ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

Ф. Г. АРУТЮНЯН

О БАЗИСАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ИЗОМОРФНОЕ $L_1[0, 1]$ ПОДПРОСТРАНСТВО

§ 1. Введение

Определение. Система элементов $\{x_n\}_1^\infty$ банахова пространства X называется базисом в X, если для любого элемента $x \in X$ существует единственный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, x_n, \tag{1}$$

который сходится к x. Базис называется нормированным, если $\|x_n\|=1$ для всех $n \geqslant 1$. Базис $\{x_n\}_1^\infty$ банахова пространства X называется безусловным, если ряд (1) сходится к x при любой перестановке его членов.

Существуют банаховы пространства, которые имеют базис и, вместе с тем, не имеют безусловного базиса. А именно, в работах [1] и [2] доказаны, соответственно, теоремы 1 и 2, которые формулируются следующим образом.

Теорема 1. В пространстве $L_1[0, 1]$ не существует безусловного базиса.

Теорема 2. В пространстве $C[0, 1]$ не существует безусловного базиса.

В работе [3] нами даны простые доказательства указанных теорем. Метод доказательства теоремы 1, предлагаемый в этой работе, позволяет доказать более общий результат, который, в частности, содержит теоремы 1 и 2. Установлению этого факта и посвящена настоящая работа.

Приведем следующее определение (см. [4], стр. 78): изоморфизм двух линейных нормированных пространств X и Y есть взаимнооднозначное взаимнонепрерывное линейное отображение $A: X \to Y$, при котором $A(X) = Y$. Если такой изоморфизм существует, то пространства X и Y называются изоморфными.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема (основная). *Если банахово пространство X содержит подпространство X^*, изоморфное пространству $L_1[0, 1]$, то в X не существует нормированного безусловного базиса.*

В случае $X = X^* = L_1[0, 1]$ получим теорему 1. Что же касается теоремы 2, то она следует из основной теоремы, в силу того, что пространство $C[0, 1]$ является универсальным банаховым пространством в классе всех сепарабельных банаховых пространств (см. [5], стр. 208).

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем факты.

1°. Коэффициенты $a_n(x)$, $n \geqslant 1$ в ряде (1) являются линейными непрерывными функционалами в X и, кроме того

$$a_n(x_m) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m;\ n \geqslant 1,\ m \geqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

2°. Любой линейный функционал Φ в пространстве $L_1[0, 1]$ имеет вид

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,\psi(t)\,dt, \tag{3}$$

где $\psi(t)$ — ограниченная измеримая функция на $[0, 1]$.

§ 2. Доказательство теоремы

Лемма 1. *Пусть* $\{x_n\}_1^\infty$ — *безусловный базис в банаховом пространстве* X, *тогда существует число* $M>0$ *такое, что если*

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\,x_n, \quad \|x\|<1, \tag{4}$$

и

$$T = \sum_{k=1}^{s} a_{n_k}(x)\,x_{n_k} \tag{5}$$

— *произвольная конечная сумма из элементов ряда* (4), *то* $\|T\| \leqslant M$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда очевидно, для любого натурального числа $k \geqslant 1$ существуют полином T_k по системе элементов $\{x_n\}_1^\infty$ и некоторая его подсумма T_k', которые удовлетворяют соотношению

$$\|T_k\| \leqslant 1,\ \|T_k'\| \geqslant 2^k\,k,\ k \geqslant 1. \tag{6}$$

Мы можем предполагать, как в этом легко убедиться, что слагаемые полинома T_k предшествуют слагаемым T_{k+1}, $k \geqslant 1$ и, следовательно, полиномы T_k не имеют общих слагаемых.

Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,T_k \tag{7}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^k}\,T_k' + \frac{1}{2^k}\,(T_k - T_k')\right]. \tag{8}$$

Очевидно, раскрытый ряд (8) является перестановкой раскрытого ряда (7). Из соотношения (6) следует, что ряд (7) сходится и, следовательно, раскрытый ряд (7) является разложением некоторого элемента $x \in X$.

