ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 3, 1972 Математика

С. Г. РУБАНОВИЧ

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. II

3°. Теперь мы можем приступить к вычислению индекса оператора L. Для этого нам понадобится еще одно функциональное пространство.

Определение 2. Пространство $B(l_1)$ *определяется, как множество всех функций* $u \in L_2(l_1)$, *для которых конечна норма*

$$\|u\|^2_{B(l_1)} = \|u\|^2_{L_2(l_1)} + \|D^2 Pu\|^2_{L_2(l_1)}.$$

Легко показывается, что это пространство полное. Следующая лемма играет основную роль при вычислении индекса оператора L.

Лемма 11. *Пусть даны операторы*

$$L = \gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha E,$$
$$L_1 = \gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha_1 E,$$

где $\alpha_1 \in C^\infty(l_1, l_2)$, *функция* $\alpha(t)$ *ограничена*, $\inf\limits_{t \in l} |\alpha_1(t)| > 0$, *а разность* $\alpha(t) - \alpha_1(t)$ *непрерывна в точках* t_1 *и* t_2 *и равна в них нулю. Тогда, если для оператора* L_1 *выполнены условия* (A), *то*

$$LR = \gamma_1\left(P - \frac{\alpha}{\alpha_1} Q\right) + \gamma_2\left(-Q + \frac{\alpha}{\alpha_1} P\right) + K,$$

где $R: L_2(l) \to M(l_1, l_2)$ *есть регуляризующий оператор для* L_1, *а оператор* $K: L_2(l) \to L_2(l)$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть дано разбиение единицы

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i(t) \equiv 1, \; 0 \leqslant \varphi_i, \; \varphi_i \in C^\infty(l), \; i = 1, 2, 3,$$

$\operatorname{supp} \varphi_1 \subset l_1$, $\operatorname{supp} \varphi_2 \subset l_2$, а функция $\varphi_3(t)$ отлична от нуля лишь на множестве $\{t: t \in l, |t - t_1| < \varepsilon$ или $|t - t_2| < \varepsilon\}$.

Рассмотрим оператор R_1, определяемый формулой

$$(R_1 v)(t) = \int_{t_1}^{t} (Fv)(t_0)\, dt_0 - \frac{1}{\alpha_1(t)} (Qv)(t),$$

где интеграл берется в положительном направлении по контуру l. Используя формулы:

$$P^2 = P, \; Q^2 = -Q, \; PQ = QP = 0, \; DP = PD, \; DQ = QD$$

и леммы 2 и 3, получим

$$L_1\varphi_1 R_1 \simeq \varphi_1 E.$$

(Напомним, что знак „$\simeq$" понимается как равенство с точностью до вполне непрерывного оператора).

Из лемм 2 и 3 следует $L_1\varphi_1 R \simeq \varphi_1 L_1 R$. Но $L_1 R \simeq E$, поэтому $L_1\varphi_1 R \simeq \varphi_1 E$. Таким образом

$$L_1\varphi_1 R_1 \simeq L_1\varphi_1 R.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор R, получим

$$\varphi_1 R \simeq \varphi_1 R_1, \; L\varphi_1 R \simeq L\varphi_1 R_1 \simeq \varphi_1\left(P - \frac{\alpha}{\alpha_1} Q\right).$$

Аналогично получаем

$$L\varphi_2 R \simeq \varphi_2\left(-Q + \frac{\alpha}{\alpha_1} P\right),$$

согласно леммам 2 и 3 имеем

$$L\varphi_3 R = L_1\varphi_3 R + (L - L_1)\varphi_3 R \simeq \varphi_3 E + (\alpha - \alpha_1)\varphi_3 R.$$

Таким образом

$$LR = \sum_{i=1}^{3} L\varphi_i R \simeq \varphi_1\left(P - \frac{\alpha}{\alpha_1} Q\right) + \varphi_2\left(-Q + \frac{\alpha}{\alpha_1} P\right) + \varphi_3 E + (\alpha - \alpha_1)\varphi_3 R.$$

Замечая, что $E = P - Q$, $\chi_1 - \varphi_1 E = \varphi_3\chi_1$, $\chi_2 - \varphi_2 E = \varphi_3\chi_2$, получим

$$LR \simeq \chi_1\left(P - \frac{\alpha}{\alpha_1} Q\right) + \chi_2\left(-Q + \frac{\alpha}{\alpha_1} P\right) \simeq \chi_1\left(\frac{\alpha}{\alpha_1} - 1\right)\varphi_3 Q +$$
$$+ \chi_2\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}\right)\varphi_3 P + (\alpha - \alpha_1)\varphi_3 R.$$

Так как оператор в правой части последнего равенства по норме стремится к нулю, когда носитель $\operatorname{supp}\varphi_3$ неограниченно уменьшается, то левая часть есть вполне непрерывный оператор (аппроксимируется с любой точностью вполне непрерывными операторами). Лемма 11 доказана.

Нам понадобится также следующая

Лемма 12. *Пусть функция* $\omega \in L_2(-\infty, \infty)$, $\operatorname{supp}\omega \subset [0, \infty)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\chi_+(D^2 P\omega - c^2\omega) = f_+,$$

где $f_+ \in L_2(-\infty, \infty)$, *а константа* $c^2 \bar{\in} (-\infty, 0]$. *Тогда*

$$\|\omega\|_{L_2(-\infty,\infty)} \leqslant \text{const}\, \|f_+\|_{L_2(-\infty,\infty)},$$

кроме того $DP\omega \in L_2(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Имеет место тождество

$$D^2 P\omega - c^2\omega = f_+ + f_-,$$

где $f_- = D^2 P\omega - c^2\omega - f_+$; очевидно $\operatorname{supp} f_- \subset (-\infty, 0]$.

