $\rho>\mu$, сразу найдем $\rho^6=O(\mu^2)$. Следовательно, для всех положительных ρ имеем: $\rho=O(\mu^{1/3})$ и, следовательно, в силу (3.11)

$$r=O(\mu^{-2/3}). \tag{3.15}$$

Рассмотрим случай в). Решив квадратное уравнение (3.14), найдем

$$\rho^4=\frac{1}{2}(A_1\pm\sqrt{A_1^2+O(\mu^2)})\cdot \tag{3.16}$$

Отсюда*

$$\rho^4\leqslant A_1+O(\mu),\ \rho^2\leqslant A_1^{1/2}+O(\mu^{1/2}). \tag{3.17}$$

Из второго неравенства при условии в) следует, что $\rho^2=O(\mu^{1/2})$. Подставив эту оценку во все члены (3.12) кроме первого и последнего, придем к заключению, что O-член в (3.14) и (3.16) есть $O(\mu^{5/2})$. После чего из (3.16) получаем: $\rho^4\leqslant A_1+O(\mu^{5/4})\leqslant\mu(1+O(\mu^{1/4}))$ и, следовательно, при условии в)

$$r\leqslant\mu^{-3/4}(1+O(\mu^{1/4})). \tag{3.18}$$

В случае с) рассмотрим две ветви, определяемые уравнением (3.14). Для первой (главной) легко находим, используя второе неравенство (3.17)

$$\rho_1^4=\frac{1}{2}(A_1+\sqrt{A_1^2+O(\mu^2A_1^{1/2})+O(\mu^{5/2})}=$$

$$=A_1(1+O(\mu^3/A_1^{3/2})+O(\mu^{5/2}/A_1^2). \tag{3.19}$$

Отсюда $\rho_1=A_1^{1/4}+O(\mu^{3/4})$ и, следовательно

$$r_1(\theta,\lambda,\mu)=\frac{1}{\mu}A_1^{1/4}(\theta,\lambda,\mu)+O(\mu^{-1/4}). \tag{3.20}$$

---

* Пользуемся неравенством $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant|a|+|b|$.

Для второй ветви r_2 в случае с) имеем

$$r_2 = O\,(\mu^{-5/8}). \tag{3.21}$$

Будем, для определенности, считать* $R_{1,l} > R_{2,l}$ (во всех других случаях рассуждения сохраняют силу с несущественными дополнениями (см. рис. 2)). Фиксируем λ_0 из интервала

$$(1-\sigma^2)\,R_{2,l}^{-2} > \lambda_0 > (1-\sigma^2)\,R_{1,l}^{-2}. \tag{3.22}$$

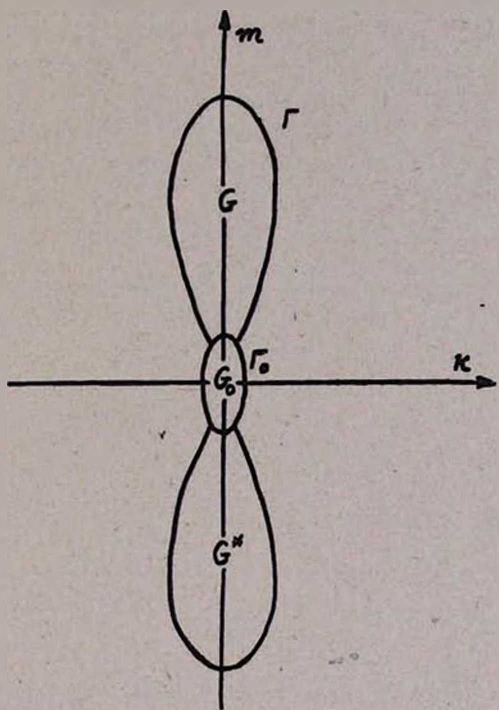

Рис. 1

$R_{1,l} > 0, \quad R_{1,l}^{-2} < \lambda_0 (1-\sigma^2)^{-1} < R_{2,l}^{-2}$

Рассмотрим на (k, m) плоскости кривую Γ (см. рис. 1), определяемую уравнениями (3.8), в которых $r = r_1(\theta, \lambda_0, \mu)$ взято в соответствии с (3.20), а $0 < \theta_0 < \theta \leqslant \pi - \theta_0$. Здесь θ_0 таково, что $A_1(\theta_0, \lambda_0) = 2\mu$ и, следовательно

$$A_1(\theta, \lambda_0) > 2\mu, \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0.$$