Из соотношения (6) следует $\left\|\frac{1}{2^k} T'_k\right\| \geqslant k$, и поэтому раскрытый ряд (7) расходится. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть* $\{x'_n\}_1^\infty$ — *нормированный базис в банаховом пространстве* X, X^* — *подпространство пространства* X, $A: L_1[0, 1] \to X^*$ —изоморфизм $L_1[0, 1]$ *на* X^*. *Тогда для любого множества* $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) > 0$, *натурального числа* p *и* $\varepsilon > 0$ *существуют множества* E' *и* E'', *число* q, *удовлетворяющие условиям*

$$E' \cap E'' = \varnothing, \; E' \cup E'' = E, \; \mu(E') = \mu(E'') = 1/2\, \mu(E), \tag{9}$$

$$\left\| \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i (A(T))\, x_i - A(T) \right\| < \varepsilon, \tag{10}$$

где $T(t)$ — *функция из* $L_1[0, 1]$, *определяемая по формуле*

$$T(t) = \begin{cases} (\mu(E))^{-1}, & \text{при } t \in E' \\ -(\mu(E))^{-1}, & \text{при } t \in E'' \\ 0, & \text{в остальных точках } [0, 1]. \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. В пространстве $L_1[0, 1]$ определим линейные функционалы Φ_n, $n \geqslant 1$ следующим образом:

$$\Phi_n(f) = \alpha_n(A(f)), \; f \in L_1[0, 1], \; n \geqslant 1. \tag{12}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_n(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= \alpha_n(A(c_1 f_1 + c_2 f_2)) = \\ &= c_1 \Phi_n(f_1) + c_2 \Phi_n(f_2), \; n \geqslant 1, \end{aligned} \tag{13}$$

$$|\Phi_n(f)| = |\alpha_n(A(f))| \leqslant \|\alpha_n\| \cdot \|A(f)\| \leqslant \|\alpha_n\| \cdot \|A\| \cdot \|f\|, \; n \geqslant 1. \tag{14}$$

Таким образом, Φ_n, $n \geqslant 1$—линейные непрерывные функционалы в $L_1[0, 1]$. Следовательно, существуют ограниченные измеримые функции $\psi_n(t)$, $n \geqslant 1$, определенные на $[0,1]$ такие, что

$$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\, \psi_n(t)\, dt \tag{15}$$

для любого $f \in L_1[0, 1]$, $n \geqslant 1$.

Положим

$$Q(t) = \mu([0, t] \cap E), \; t \in E \tag{16}$$

и рассмотрим

$$\rho_j(t) = \begin{cases} (\mu(E))^{-\frac{1}{2}} \cdot r_j\left(\dfrac{Q(t)}{\mu(E)}\right), & \text{при } t \in E \\ 0, & \text{в остальных точках } [0, 1]; \; j \geqslant 1, \end{cases} \tag{17}$$

где $r_j(t)$ — функции Радемахера.

Система функций $\{\rho_j(t)\}_1^\infty$ образует ортонормированную систему в $L_2[0, 1]$. Следовательно, имеем

$$\lim_{j\to\infty} \alpha_k(A(\rho_j)) = \lim_{j\to\infty} \Phi_k(\rho_j) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_0^1 \rho_j(t)\, \psi_k(t)\, dt = 0, \tag{18}$$

для любого $k \geqslant 1$.

Выберем j таким, чтобы выполнялось неравенство

$$|\alpha_k(A(\rho_j))| = |\Phi_k(\rho_j)| = \left|\int_0^1 \rho_j(t)\, \psi_k(t)\, dt\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2p}(\mu(E))^{\frac{1}{2}},\ 1 \leqslant k \leqslant p. \tag{19}$$

Положим

$$T(t) = (\mu(E))^{-\frac{1}{2}} \rho_j(t). \tag{20}$$

Если теперь $E' = \{t : T(t) > 0\}$ и $E'' = \{t : T(t) < 0\}$, то из определения системы Радемахера и из (17) получим (9) и (11).

Выберем число q таким, чтобы выполнялось

$$\left\|\sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i(A(T))\, x_i - A(T)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{21}$$

Из (19)—(21) получим

$$\left\|\sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i(A(T))\, x_i - A(T)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i(A(T))\, x_i - A(T)\right\| + \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i(A(T))| < \varepsilon. \tag{22}$$

Тем самым лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Функция $T(t)$, определенная по формуле (11), удовлетворяет условию $\|T\|_{L_1[0,1]} = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть $M > 0$ — произвольное число, а $l > 1 + (2 + 4M)\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$, и пусть $\{x_n\}_1^\infty$ — нормированный базис в X. Положим

$$n_0 = 0,\ E_0 = [0, 1],\ T_0(t) = 1, \text{ при } t \in E_0. \tag{23}$$

Существует число $n_1 > 1$, для которого выполняется

$$\left\|\sum_{i=n_0+1}^{n_1} \alpha_i(A(T_0))\, x_i - A(T_0)\right\| \leqslant \frac{\|A\|}{2}. \tag{24}$$