Пусть волна сверху означает преобразование Фурье. Имеем

$$-\xi^2 \widetilde{P\omega}(\xi) - c^2\widetilde{\omega}(\xi) = \widetilde{f}_+(\xi) + \widetilde{f}_-(\xi).$$

Существует (см. Г. Е. Шилов, [6]) аналитическая вне действительной оси функция $\Phi(z)$ такая, что существуют почти всюду на действительной оси пределы $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-(\xi)$, когда $z \to \xi$ по некасательному к действительной оси контуру соответственно из верхней и нижней полуплоскости. Причем

$$\Phi^+(\xi) = -\widetilde{\omega}(\xi), \quad \Phi^-(\xi) = \widetilde{f}_-(\xi)$$

и

$$|\Phi(z)| \leqslant \text{const}\,\frac{(|z|+1)^2}{\sqrt{|\operatorname{Im} z|}}.$$

Учитывая формулу

$$\widetilde{P\omega} = \chi_- \widetilde{\omega},$$

получаем краевую задачу

$$(\xi^2 + c^2)(\chi_- \Phi^+)(\xi) + c^2(\chi_+ \Phi^+)(\xi) = \widetilde{f}_+(\xi) + \Phi^-(\xi). \tag{22}$$

Очевидно, можно потребовать, чтобы

$$\Phi^+ \in L_2(-\infty, \infty), \quad |\Phi(z)| \leqslant \text{const}\,\frac{(1+|z|)^3}{\sqrt{|\operatorname{Im} z|}}. \tag{22a}$$

Одним из решений однородной задачи (22) будет

$$\Phi_0(z) = \exp\left(\frac{z+i}{2\pi i}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\ln(-\xi + ic)}{(\xi+i)(\xi-z)}d\xi + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\ln(-\xi - ic)}{(\xi+i)(\xi-z)}d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln c_2\, d\xi}{(\xi+i)(\xi-z)}\right)\right).$$

В этом можно убедиться с помощью формул Сохотского-Племеля. Из формул (10), (12), (13) § 1 получаем

$$|\Phi_0(z)| = |z|^{\varphi(z)\left(-\frac{\arg z}{\pi} - \frac{\arg c^2}{2\pi}\right)} \exp(g(z)), \tag{23}$$

где функция $g(z)$ ограничена, а

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & |z| < 1 \\ 1, & |z| > 1 \end{cases}.$$

Если $\Phi(z)$ есть решение однородного уравнения (22), удовлетворяющее условиям (22a), то

$$\frac{\Phi^+}{\Phi_0^+} = \frac{\Phi^-}{\Phi_0^-}.$$

Из (22а) и (23) имеем

$$\frac{\Phi^+(\xi)}{\Phi_0^+(\xi)} \Big/ (|\xi|+1) \in L_2(-\infty, \infty), \left|\frac{\Phi(z)}{\Phi_0(z)}\right| \leqslant \text{const}\,\frac{(1+|z|)^4}{\sqrt{|\operatorname{Im} z|}},$$

так что к функции $\frac{\Phi^+(\xi)}{\Phi_0^+(\xi)}$ можно применить теорему Винера-Пэли (см. Л. Хермандер, [7]). Отсюда сразу следует, что

$$\Phi^+(\xi) = P_4(\xi)\,\Phi_0^+(\xi),$$

где P_4 есть полином, степени не выше четырех. Но ни одна функция такого вида не принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$. Таким образом, ненулевых решений задачи (22), удовлетворяющих условиям (22а) не существует.

Решением неоднородной задачи (22) будет

$$\Phi(z) = \frac{\Phi_0(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{f_+(\xi)}\,d\xi}{\Phi_0^-(\xi)(\xi-z)}.$$

Действительно, имеем

$$\frac{1}{\Phi_0^-(\xi)} = g_1(\xi)(|\xi|+1)^\beta,$$

где функция $g_1(\xi)$ ограничена, а $\beta = \frac{\arg c^2}{2\pi}$. Поэтому (см. Б. В. Хведелидзе, [5]) существуют почти всюду на действительной оси $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-+(\xi)$, и

$$\Phi^+(\xi_0) = \frac{\Phi_0^+(\xi_0)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{f_+(\xi)}\,g_1(\xi)\,(|\xi|+1)^\beta\,d\xi}{\xi-\xi_0} + \frac{\Phi^+(\xi_0)}{\Phi_0^-(\xi_0)}\,\frac{\overline{f_+(\xi)}}{2}.$$

Так как $|\Phi_0^+(\xi_0)(|\xi|+1)^\beta| \leqslant \text{const}$, то

$$\|\omega\|_{L_2(-\infty,\infty)} = \|\Phi^+\|_{L_2(-\infty,\infty)} \leqslant \text{const}\,\|f_+\|_{L_2(-\infty,\infty)}$$

(см. Б. В. Хведелидзе, [5]) и

$$\overline{\overline{DP}\omega}(\xi) = i\xi\,(\chi_-\Phi^+)(\xi) \in L_2(-\infty, \infty).$$

Лемма 12 доказана.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 13. *Пусть функция* $\omega \in L_2(-\infty, \infty)$, $\operatorname{supp}\omega \subset [0, \infty)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\chi_+(D^2Q\omega + c^2\omega) = f_+,$$

где $f_+ \in L_2(-\infty, \infty)$, *а константа* $c^2 \overline{\in} (-\infty, 0)$. *Тогда*

$$\|\omega\|_{L_2(-\infty,\infty)} \leqslant \text{const}\,\|f_+\|_{L_2(-\infty,\infty)}$$

и

$$DQ\omega \in L_2(-\infty, \infty).$$

Пусть теперь контур l есть окружность радиуса R, начало отрезка l_1 $t_1 = -Ri$, конец—$t_2 = Re^{i\psi_2}$, где $-\frac{\pi}{2} < \psi_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим на окружности l оператор

$$L_R = \chi_1 (DP + cP - c^2 Q) + \chi_2 (DQ - cQ + P),$$

а на дуге l_1 оператор $M_R = D^2 P - c^2 E$, который отображает пространство $B(l_1)$ (см. определение 2) в $L_2(l_1)$. Будем предполагать, что для оператора L_R выполнены условия (A).

Теорема 2. *Размерности ядра и коядра операторов M_R и L_R совпадают.*

Для доказательства этой теоремы докажем следующие леммы.

Лемма 14. *Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ есть базис коядра оператора L_R. Тогда функции $\chi_1\varphi_1, \chi_1\varphi_2, \cdots, \chi_1\varphi_n$ линейно независимы.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существуют константы $a_1, a_2, \cdots, a_n$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_1 \varphi_i = 0.$$

Положим $\xi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t)$. Пусть $\varphi \in C^\infty(l)$—произвольная функция, равная нулю на отрезке l_1.