Пусть еще $r^* = r_1(\theta_0, \lambda_0, \mu)$. В силу (3.20)

$$r^* = 2^{1/4}\,\mu^{-3/4}\,(1 + O\,(\mu^{1/2})). \tag{3.23}$$

Обозначим через G_0 внутренность эллипса

* Отметим, что всюду выше в этом параграфе все функции s брались при $s = \xi_l$. Индекс l внизу мы опускаем.

$$k = \frac{\Delta}{2\pi} r^* \cos\theta, \quad m = Br^* \sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Заметим, что при $\lambda \leqslant \lambda_0$ множества нулей уравнения (310) на (k, m)-плоскости, определяемые формулами (3.15), (3.18) и (3.21), в силу (3.23), содержатся внутри эллипса G_0. Обозначим теперь через G_1

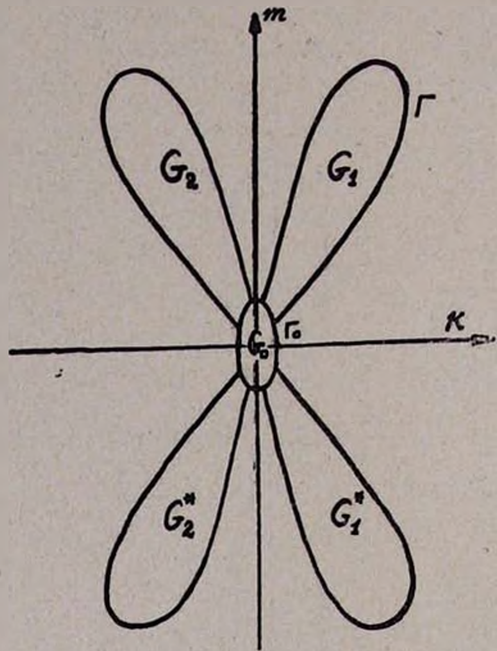

Рис. 2

$R_{1,i} < 0 \quad (1-\sigma^2)^{-1}\lambda_0 < |R_{1,i}|^{-2} < R_{2,i}^{-2}$

область, ограниченную дугой Γ и дугой Γ_0 эллипса G_0 (см. рис. 1), а через G_1^* — область, симметричную G относительно оси k.

Покажем, что каждой точке $(r, \theta) \in G_1$ отвечает один и только один корень* уравнения (3.10), удовлетворяющий условию (3.7). Действительно, согласно (3.10)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} D(\lambda) = -\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\mu^4 r^6 - r^4 + O(r^2) + O(1) =$$

$$= -\mu^4 \rho^2 [\rho^2 + O(\mu^2)] < 0, \qquad (3.24)$$

поскольку выражение в квадратных скобках положительно на Γ_0** и, следовательно, всюду в $\overline{G}_1$.

В силу (3.24) уравнение (3.10) определяет внутри и на границе G_1 однозначную функцию $\lambda = \lambda(r, \theta)$. Значение этой функции на Γ

* μ всюду предполагается достаточно малым фиксированным.

** $\rho^2 + O(\mu^2) > 0$ всюду на границе эллипса G_0, если только $\Delta > \mu$. Этим фактом приходится пользоваться в том случае, когда (3.22) заменяется противоположным неравенством.

равно λ_0. Заметим, что в силу (3.10), (3.19) и неравенства $A_1(\theta, \lambda_0) \geqslant \geqslant 2\mu$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0$,

$$\frac{\partial}{\partial r} D(\lambda)|_\Gamma = \mu^{-3}\rho^3 [8\rho^4 - 4A_1(\theta, \lambda_0) + O(\mu^{3/2})] \geqslant$$

$$\geqslant \mu^{-3}\rho^3 [8\mu + O(\mu^{3/2})]. \qquad (3.25)$$

Поэтому $\lambda(r, \theta) < \lambda_0$ в G_1 по крайней мере в окрестности Г. Это неравенство сохраняется, очевидно, и всюду в G_1, поскольку значение λ_0, как мы показали, может достигаться лишь на кривой Г и, быть может, внутри эллипса G_0.