Далее по лемме 2 можно указать множества $E'_k, E''_k, E_k, 1\leqslant k\leqslant 4l$, числа $n_1 < n_2 < \cdots < n_{4l+1}$, которые удовлетворяют условиям

$$E'_k \cap E''_k = \varnothing,\quad E'_k \cup E''_k = E_k = E'_{k-1}, \tag{25}$$

$$\mu(E'_k) = \mu(E''_k) = \frac{1}{2}\,\mu(E_k) = \frac{1}{2^k},\ 1\leqslant k\leqslant 4l,\ E'_0 = E_0,$$

$$\left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i(A(T_k))\,x_i - A(T_k) \right\| < \frac{\|A\|}{2^{k+1}},\ 1\leqslant k\leqslant 4l. \tag{26}$$

T_k, $1\leqslant k\leqslant 4l$ в (26) определяются по формулам (11), а именно

$$T_k(t) = \begin{cases} (\mu(E_k))^{-1}, \text{ при } t\in E'_k \\ -(\mu(E_k))^{-1}, \text{ при } t\in E''_k \\ 0, \text{ в остальных точках } [0,1]; \quad 1\leqslant k\leqslant 4l. \end{cases} \tag{27}$$

Покажем, что

$$\sum_{k=0}^{s} T_k(t) = \begin{cases} (\mu(E'_s))^{-1}, \text{ при } t\in E'_s \\ 0, \text{ в остальных точках } [0,1];\ 0\leqslant s\leqslant 4l. \end{cases} \tag{28}$$

В случае $s=0$ соотношение (28) очевидно.

Пусть соотношение (28) выполнено для некоторого s, $0\leqslant s < 4l$. Если $t\in E'_{s+1}$, то в силу (25) и (27) будем иметь

$$\sum_{k=0}^{s+1} T_k(t) = \sum_{k=0}^{s} T_k(t) + T_{s+1}(t) =$$

$$= (\mu(E'_s))^{-1} + (\mu(E_{s+1}))^{-1} = 2^s + 2^s = 2^{s+1} = (\mu(E'_{s+1}))^{-1} \tag{29}$$

Пусть теперь $t\overline{\in} E'_{s+1}$. Если $t\overline{\in} E''_{s+1}$, то $T_{s+1}(t)=0$ и, следовательно

$$\sum_{k=0}^{s+1} T_k(t) = 0. \tag{30}$$

Если же $t\in E''_{s+1}$, то

$$\sum_{k=0}^{s+1} T_k(t) = \sum_{k=0}^{s} T_k(t) + T_{s+1}(t) = \tag{31}$$

$$= (\mu(E''_s))^{-1} - (\mu(E_{s+1}))^{-1} = 2^s - 2^s = 0.$$

Соотношения (29)—(31) доказывают соотношения (28), откуда, в частности, получим

$$\left\| \sum_{k=0}^{4l} T_k \right\|_{L_1[0,1]} = 1. \tag{32}$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{l} T_{4k}. \tag{33}$$

Для любого множества $E \subset [0, 1]$ положим

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in E \\ 0, & \text{в остальных точках } [0, 1]. \end{cases} \tag{34}$$

Из (25), (27), (34) и в силу замечания имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{l} T_{4k} \right\|_{L_1[0,1]} = \left\| \sum_{k=1}^{l-1} T_{4k} \cdot (\chi_{E_0 \setminus E_{4(k+1)}} + \chi_{E_{4(k+1)}}) + T_{4l} \right\|_{L_1[0,1]} =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{l-1} T_{4k} \cdot \chi_{E_{4k} \setminus E_{4(k+1)}} + \sum_{k=1}^{l-1} T_{4k} \cdot \chi_{E_{4(k+1)}} + T_{4l} \right\|_{L_1[0,1]} \geqslant$$

$$\geqslant \left\| \sum_{k=1}^{l-1} T_{4k} \cdot \chi_{E_{4k} \setminus E_{4(k+1)}} + T_{4l} \right\|_{L_1[0,1]} - \sum_{k=1}^{l-1} \left\| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4(k+1)}} \right\|_{L_1[0,1]} =$$