Подберем функцию $\psi \in C^\infty(l)$, равную нулю на отрезке l_2, так чтобы

$$\int_l (\varphi(t) + \psi(t))\, e^{-ct}\, dt = 0.$$

Положим

$$u_0(t) = (P(\varphi + \psi))(t) + Q\left(e^{ct} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-c\tau} \; (\varphi(\tau) + \psi(\tau))\, d\tau\right).$$

Из формул

$$P^2 = P,\ Q^2 = -Q,\ PQ = QP = 0,\ DP = PD,\ DQ = QD$$

следует, что $\chi_2 L_R u_0 = \varphi$.

Так как уравнение $L_R u = L_R u_0$ разрешимо, то

$$\int_l \xi(t)\, \overline{(L_R u_0)(t)}\, |dt| = 0.$$

Но

$$\int_l \overline{(L_R u_0)(t)}\; \xi(t)\, |dt| = \int_l \xi(t)\; \overline{\varphi(t)}\, |dt|.$$

Функция $\varphi(t)$ произвольна, поэтому $\xi(t) \equiv 0$, что невозможно, так как функции $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ линейно независимы па контуре l.

Лемма 15. *Пусть $f \in L_2(l)$ и* $\operatorname{supp} f \subset l_1$. *Уравнение*

$$L_R u = f \tag{24}$$

тогда и только тогда разрешимо, когда разрешимо уравнение

$$M_R v = f. \tag{25}$$

Размерности ядер операторов L_R и M_R совпадают.

Доказательство. Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая функция всюду, кроме контура l, исчезающая на бесконечности. И пусть почти всюду на контуре l существуют пределы $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ функции $\Phi(z)$, когда z стремится к $t \in l$ соответственно из области $\{z: |z| < R\}$ и из области $\{z: |z| > R\}$. Кроме того, на дуге l_1 существует почти всюду $(\Phi')^+(t)$, а на дуге l_2 — $(\Phi')^-(t)$, и на $\Phi(z)$ наложено граничное условие на контуре l

$$\begin{cases} (\Phi' + c\Phi)^+(t) - c^2\Phi^-(t) = f(t), & t \in l_1, \\ (\Phi' - c\Phi)^-(t) + \Phi^+(t) = 0, & t \in l_2, \\ \Phi^+ \in L_2(l), \ \Phi^- \in L_2(l), \ \Phi(\infty) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Тогда задачи (24) и (26) эквивалентны, и соотношения

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{u(t)\,dt}{t-z}, \quad u(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$$

устанавливают взаимнооднозначное соответствие между решениями задач (24) и (26) (см. И. И. Привалов, [4]). Точно так же уравнение (25) эквивалентно граничной задаче на дуге l_1

$$\begin{cases} (\Psi'' - c^2\Psi)^+(t) + c^2\Psi^-(t) = f(t) \\ \Psi^+ \in L_2(l_1), \ \Psi^- \in L_2(l_1), \ \Psi(\infty) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где $\Psi(z)$ есть аналитическая в области $C \setminus l_1$ функция, исчезающая на бесконечности, а $\Psi^+(t)$ и $\Psi^-(t)$ — пределы функции $\Psi(z)$ на дуге l_1 соответственно из области $\{z: |z| < R\}$ и $\{z: |z| > R\}$,

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1} \frac{v(t)\,dt}{t-z}, \quad dt = \Psi^+(t) - \Psi^-(t).$$

Пусть $\Phi(z)$ есть решение задачи (26). Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} -\Phi(z), & |z| < R \\ \Phi'(z) - c\Phi(z), & |z| > R. \end{cases}$$

Из (26) видно, что эту функцию можно аналитически продолжить на дугу l_1. В области $|z| > R$

$$\Phi_1(z) = \Phi'(z) - c\Phi(z).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(z) = e^{cz}\left(\int_{z_0}^{z} e^{-ct}\,\Phi_1(t)\,dt + \text{const}\right).$$

По этой формуле функцию $-\Phi(z)$ можно продолжить на всю область аналитичности функции $\Phi_1(z)$ (область $C \setminus l_1$). Обозначим это продолжение через $\Psi(z)$. Имеем

$$\Psi'(z) - c\Psi(z) = \Phi(z), \quad |z| < R,$$

$$\Psi(z) = -\Phi(z), \ |z| > R.$$

Так что функция $\Psi(z)$ исчезает на бесконечности, и, подставляя эти формулы в (26), легко убеждаемся, что $\Psi(z)$ удовлетворяет краевому условию (27). Построенное соответствие однозначное, так как, если $\Psi(z)=0$, то и $\Phi(z)=0$. Обратно, если $\Psi(z)$ удовлетворяет условию (27), то, полагая

$$\Phi(z) = \begin{cases} c\Psi(z) - \Psi'(z), & |z| < R \\ -\Psi(z), & (z) > R, \end{cases}$$

получаем решение задачи (22). Нужно лишь проверить, что

$$\Phi^+ = (c\Psi - \Psi')^+ \in L_2(l), \text{ или, что } (\Psi')^+ \in L_2(l).$$

Представим $\Psi(z)$ в виде $\Psi(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{l_1} \dfrac{v(t)\,dt}{t-z}$, где функция $v(t)$ есть решение уравнения (25). Тогда $(\Psi')^+ = (\Psi^+)' = DPv$ (см. И. И. Привалов, [4]). Так как

$$\chi_1 D^2 v \in L_2(l) \text{ и } \operatorname{supp} v \subset l \setminus l_2,$$

то достаточно проверить, что $DPv \in L_2$ в окрестности точек t_1 и t_2. Пусть функция $\varphi \in C^\infty(l)$ отлична от нуля лишь на интервале

$$|t_1 - t| < \varepsilon \text{ и } \varphi(t) = 1 \text{ при } |t_1 - t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для некоторого малого числа $\varepsilon > 0$. Тогда

$$(Pv)(t_0) - (P\varphi v)(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1} \frac{(1-\varphi(t))\,v(t)\,dt}{t - t_0}, \ |t_1 - t_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда сразу видно, что если $DP\varphi v \in L_2$ в окрестности точки t_1, то и $DPv \in L_2$ в окрестности точки t_1.

