ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 3, 1972 Математика

Г. Н. ПЕТРОСЯН

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СХЕМ АЛГОРИТМОВ

В работе рассматриваются схемы алгоритмов, представляющие собой обобщение операторных схем Янова (см. [1]). Это обобщение проведено по двум направлениям:

1) заменой однократного использования операторов в схеме на многократное;

2) расширением понятия „сдвиг, приписываемый оператору".

Используемое здесь понятие интерпретации почерпнуто из работы [2]; интерпретация определяется независимо от схемы и основу ее составляет множество, которое мы условно назовем интерпретационным; его мощность принимается за мощность интерпретации.

Задание интерпретации превращает каждую схему в алгоритм, перерабатывающий элементы интерпретационного множества в элементы этого же множества; так появляется функция, реализуемая схемой при данной интерпретации.

Универсальной называется интерпретация, обладающая свойством: совпадение функций, реализуемых двумя схемами при универсальной интерпретации, влечет за собой совпадение функций, реализуемых этими схемами при любой другой интерпретации; и так для всех пар схем из выбранного класса схем. Таким образом, универсальность интерпретации—свойство, зависящее от рассматриваемого класса схем.

В работе даются способы построения

а) счетной интерпретации, универсальной для всех схем алгоритмов (теорема 2);

б) конечной интерпретации, универсальной для схем, в каждой из которых общее число используемых операторов не превышает некоторого заданного числа (теорема 4);

и доказывается, что не существует конечной интерпретации, универсальной для всех схем алгоритмов (теорема 3).

Доказательству перечисленных теорем предшествуют введение используемых в статье понятий и рассмотрение проблемы эквивалентности схем алгоритмов.

§ 1. Основные понятия

1.1. Зададимся двумя конечными множествами:

$$\Gamma = \{\Delta\}; \; A = \{A_0, A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}\}, \; n \geqslant 1;$$

элементы множества A будем называть операторами.

1.2. **Распределением сдвигов** назовем соответствие, при котором каждому оператору A_i, $i=1, 2, \cdots, n$ сопоставлено отображение

$$s_i: \Gamma \to B(\Gamma)/\{\varnothing\},$$

где $B(\Gamma)$ — множество подмножеств множества Γ.

Полагаем впредь фиксированным некоторое распределение сдвигов

$$s = \langle s_1, s_2, \cdots, s_n \rangle.$$

1.3. Сдвоенную последовательность

$$x = \begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 \cdots, & \Delta_{l-1} & \Delta_l \\ A_{i_1} & A_{i_2} \cdots & A_{i_{l-1}} & A_{i_l} \end{matrix}, \ l > 0,$$

в которой $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_l$ — элементы множества Γ, а $A_{i_1}, \cdots, A_{i_l}$ — операторы, отличные от оператора A_{n+1}, назовем **конфигурацией**, если для всех $k=1, 2, \cdots, l-1$, $\Delta_{k+1} \in s_{i_{k+1}}(\Delta_k)$.

Пустую конфигурацию (случай $l=0$) будем обозначать через Λ, длиной конфигурации x (обозначаем длину x через $d[x]$) будем называть число l. Отметим, что оператор A_0 может занимать в конфигурации только первое место.

1.4. Последовательность пар элементов из Γ

$$(\Delta_1, \Delta_1'), (\Delta_2, \Delta_2'), \cdots, (\Delta_m, \Delta_m')$$

называем независимой относительно отображения s_i, если при всех $t=1, 2, \cdots, m$

$$\Delta_t' \in s_i(\Delta_t),$$

$$\Delta_t' \overline{\in} s_i(\Delta_k), \ k=1, 2, \cdots, t-1.$$

Максимум длины всех независимых относительно s_i последовательностей обозначим через ε_i; наибольшее из чисел ε_i, $i=1, 2, \cdots, n$, назовем **рангом** распределения сдвигов $S=\langle s_1, s_2, \cdots, s_n\rangle$. Ясно, что ранг распределения сдвигов всегда не превышает числа элементов множества Γ.

1.5. **Схемой алгоритмов** будем называть конечный ориентированный граф, в котором

а) все вершины подразделяются на вход, выход, операторные вершины и предикатные вершины; вход — это вершина, из которой исходит одна дуга и в которую не приходит ни одной дуги; из каждой операторной вершины исходит в точности одна дуга; из каждой предикатной — две дуги, одна из них некоторым образом отмеченная;

б) входу сопоставлен операторный символ A_0, выходу — операторный символ A_{n+1}; каждой операторной вершине — свой операторный символ A_i, $i=1, 2, \cdots, n$ (возможен случай, когда двум различным вершинам сопоставлен один и тот же оператор); каждой предикатной вершине — свое подмножество множества Γ.