Заметим еще, что в дополнении к областям G_0, G_1 и G_1^* уравнение (3.10) не имеет корней, удовлетворяющих условию $\lambda < \lambda_0$. Допустив противное, легко придти к противоречию, устремив r к $+\infty$.

Таким образом, собственные значения, удовлетворяющие неравенству $\lambda \leqslant \lambda_0$, порождаются всеми парами (k, m), которые принадлежат областям G_1, G_1^* и, быть может, G_0, и только ими.

Пользуясь известным неравенством

$$|S - N| \leqslant P, \qquad (3.26)$$

где S — площадь области, ограниченной некоторой спрямляемой кривой, N — число целых точек внутри нее, а P — периметр (см. [11], стр. 38), мы сейчас найдем асимптотику $n_i^*(\lambda_0)$. Имеем

$$n_i^*(\lambda_0) = 2\iint_{G_1} dk\, dm + O(S_{G_0}) + O(P_\Gamma) + O(P_{\Gamma_0}). \qquad (3.27)$$

Согласно (3.8), (3.20), (3.23)

$$2\iint_{G_1} dk\, dm = \frac{1}{\pi}\Delta B_l \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{1}{2} r_1^2\, d\theta - \frac{1}{\pi}\Delta B_l \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{1}{2} r^{*2}\, d\theta =$$

$$= \frac{\Delta B_l}{2\pi\mu^2}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} A_{1,l}^{1/2}(\theta, \lambda_0)\, d\theta + \Delta O(\mu^{-3/2}). \qquad (3.28)$$

Легко видеть далее, что

$$P_{\Gamma_0} = O(r^*) = O(\mu^{-3/4}),$$

$$S_{G_0} = \frac{1}{2}\Delta B_l r^{*2} = \Delta O(\mu^{-3/2}). \qquad (3.29)$$

Оценим далее P_Γ. Имеем $P_\Gamma \leqslant c\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \sqrt{r_\theta'^2 + r^2}\, d\theta \leqslant c\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} (|r_\theta'| + r)\, d\theta$. Из уравнения (3.10) с учетом (3.20) нетрудно заключить, что

$$|r_\theta'| \leqslant \frac{c^*}{\mu}\left|\frac{\partial A_{1,l}}{\partial\theta}\right| \Big/ A_{1,l}^{3/4}(\lambda_0, \theta).$$

Поскольку далее $\frac{\partial A_1}{\partial\theta}$ меняет знак не более трех раз*, то, интегрируя, получаем

$$P_\Gamma = O\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{3.30}$$

В силу (3.27—30) имеем

$$n_l^*(\lambda) = \frac{\Delta B_l}{4\pi\mu^2}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}\sqrt{A_{1,l}(\theta,\lambda)} +$$

$$+\Delta\, O(\mu^{-3/2}) + O(\mu^{-1}). \tag{3.31}$$

Мы опустили индекс внизу у λ и распространили интеграл в (3.28) на все значения θ, при которых $A(\theta, \lambda)\geqslant 0$. Возникающая при этом погрешность (см. (3.21)) включена в (3.31) в первый O-член.

Используя теперь (1.14), (2.7) и (2.10), приходим к формуле

$$n(\lambda) = \frac{1}{4\pi\mu^2}\int\limits_a^b B(s)\left(\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}\sqrt{A_1(s,\theta,\lambda)\pm c\Delta}\,d\theta\right)ds +$$

$$+ O(\mu^{-3/2}) + O(\mu^{-1}\Delta^{-1}). \tag{3.32}$$

Разность между интегралами в правых частях (3.32) и (0.5) есть $O(\Delta^{1/2})$. Полагая $\Delta = \mu^{2/3}$, получаем формулу (0.5). Теорема доказана.