Возьмем функцию $g \in C^\infty[-1, 1]$ взаимно однозначно, без изменения направления обхода отображающую отрезок $[-1, 1]$ на некоторую окрестность на контуре l точки t_1. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало то носитель $\operatorname{supp}\varphi$ будет содержаться внутри образа $\operatorname{Im} g$. Полагаем

$$g(0) = t_1, \ g'(x) \neq 0, \ x \in [-1, 1].$$

В силу леммы 4 нам достаточно доказать, что $DP(\varphi(g)\,v(g)) \in L_2(-1, 1)$. Пусть функция $w(x)$ есть продолжение функции $\varphi(g(x))\,v(g(x))$ нулем на интервал $(-\infty, \infty)$. Тогда, так как $\varphi(g(x)) = 0$ в окрестности точки 1, в силу леммы 4 будем иметь

$$w \in L_2(-\infty, \infty), \ \chi_+ D^2 P w \in L_2(-\infty, \infty), \ \operatorname{supp} w \subset [0, \infty).$$

В частности

$$\chi_+ (D^2 P - E)\, w = \tau \in L_2(-\infty, \infty).$$

Из леммы 12 следует, что

$$DPw \in L_2(-\infty, \infty).$$

Для окрестности точки t_2 доказательство аналогичное.

Лемма 15 доказана.

Из лемм 15 и 14 легко следует теорема 2.

Лемма 16. *Если радиус R достаточно велик, то размерность ядра оператора M_R не больше единицы. (Очевидно, при увеличении R c^2 и ψ_2 полагаются неизменными).*

Доказательство. Проведем из точек t_1 и t_2 лучи s_1 и s_2 параллельно действительной оси в сторону возрастания реальной части. Обозначим через W множество, ограниченное сверху лучем s_2, снизу лучем s_1, слева дугой l_1.

Пусть $\Psi(z)$ есть решение однородной задачи (27)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1}\frac{v(t)\,dt}{t-z},\quad v\in \operatorname{Ker} M_R.$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi_1(z)=\begin{cases}-c^2\,\Psi(z), & z\in W\\ \Psi''(z)-c^2\,\Psi(z), & z\in C\setminus W,\end{cases}$$

В силу (27) функцию $\Psi_1(z)$ можно аналитически продолжать на дугу l_1, а потому она аналитична всюду в плоскости C кроме лучей s_1 и s_2.

Не ограничивая общности можно считать, что $\operatorname{Re} c>0$ (c^2 — неотрицательно). Обозначим

$$\Phi(z)=\Psi'(z)+c\Psi(z),\quad z\in C\setminus W, \tag{28}$$

Тогда

$$\Phi'(z)-c\Phi(z)=\Psi_1(z),\quad z\in C\setminus W.$$

Отсюда

$$\Phi(z)=e^{cz}\left(\int\limits_{z_0}^{z}e^{-ct}\,\Psi_1(t)\,dt+\text{const}\right);\quad z,\ z_0\in C\setminus W.$$

По этой формуле функцию $\Phi(z)$ можно продолжить на всю область аналитичности функции $\Psi_1(z)$, на область $C\setminus(s_1\cup s_2)$.

Мы поставим условие на функцию $v(t)$. Пусть $t_0\in l_1$ — произвольная (но фиксированная) точка. Потребуем, чтобы

$$e^{ct_0}\int\limits_{\infty}^{\operatorname{Re} t_0}e^{-c(x+i\operatorname{Im} t_0)}\,\Psi(x+i\operatorname{Im} t_0)\,dx+\frac{(\Psi'+c\Psi)^+(t_0)}{c^2}=0, \tag{29}$$

где $\Psi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{l_1}\frac{v(t)\,dt}{t-z}$, $(\Psi'+c\Psi)^+=DPv+cPv$.

Это условие имеет смысл, так как $\operatorname{Re} c>0$, а $v\in B(l_1)$. При выполнении (29) (а мы будем считать его выполненым)

$$\Phi(z)=-c^2e^{c\operatorname{Re} z}\int\limits_{\infty}^{\operatorname{Re} z}e^{-cx}\,\Psi(x+i\operatorname{Im} z)\,dx,\quad z\in W.$$

Тогда при $z \in W$ имеем

$$|z\,\Phi(z)| \leqslant \frac{|c^2| \int\limits_{\infty}^{\operatorname{Re} z} e^{-\operatorname{Re}(cx)} |\Psi(x+i\operatorname{Im} z)|\,dx}{e^{-\operatorname{Re} c \operatorname{Re} z}} \xrightarrow[z\in W]{\operatorname{Re} z\to\infty} \text{const}.$$

Отсюда получаем для больших $|z|$

$$|\Phi(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|}. \tag{30}$$

Из (29) имеем

$$\Psi(z) = e^{-cz}\left(\int\limits_{z_0}^{z} e^{ct}\,\Phi(t)\,dt + \text{const}\right).$$

По этой формуле функцию $\Psi(z)$ можно продолжать на область аналитичности функции $\Phi(z)$, область $C \setminus (s_1 \cup s_2)$. Обозначим это продолжение через $\Phi_1(z)$.

$$\Phi_1(z) = \text{const}\; e^{-cz} + e^{-cz} \int\limits_{z_0}^{z} e^{ct}\,\Phi(t)\,dt,\ z_0 \in W,\ z \in W.$$

Так как $\operatorname{Re} c > 0$, то легко получаем из (30), что для больших $|z|$

$$|\Phi_1(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|}. \tag{31}$$

По построению функции $\Phi_1(z)$ имеем

$$\Phi_1'(z) - c^2\Phi_1(z) = -c^2\Psi(z),\ z \in W,$$

$$\Phi_1(z) = \Psi(z),\ z \overline{\in} W.$$

Так как на лучах s_1 и s_2 функция $\Psi(z)$ аналитична, то, обозначая через $\Phi_1^+(t)$ и $\Phi_1^-(t)$ пределы функции $\Phi_1(z)$ при z стремящемся к $t \in s_1$ $(t \in s_2)$ из верхней и нижней полуплоскости соответственно, получим

$$(\Phi_1' - c^2\Phi_1)^+(t) + c^2\,\Phi_1^-(t) = 0,\ t \in s_1,$$

$$(\Phi_1' - c^2\Phi_1)^-(t) + c^2\Phi_1^+(t) = 0,\ t \in s_2.$$

Пусть теперь

$$u_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t),\ t \in s_1,$$

$$u_2(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t),\ t \in s_2.$$

Легко видеть (см. И. И. Привалов, [4]), что функция $u_1(t)$ (функция $u_2(t)$) принадлежит пространству L_2 в окрестности точки t_1 (точки t_2). Из (31) следует, что

$$u_1 \in L_2(s_1),\ u_2 \in L_2(s_2).$$

Обозначим

$$P_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_1}\frac{u_1(t)\,dt}{t-z},\quad P_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_2}\frac{u_2(t)\,dt}{t-z}.$$