Схему алгоритма будем обозначать через $\mathfrak{M}$ и для краткости называть просто схемой.

1.6. Пусть V—множество всех вершин схемы $\mathfrak{M}$, V_0—множество ее операторных вершин, пополненное входом.

Построим отображение

$$p: V_0 \times \Gamma \to V,$$

сопоставляющее паре (v, Δ), где $v \in V_0$, $\Delta \in \Gamma$, вершину v' множества V.

Для этого в схеме $\mathfrak{M}$ из вершины v проложим маршрут

$$v = v_1, v_2, \cdots, v_l, \tag{1}$$

конец которого—вершина v_l и определит искомую вершину v'. Построение маршрута (1) подчиним требованиям; v_2—это вершина, к которой ведет единственная дуга, исходящая из вершины $v=v_1$; если v_2—операторная вершина или выход, то маршрут (1) построен и $v'=v_2$; если v_2—предикатная вершина, и ей сопоставлено множество α_{v_2}, то из v_2 идем дальше по отмеченной дуге в случае $\Delta \in \alpha_{v_2}$ и по неотмеченной—в противном случае; точно так же поступаем при переходе через любую предикатную вершину маршрут (1) считаем построенным, как только придем в операторную вершину (или выход) или такую предикатную вершину, которая совпадает с одной из уже пройденных вершин.

1.7. Схеме $\mathfrak{M}$ и ее операторной вершине v сопоставим множество конфигураций $K(\mathfrak{M}, v)$; по определению, конфигурация

$$x = \begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 \cdots \Delta_t \\ A_{j_1} & A_{j_2} \cdots A_{j_t} \end{matrix}; \quad t \geqslant 0$$

принадлежит множеству $K(\mathfrak{M}, v)$ в том и только том случае, если по формулам

$$v_1 = v,$$

$$v_i = p(v_{i-1}, \Delta_{i-1}),\ i = 2, 3, \cdots, t \tag{1'}$$

может быть построена последовательность операторных вершин (вход схемы допускается только в качестве вершины v_1) $v_1, v_2, \cdots, v_t$, и при этом каждой вершине v_i будет соответствовать именно оператор A_{j_i}. Заметим, что любому множеству $K(\mathfrak{M}, v)$ принадлежит пустая конфигурация Λ.

Пусть $x \in K(\mathfrak{M}, v)$; сопоставим x последовательность вершины $l(\mathfrak{M}, v, x) = v_1, v_2, \cdots, v_t$, построенную по формулам (1′), и вершину $v_{t+1} = (p(v_t, \Delta_t)$; о ней будем говорить, как о вершине, в которую приводит конфигурация. Если $x = \Lambda$, то $l(\mathfrak{M}, v, x) = v$ и $v_{t+1} = v$.

1.8. Пусть v_0 — вход схемы $\mathfrak{M}$, v^* — ее выход; обозначим через $K^*(\mathfrak{M})$ подмножество всех таких конфигураций множества $K(\mathfrak{M}, v_0)$, которые приводят в выход v^* схемы $\mathfrak{M}$.

Схемы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ назовем **эквивалентными**, если

$$K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2);$$

отношение эквивалентности между схемами $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ будем записывать в виде $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}_2$.

§ 2. Проблема эквивалентности схем алгоритмов

2.1. Каждая конфигурация x представляет собой слово в алфавите $A \times \Gamma$, если x представить в виде конкатенации слов y и z: $x=yz$, то y и z тоже будут конфигурациями. Пусть $x \in K(\mathfrak{M}, v)$ и $x=yz$; тогда

$$y \in K(\mathfrak{M}, v),$$
$$z \in K(\mathfrak{M}, v'),$$

где v' — вершина, в которую приводит конфигурация y. При этом конфигурации z и x приводят в одну и ту же вершину.

2.2. Полагаем, что фиксированное нами распределение сдвигов имеет ранг ε.