Замечание 1. Если интеграл

$$J(\lambda) = \int\limits_a^b B(s)\left(\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}(A_1(s,\theta,\lambda))^{-1/2}\,d\theta\right)ds \tag{3.33}$$

сходится при данном λ, то разность между интегралами в (3.32) и (0.5) есть $O(\Delta)$. Это дает возможность при $\Delta=\mu^{1/2}$ получить остаточный член в (0.5) в виде $O(\mu^{1/2}J(\lambda))$.

Замечание 2. Интеграл (3.33) возникает в задаче о плотности частот оболочки (3.7). Нетрудно проверить, что он может расходиться лишь в следующих трех случаях.

а) Когда оболочка обладает параллелью $s = s_0$ такой, что

$$R_1^{-1}(s_0) = R_2^{-1}(s_0),\quad R_1'(s_0) = 0 \text{ и } \lambda = (1-\sigma^2)R_2^{-2}(s_0).$$

б) Когда на некотором отрезке $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ будет $R_2^{-1}(s) \equiv \text{const}$ и $\lambda = (1-\sigma^2)R_2^{-2}(s_1)$**.

в) Когда $R_1^{-1}(s) \equiv \text{const}$, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ и $\lambda = (1-\sigma^2)R_1^{-2}(s_1)$.

---

* Либо $\partial A_{1,l}/\partial\theta \equiv 0$.

** Предполагается, что изолированные точки, в которых производные всех порядков $R_1^{-1}(s)$ или $R_2^{-1}(s)$ обращаются в нуль, отсутствуют.

Замечание 3. Формула (0.5) сохраняет силу при любых граничных условиях, если квадратичный функционал задачи совпадает с квадратичным функционалом задачи (0.1), (0.2).

Институт проблем механики АН СССР
Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступило 11.I.1972

Ա. Գ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Վ. Բ. ԼԻԴՍԿԻ. Պտտման թաղանթի սեփական հաճախականությունների բաշխման ֆունկցիայի ասիմպտոտիկան *(ամփոփում)*

Ապացուցված է ասիմպտոտական բանաձև բարակ, առաձգական պտտման թաղանթի բաշխման ֆունկցիայի համար։

Ապացույցը ստացված է վարիացիոն և ասիմպտոտիկ մեթոդների համադրմամբ։

A. G. ASLANIAN, V. B. LIDSKIĬ. *The asymptotic formula for the eigenvalue distribution function* (summary)

The asymptotic for eigenvalue distribution function of a thin elastic shell of revolution is obtained and the remainger term is estimated. A combination of variational and asymptotical methods is applied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Гольденвейзер.* Некоторые математические проблемы теории упругих тонких оболочек, УМН, 15, вып. 5, 1960.
2. *М. Ш. Бирман.* О спектре сингулярных граничных задач, Матем. сб., 55, 1961, 125—174.
3. *М. Ш. Бирман, В. В. Борзов.* Об асимптотике дискретного спектра некоторых сингулярных дифференциальных операторов, Проблемы математической физики, Изд. ЛГУ, вып. 5, 1971.
4. *П. Е. Товстик.* Интегралы системы уравнений неосесимметричных колебаний оболочек вращения, Сб. Исследования по упругости и пластичности, Изд. ЛГУ, № 5, 1966, 45—55.
5. *В. В. Болотин.* О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек, ПММ, 27, вып. 2, 1963.
6. *В. В. Болотин, В. Н. Москаленко.* Колебания оболочек. Прочность, устойчивость, колебания, т. 3 (справочник), М., Изд. „Машиностроение", 1968.
7. *А. Л. Гольденвейзер.* О плотности частот колебаний тонкой оболочки, ПММ, 34, вып. 5, 1970.
8. *П. Е. Товстик.* О плотности частот колебаний тонких оболочек вращения, ПММ, 36, вып. 2, 1972.
9. *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
10. *И. М. Глазман.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., Физматгиз, 1963.
11. *Хуа Ло Ген.* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. Изд. „Мир", М., 1964.