Обычным способом показывается, что

$$\Phi_1(z) = P_1(z) + P_2(z).$$

И тогда получим

$$(P_1^{\cdot\cdot} - c^2P_1)^+(t) + c^2 P_1^-(t) = -P_2^{\cdot\cdot}(t),\ t \in s_1,$$

$$(P_2^{\cdot\cdot} - c^2P_2)^-(t) + c^2 P_2^+(t) = -P_1^{\cdot\cdot}(t),\ t \in s_2,$$

что эквивалентно на s_1

$$D^2 Pu_1 - c^2u_1 = -P_2^{\cdot\cdot}(t),$$

а на s_2

$$D^2 Qu_2 + c^2u_2 = -P_1^{\cdot\cdot}(t).$$

Согласно леммам 12 и 13 имеют место оценки

$$\|u_1\|_{L_2(s_1)} \leqslant \mathrm{const}\,\|P_2^{\cdot\cdot}\|_{L_2(s_1)},$$

$$\|u_2\|_{L_2(s_2)} \leqslant \mathrm{const}\,\|P_1^{\cdot\cdot}\|_{L_2(s_2)}.$$

Так как луч s_2 находится выше линии s_1, то, обозначая

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ u_1(x+t_1), & x > 0, \end{cases}$$

получим

$$P_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-i\xi(t-t_1)}\,\bar{\omega}(\xi)\,d\xi,\ t \in s_2,$$

где $\bar{\omega}(\xi)$ есть преобразование Фурье функции $\omega(x)$. Замечая, что $\operatorname{Im}(t-t_1) = y = \mathrm{const}$ при $t \in s_2$, получаем, в силу равенства Парсеваля

$$\|P_1^{\cdot\cdot}\|^2_{L_2(s_2)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}|\xi^2 e^{\xi y}\,\bar{\omega}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Так как $\xi^2 e^{\xi y} \to 0$ при $y \to \infty$ равномерно по $\xi \in (-\infty, 0]$, то

$$\frac{\|P_1^{\cdot\cdot}\|_{L_2(s_2)}}{\|u_1\|_{L_2(s_1)}} \to 0 \text{ при } y \to \infty,$$

что эквивалентно условию $R \to \infty$. Точно так же

$$\frac{\|P_2^{\cdot\cdot}\|_{L_2(s_1)}}{\|u_2\|_{L_2(s_2)}} \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Значит, при R достаточно большом

$$\|u_1\|_{L_2(s_1)} < \frac{1}{2}\|u_2\|_{L_2(s_2)},\quad \|u_2\|_{L_2(s_2)} < \frac{1}{2}\|u_1\|_{L_2(s_1)}.$$

Или $u_1=0$, $u_2=0$. Из линейности условия (29) следует лемма 16.

Лемма 17. *Если радиус R достаточно велик, то*

$$0 \leqslant \operatorname{ind} M_R \leqslant 1.$$

Доказательство. Неравенство $\operatorname{ind} M_R \leqslant 1$ следует из леммы 16. Докажем, что $0 \leqslant \operatorname{ind} M_R$.

Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(l_1)$(то есть $\operatorname{supp} \varphi \subset l_1$). Тогда, если $v \in L_2(l_1)$, то легко проверить, что

$$\int_{l_1} (M_R \varphi)(t)\, v(t)\, dt = - \int_{l_1} [(Qv)(t)\, \varphi''(t) + c^2 v(t)\, \varphi(t)]\, dt.$$

Если $v \dfrac{dt}{d|t|} \in \operatorname{coker} M_R$, то (см. Г. Е. Шилов, [6])

$$D^2 Qv + c^2 v = 0,\ \ D^3 Qv \in L_2(l_1).$$

Проведем дугу $\overline{l}_1$ симметрично дуге l_1 относительно хорды $\overline{t_1 t_2}$.

Обозначим через W лунку, ограниченную дугами l_1 и $\overline{l}_1$.

Пусть

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{v(t)\, dt}{t - z},$$

обозначим через $\Phi^+(t)$ предел функции $\Phi(z)$, когда z стремится к $t \in l_1$ (или к $t \in \overline{l}_1$) по некасательному пути, проходящему слева от дуги, через $\Phi^-(t)$ обозначим предел справа.

На дуге l_1 имеем $(\Phi'' - c^2 \Phi)^-(t) = -c^2 \Phi^+(t)$. Как и в предыдущих леммах, строим аналитическую в $C \setminus \overline{l}_1$ функцию $\Psi(z)$, удовлетворяющую условиям

$$\Psi(z) = \Phi(z),\ \ z \in C \setminus W,$$

$$\Psi''(z) - c^2 \Psi(z) = -c^2 \Phi(z),\ \ z \in W.$$

Тогда на дуге $\overline{l}_1$

$$(\Psi'' - c^2 \Psi)^-(t) = -c^2 \Psi^+(t).$$

Пусть X есть центр дуги $\overline{l}_1$. Сделаем преобразование $X - z = z_1$. При этом дуга l_1 перейдет в $\overline{l}_1$.

Положим $\Phi_1(z) = \Psi(X - z)$. На дуге l_1 получим

$$(\Phi_1'' - c^2 \Phi_1)^+(t) + c^2 \Phi_1^-(t) = 0.$$

Полагая $u(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$, убедимся, что $M_R u = 0$. Значит $\dim \operatorname{coker} M_R \leqslant \dim \ker M_R$. Лемма 17 доказана.

Согласно лемме 3

$$L_R \simeq \gamma_1 (DP + c^2 E) + \gamma_2 (DQ + E).$$

Мы будем под символом L_R понимать выражение в правой части этого равенства,

Лемма 18. *Для любого радиуса $R > 0$ $0 \leqslant \operatorname{ind} L_R \leqslant 1$.*

Доказательство. Зафиксируем константы γ_2 и c^2.