$$= \sum_{k=1}^{l-1} \left\| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4k}} \right\|_{L_1[0,1]} - \sum_{k=1}^{l-1} \left\| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4(k+1)}} \right\|_{L_1[0,1]} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{l-1} \| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4k}} \|_{L_1[0,1]} - 2 \sum_{k=1}^{l-1} \| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4(k+1)}} \|_{L_1[0,1]} =$$

$$= l - 2 \sum_{k=1}^{l-1} \frac{2^{4k-1}}{2^{4(k+1)-1}} = \frac{7(l-1)}{8} + 1 > \frac{l-1}{2}. \tag{35}$$

Из (26) и (32) получим

$$\left\| \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4l} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i(A(T_k))\, x_i \right\| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4l} \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i(A(T_k))\, x_i - A(T_k) \right\| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{4l} A(T_k) \Bigg\| \leqslant \frac{1}{2} \left\| A\left(\sum_{k=0}^{4l} T_k \right) \right\| + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4l} \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i(A(T_k)) x_i - A(T_k) \right\| <$$

$$< \frac{1}{2} \|A\| + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4l} \frac{\|A\|}{2^{k+1}} < \frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{2} = \|A\|. \tag{36}$$

Из (26) и (35) имеем

$$\left\| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=n_{4k}+1}^{n_{4k+1}} \alpha_i(A(T_{4k}))\, x_i \right\| = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{l} \left[\sum_{i=n_{4k}+1}^{n_{4k+1}} \alpha_i(A(T_{4k}))\, x_i - \right.\right.$$

$$\left.\left. - A(T_{4k}) + \sum_{k=1}^{l} A(T_{4k}) \right\| \geqslant \frac{1}{2} \left\| A\left(\sum_{k=1}^{l} T_{4k} \right) \right\| - \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{l} \left[\sum_{i=n_{4k}+1}^{n_{4k+1}} \alpha_i(A(T_{4k})) x_i - \right.\right.$$

$$\left.\left. - A(T_{4k}) \right] \right\| \geqslant \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \left\| \sum_{k=1}^{l} T_{4k} \right\|_{L_1[0,1]} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l} \frac{\|A\|}{2^{4k+1}} > \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \left[\frac{l-1}{2} - \frac{\|A\|}{2} \right] = \tag{37}$$

$$= \frac{l-1-2\|A\|\|A^{-1}\|}{4\|A^{-1}\|} > M\|A\|.$$

Из (36) и (37) получим

$$\left\| \frac{1}{2\|A\|} \sum_{k=0}^{4l} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i(A(T_k))\, x_i \right\| \leqslant 1 \tag{38}$$

и

$$\left\| \frac{1}{2\|A\|} \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=n_{4k}+1}^{n_{4k+1}} a_i(A(T_{4k}))\, x_i \right\| > M. \tag{39}$$

Соотношения (38) и (39), в силу леммы 1, показывают, что базис $\{x_n\}_1^\infty$ не является безусловным. Тем самым теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 13.IV.1972

Ֆ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. L_1 [0, 1]-ին իզոմորֆ մաս պարունակող Բանախի տարածությունների բազիսների մասին (*ամփոփում*)

Եթե X Բանախի տարածությունը պարունակում է L_1 [0,1]-ին իզոմորֆ X^* ենթատարածություն, ապա X-ում գոյություն չունի ոչ պայմանական բազիս։

F. G. ARUTUNIAN. *On the basis in Banach spaces containing a subspace isomorphic to* L_1 [0, 1] (summary)

If Banach space X containes a subspace X^*, which is isomorphic to L_1 [0, 1], the X does not possess unconditional basis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Pelczinski.* Projections in certain Banach Spaces, Studia math., 19, 1960, 209—228.
2. *S. Karlin.* Bases in Banach spaces, Duke Math. J., 15, 1948, 971—985.
3. *Ф. Г. Арутюнян.* О базисах пространств L_1 [0, 1] и C [0, 1], Мат. заметки, 11, № 3, 1972, 241—249.
4. *Н. Данфорд, Дж. Шварц.* Линейные операторы. Общая теория, ч. 1. Перевод с англ., М., ИИЛ, 1962. (РЖМат. 1963, 6Б336К).
5. *Л. А. Люстерник* и *В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.