Тогда, в силу теоремы 2 и леммы 17, найдется такой радиус R_0, что для $R \geqslant R_0$ $0 \leqslant \operatorname{ind} L_R \leqslant 1$.

Возьмем теперь произвольный радиус $R>0$. На интервале $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ определим функцию $\psi(\varphi)\in C^\infty\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right)$ таким образом, чтобы $\psi^{(n)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\psi^{(n)}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $n=1, 2, \cdots,$

$$\psi(\psi_2)=\psi_2,\ \psi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2},\ \psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2},\quad \psi'(\varphi)>0,$$

$$\psi'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\psi'(\psi_2)=\psi'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{R}{R_0}.$$

Функция $g(t)$, отображающая окружность радиуса R на окружность радиуса R_0, определяется из равенства

$$g(Re^{i\varphi})=R_0e^{i\psi(\varphi)}.$$

Очевидно эта функция удовлетворяет условиям леммы 4. Пусть

$$(Tu)(t)=u(g(t)),$$

тогда $\operatorname{ind} T=0$. Согласно лемме 4 имеем $TL_{R_0}\simeq L_R^1T$, где

$$L_R^1=\frac{1}{g'}[\chi_1(DP+c^2g'E)+\chi_2(DQ+g'E)].$$

Используя формулы $\operatorname{ind}AB=\operatorname{ind}A+\operatorname{ind}B$, $\operatorname{ind}A=\operatorname{ind}B$, если $A\simeq B$ (см. С. Г. Михлин, [1]), получим $\operatorname{ind}L_{R_0}=\operatorname{ind}L_R^1$.

Но к операторам L_R и L_R^1 применима лемма 11, и, согласно лемме 11

$$\operatorname{ind}L_R^1=\operatorname{ind}L_R+\operatorname{ind}B,$$

где

$$B=\chi_1(P-g'Q)+\chi_2\left(P-\frac{1}{g'}\,Q\right).$$

Так как $g'(t_1)=g'(t_1)=1$, то коэффициент у оператора B непрерывен по Гёльдеру

$$\operatorname{ind}B=\left[\frac{\ln g'(t)}{2\pi i}\right]_{l_1}-\left[\frac{\ln g'(t)}{2\pi i}\right]_{l_2}=\frac{\psi(\varphi)-\varphi}{2\pi}\Bigg|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi_2}-\frac{\psi(\varphi)-\varphi}{2\pi}\Bigg|_{\varphi=-\psi_2}^{\frac{3\pi}{2}}.$$

Этим лемма 18 доказана.

Теорема 3. *Имеет место формула*

$$\operatorname{ind}L_K=\begin{cases}0, & \textit{если } \arg c^2+2\psi_2<0\\ 1, & \textit{если } \arg c^2+2\psi_2>0.\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим вначале следующую ситуацию. Пусть задано однопараметрическое семейство (гомотопия) операторов на окружности l

$$Z_p=\chi_1DP+\chi_2DQ+a_pE,$$

где функция $\alpha_p \in C^\infty(l_1, l_2)$ удовлетворяет условию (A) при каждом $p \in [0, 1]$ и равномерно непрерывна по параметру p. Тогда при каждом $p \in [0, 1]$ оператор Z_p есть Ф-оператор, и его индекс локально постоянен на отрезке $[0, 1]$. Действительно, пусть R_p есть регуляризующий оператор для оператора Z_p. Имеем

$$Z_q R_p = Z_p R_p + (Z_q - Z_p) R_p \simeq E + (\alpha_q - \alpha_p) R_p.$$

Отсюда $\operatorname{ind} Z_q - \operatorname{ind} Z_p = \operatorname{ind}(E + (\alpha_q - \alpha_p) R_p)$. Когда параметр q настолько близок к p, что $\|(\alpha_q - \alpha_p) R_p\| < 1$, $\operatorname{ind}(E + (\alpha_q - \alpha_p) R_p) = 0$. После этого легко убедиться, что $\operatorname{ind} Z_0 = \operatorname{ind} Z_1$.

Пусть теперь заданы два оператора

$$L_R^0 = \chi_1 (DP + c_0 E) + \chi_2 (DQ + E),$$

$$L_R^1 = \chi_1 (DP + c_1 E) + \chi_2 (DQ + E),$$

и пусть

$$\arg c_0 + 2\psi_2 < 0, \ \arg c_1 + 2\psi_2 > 0.$$

Положим

$$c_0 = r_0 e^{i\lambda_0}, \ c_1 = r_1 e^{i\lambda_1}, \ -\pi < \lambda_0, \ \lambda_1 < \pi.$$

Тогда

$$\lambda_0 + 2\psi_2 < 0, \ \lambda_1 + 2\psi_2 > 0.$$

Рассмотрим гомотопию

$$\alpha_p(t) = \begin{cases} (r_0(1-p) + r_1 p) \exp\left[i \left(\lambda_0 (1-p) + \lambda_1 p - 2\pi p \dfrac{\psi + \frac{\pi}{2}}{\psi_2 + \frac{\pi}{2}} \right) \right], & Re^{i\psi} = t \in l_1 \\ 1, & t \in l_2. \end{cases}$$

Тогда, если $Z_p = \chi_1 DP + \chi_2 DQ + \alpha_p E$, то $Z_0 = L_R^0$, а к операторам Z_1 и L_R^1 можно применить лемму 11. Легко проверить справедливость для Z_p условий (A) при любом $p \in [0, 1]$. Значит

$$\operatorname{ind} L_R = \operatorname{ind} Z_0 = \operatorname{ind} Z_1 = \operatorname{ind} Z_1 F_1 + \operatorname{ind} L_R^1,$$

где F_1 есть регуляризующий оператор для оператора L_R^1.

Согласно лемме 11 имеем $\operatorname{ind} Z_1 F_1 = \operatorname{ind} T$, где $T = \chi_1 \left(P - \dfrac{\alpha_1}{c_1} Q \right) + \chi_2 \left(P - \dfrac{1}{\alpha_1} Q \right)$,

$$\operatorname{ind} T = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi} + \frac{\psi + \frac{\pi}{2}}{\psi_2 + \frac{\pi}{2}} \right) \Bigg|_{\psi = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -1.$$

Отсюда следует теорема 3.

Теперь можно приступить к вычислению индекса оператора L, заданного на произвольном гладком замкнутом контуре l без самопересечений.

Пусть φ_i есть угол между положительным направлением касательной в точке t_i, $i=1, 2$, и действительной осью, причем, φ_1 и φ_2 выбраны так, что если точку касания непрерывно перемещать из точки t_1 в t_2, то угол наклона касательной непрерывно перейдет из φ_1 в φ_2. Целые числа k_1 и k_2 определим из неравенств

$$-\pi < \arg\alpha(t_j+0) + \arg\alpha(t_j-0) + 2\varphi_j + 2\pi k_j < \pi, \quad j=1, 2. \tag{32}$$

Теорема 4. *Если выполнены условия* (*A*), *то индекс оператора* L *вычисляется по формуле*

$$\operatorname{ind} L = \frac{1}{2\pi}\left(\arg\alpha(t_1+0) + \arg\alpha(t_1-0) - \arg\alpha(t_2+0) - \arg\alpha(t_2-0)\right) +$$

$$+ k_1 - k_2 + \left[\frac{\ln\alpha(t)}{2\pi i}\right]_{l_1} - \left[\frac{\ln\alpha(t)}{2\pi i}\right]_{l_2}. \tag{33}$$

Доказательство. Докажем вначале формулу (33) в случае, когда l есть единичная окружность. В этом случае можно записать

$$t_1 = e^{i\psi_1}, \quad t_2 = e^{i\psi_2}, \quad 0 < \psi_2 - \psi_1 < 2\pi.$$

Тогда $\varphi_1 = \psi_1 + \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \psi_2 + \frac{\pi}{2}$. Положим

$$\alpha(t_j+0) = r_j^+ e^{i\beta_j^+}, \quad j=1, 2, \quad \alpha(t_j-0) = r_j^- e^{i\beta_j^-}, \quad j=1, 2.$$

Тогда неравенства (32) можно переписать в виде

$$0 < \beta_j^+ + \beta_j^- + 2\psi_j + 2\pi(k_j+1) < 2\pi, \quad j=1, 2. \tag{34}$$

Целое число k определим из неравенства

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_2 \equiv \frac{1}{2}\left(\beta_2^+ + \beta_2^- + 2\psi_2 + 2\pi k_2 - (\beta_1^+ + \beta_1^- + 2\psi_1 + 2\pi k_1)\right) +$$

$$+ \pi\left(k - \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Из (34) следует, что

$$k = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_2^+ + \beta_2^- + 2\psi_2 + 2\pi k_2 + 2\pi k > 0 \\ 0, & \text{если } \beta_2^+ + \beta_2^- + 2\psi_2 + 2\pi k_2 + 2\pi k < 0. \end{cases} \tag{35}$$

Определим на интервале $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$ функцию $\psi(\theta)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\psi \in C^\infty\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right), \quad \psi' > 0, \quad \psi^{(n)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \psi^{(n)}\left(\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$n = 1, 2, \cdots, \quad \psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \psi_1, \quad \psi(\theta_2) = \psi_2, \quad \psi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \psi_1 + 2\pi, \tag{36}$$

$$\psi'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\psi'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{r_1^+ r_1^-}},\ \psi'(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{r_2^+ r_2^-}}.$$

Определим функцию $g(t)$, отображающую единичную окружность на себя, по формуле $g(e^{i\theta})=e^{i\psi(\theta)}$.

Эта функция удовлетворяет условиям леммы 4. Поэтому, полагая $(Tu)(t)=u(g(t))$, получаем

$$\operatorname{ind} L=\operatorname{ind} TL,\quad TL\simeq\frac{1}{g'}L_1T,$$

или $\operatorname{ind} L=\operatorname{ind} L_1$, где оператор L_1 определен на единичной окружности s с обычной ориентацией.

Начало дуги $s_1=g^{-1}(l_1)$ есть $\tau_1=-i$, конец $\tau_2=e^{i\theta_2}$,

$$L_1=\chi_1 DP+\chi_2 DQ+\alpha(g)g'E.$$

Обозначив $\alpha(g)g'=\alpha_1$ можно записать

$$\alpha_1(\tau_1+0)=\sqrt{\frac{r_1^+}{r_1^-}}\,e^{i\left(\beta_1^+ +\psi_1+\frac{\pi}{2}\right)},\ \alpha_1(\tau_1-0)=\sqrt{\frac{r_1^-}{r_1}}\,e^{i\left(\beta_1^- +\psi_1+\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\alpha_1(\tau_2-0)=\sqrt{\frac{r_2^-}{r_2^+}}\exp\left[i\left(\frac{\beta_1^+ +\beta_1^-}{2}-\frac{\beta_2^+-\beta_2^-}{2}+\psi_1+\pi\left(k_1-k_2-k+\frac{1}{2}\right)\right)\right],$$

$$\alpha_1(\tau_2+0)=\sqrt{\frac{r_2^+}{r_2^-}}\exp\left[i\left(\frac{\beta_1^+ +\beta_1^-}{2}+\frac{\beta_2^+-\beta_2^-}{2}+\psi_1+\pi\left(k_1-k_2-k+\frac{1}{2}\right)\right)\right].$$

Пусть теперь $\gamma\in C^\infty(s)$, причем $\gamma(\tau)\neq 0$ нигде на контуре s

$$\left[\frac{\ln\gamma(\tau)}{2\pi i}\right]_s=0,\ \gamma(-i)=\alpha_1(\tau_1-0),\ \gamma(e^{i\theta_2})=\alpha_1(\tau_2+0).$$

Тогда, согласно лемме 5, оператор $S=P-\gamma Q$ непрерывен из $M(s_1, s_2)$ в $M(s_1, s_2)$, и, легко проверить, что $\operatorname{ind} S=0$. Имеем, согласно лемме 5

$$\operatorname{ind} L_1=\operatorname{ind} L_1S,\ L_1S\simeq\chi_1 DP+\chi_2 DQ+\alpha_2 E,$$

где $\alpha_2=\chi_1 g'\alpha(g)\gamma+\chi_2\dfrac{g'\alpha(g)}{\gamma}$.

Таким образом

$$\operatorname{ind} L=\operatorname{ind}(\chi_1 DP+\chi_2 DQ+\alpha_2 E).$$

К операторам

$$\chi_1 DP+\chi_2 DQ+\alpha_2 E$$

и

$$L_0=\chi_1\left(DP-e^{i\left(\beta_1^+ +\beta_1^- +2\psi_1\right)}E\right)+\chi_2(DQ+E)$$

можно применить лемму 11, и, согласно этой лемме

$$\operatorname{ind}(\chi_1 DP+\chi_2 DQ+\alpha_2 E)=\operatorname{ind} L_0+$$

$$+\operatorname{ind}\left(\chi_1\left(P-\frac{g'\alpha(g)\gamma}{\exp[i(\beta_1^+ +\beta_1^- +2\psi_1)]}Q\right)+\chi_2\left(P-\frac{g'\alpha(g)}{\gamma}Q\right)\right).$$

Поэтому (см. Н. И. Мусхелишвили, [3]),

$$\operatorname{ind} L = \left[\frac{\ln g'(\tau)}{2\pi i}\right]_{s_1} - \left[\frac{\ln g'(\tau)}{2\pi i}\right]_{s_2} + \left[\frac{\ln \alpha(t)}{2\pi i}\right]_{l_1} - \left[\frac{\ln \alpha(t)}{2\pi i}\right]_{l_2} + \operatorname{ind} L_0.$$

Согласно (36) имеем

$$\left[\frac{\ln g'(t)}{2\pi i}\right]_{s_1} - \left[\frac{\ln g'(t)}{2\pi i}\right]_{s_2} = \frac{\beta_1^+ + \beta_1^- - \beta_2^+ - \beta_2^-}{2\pi} + k_1 - k_2 - k.$$

Из теоремы 3 следует

$$\operatorname{ind} L_0 = \begin{cases} 1, \text{ если } 2\theta_2 + \beta_1^+ + \beta_1^- + 2\psi_1 + 2\pi\left(k_1 + \frac{1}{2}\right) > 0, \\ 0, \text{ если } 2\theta_2 + \beta_1^+ + \beta_1^- + 2\psi_1 + 2\pi\left(k_1 + \frac{1}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

Но

$$2\theta_2 + \beta_1^+ + \beta_1^- + 2\psi_1 + 2\pi\left(k_1 + \frac{1}{2}\right) = \beta_2^+ + \beta_2^- + 2\psi_2 + 2\pi(k_2 + k).$$

Таким образом, из (35) следует, что $\operatorname{ind} L_0 = k$, что доказывает формулу (33) в случае единичной окружности.

Докажем формулу (33) в общем случае.

Пусть $g(t)$ есть гладкая функция, взаимнооднозначно отображающая единичную окружность s на контур l, причем $g'(\tau) \neq 0$ нигде на окружности s

$$g(e^{i\psi_1}) = t_1, \quad g(e^{i\psi_2}) = t_2, \quad 0 < \psi_2 - \psi_1 < 2\pi.$$

Нетрудно видеть, что угол наклона касательной к контуру l в точке $g(e^{i\psi})$ с действительной осью будет

$$\varphi(\psi) = \arg \frac{dg(e^{i\psi})}{d\psi}.$$

Мы выберем ту ветвь функции $\varphi(\psi)$, которая удовлетворяет условиям $\varphi(\psi_1) = \varphi_1$, $\varphi(\psi_2) = \varphi_2$.

Определим оператор

$$(Tu)(\tau) = u(g(\tau)).$$

Имеем, $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} TL$, $TL \simeq \frac{1}{g'} L_1 T$, значит $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_1$, где $L_1 = \lambda_1 DP + \lambda_2 DQ + g\lambda'(g)E$.

Заметим, что

$$\arg g'(e^{i\psi}) = \arg\left(\frac{\frac{dg(e^{i\psi})}{d\psi}}{ie^{i\psi}}\right) = \varphi(\psi) - \psi - \frac{\pi}{2}.$$

Из формулы (33) для окружности теперь легко следует формула (33) в общем случае.

Замечание 1. Применяя лемму 11 легко убедиться, что формула (33) имеет место и тогда, когда коэффициент $\alpha(t)$ непрерывен всюду на контуре l, кроме точек t_1 и t_2, где он терпит разрыв первого рода, и нигде не обращается в нуль.

Замечание 2. Из (32) и (33) следует, что если для функции $\alpha \in C^{\infty}(l_1, l_2)$ не выполнены условия (A), то для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие функции $\alpha_1 \in C^{\infty}(l_1, l_2)$ и $\alpha_2 \in C^{\infty}(l_1, l_2)$, которые удовлетворяют условиям (A),

$$\sup_{t \in l} |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{t \in l} |\alpha_2(t) - \alpha_1(t)| < \varepsilon \text{ и } \operatorname{ind}(\gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha_1 E) \neq$$

$$\neq \operatorname{ind}(\gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha_2 E).$$

Таким образом, оператор $L = \gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha E$ не может быть Ф-оператором, то есть условия (A) также необходимы.

В заключение, автор выражает благодарность профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и внимание к работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 10.IX 1971

Ս. Գ. ՌՈՒԲԱՆՈՎԻՉ. Որոշ սինգուլյար ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների լուծելիության մասին. II *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածը հեղինակի սույն հրատարակչության նախորդ համարում տպագրված հոդվածի շարունակությունն է։

Հոդվածում հաշված է այն սինգուլյար ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարման ինդեքսը, որի ավագ անդամը չի բավարարում նորմալության պայմաններին և ունի խզվող գործակիցներ։

S. G. RUBANOVICH. *On the solvability of some singular integro-differential equations.* II (summary)

The article is continuation of № 2, 1972. For a singular integro-differential equation with high order term failing to satisfy normality conditions and posessing discontinious coefficients, the index is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Михлин.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Ф.-М., 1962.
2. *С. Г. Михлин.* Сингулярные интегральные уравнения с непрерывными коэффициентами. ДАН СССР. 52, № 3, 1948, 435—438.
3. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, Изд. „Наука“, 1968.
4. *И. И. Привалов.* Граничные свойства однозначных аналитических функций.
5. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные задачи теории функций. Сингулярные интегральные уравнения и некоторые приложения, Тр. Тб. мат. ин-та АН Груз.ССР, XXIII, № 2, 3—158.
6. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ, Второй спецкурс, Ф.-М., 1965.
7. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Изд. „Мир“, 1965.