Лемма 1. *Пусть $x \in K(\mathfrak{M}, v)$, последовательность $l(\mathfrak{M}, v, x)$ содержит ξ попарно различных операторных вершин и $d[x] > \xi\varepsilon+1$; тогда конфигурация x представима в виде yzw с непустым z и такими y и w, что $yw \in K(\mathfrak{M}, v)$ и конфигурация yw приводит в ту же вершину и с тем же элементом Δ, что и конфигурация x.*

Доказательство. Так как длина $l(\mathfrak{M}, v, x)$ больше числа $\xi\varepsilon+1$ и $l(\mathfrak{M}, v, x)$ содержит ξ попарно различных операторных вершин, то найдется операторная вершина v', которая встречается в $l(\mathfrak{M}, v, x)$ больше, чем ε раз. Пусть последовательность индексов

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \quad (k > \varepsilon) \tag{2}$$

фиксирует места всех вхождений вершины v' в $l(\mathfrak{M}, v, x)$. Если x имеет вид

$$\begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 \cdots & \Delta_t \\ A_{j_1} & A_{j_2} & A_{j_t} \end{matrix},$$

то последовательностью (2) определяется последовательность пар

$$(\Delta_{i_1-1}, \Delta_{i_1}), \ (\Delta_{i_2-1}, \Delta_{i_2}), \cdots (\Delta_{i_k-1}, \Delta_k); \tag{3}$$

в каждой паре, принадлежащей (3), первая компонента есть элемент, с которым мы вошли в вершину v', а вторая компонента есть элемент, с которым мы вышли из вершины v'. Каким бы ни был оператор A_m, сопоставленный вершине v', так как $\varepsilon_m \leqslant \varepsilon$, а $k > \varepsilon$, то в (2) найдутся такие пары ν и ν', где $1 \leqslant \nu < \nu' \leqslant k$, что

$$\Delta_{i_{\nu'}} \in s_m(\Delta_{i_\nu-1}).$$

Легко проверить, что требования леммы будут удовлетворены, если слово z выбрать следующим образом:

$$z = \begin{matrix} \Delta_{i_\nu} & \Delta_{i_\nu+1} \cdots \cdot \Delta_{i_{\nu'}-1} \\ A_{j_\nu} & A_{j_{i_\nu+1}} \cdots A_{j_{\nu'-1}} \end{matrix}.$$

Лемма доказана.

2.3. Рассмотрим схемы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$.

Лемма 2. *Пусть* $x \in K(\mathfrak{M}_1, v_1) \cap K(\mathfrak{M}_2, v_2)$, *последовательности* $l(\mathfrak{M}_1, v_1, x)$ *и* $l(\mathfrak{M}_2, v_1, x)$ *содержат* ξ_1, *и соответственно* ξ_2 *попарно различных операторных вершин, и длина конфигурации* x *превосходит число* $\xi_1\xi_2\varepsilon + 1$; *тогда конфигурация* x *может быть представлена в виде* yzw *с непустым* z *и такими* y *и* w, *что* $yw \in K(\mathfrak{M}_1, v_1) \cap K(\mathfrak{M}_2, v_2)$ *и конфигурация* yw *в каждой из схем* $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$ *приводит в ту же вершину и с тем же элементом* Δ, *что и конфигурация* x.

Доказательство леммы 2 в идейном отношении повторяет доказательство леммы 1; роль вершины v' здесь будет играть пара вершин (v_1', v_2'), где v_1' принадлежит схеме $\mathfrak{M}_1$, а v_2' — схеме $\mathfrak{M}_2$.

2.4. Введем обозначение

$$K_t^*(\mathfrak{M}) = \{x \in K^*(\mathfrak{M}) / d[x] \leqslant t\}.$$

Справедлива

Теорема 1. *Если ранг распределения сдвигов есть* ε, *а схемы* $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$ *имеют соответственно* ν_1 *и* ν_2 *операторных вершин, то*

$$K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2) \rightleftarrows K_\tau^*(\mathfrak{M}_1) = K_\tau^*(\mathfrak{M}_2),$$

где $\tau = \nu_1\nu_2\varepsilon + \varepsilon \cdot \max(\nu_1, \nu_2) + 2$.

Доказательство. Импликация

$$K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2) \to K_\tau^*(\mathfrak{M}_1) = K_\tau^*(\mathfrak{M}_2)$$

очевидна.

Предположим, что утверждение

$$K_\tau^*(\mathfrak{M}_1) = K_\tau^*(\mathfrak{M}_2) \to K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2)$$

неверно. Пусть имеются конфигурации, принадлежащие множеству $K^*(\mathfrak{M}_1)$ и не принадлежащие множеству $K^*(\mathfrak{M}_2)$. Найдем среди них конфигурацию с наименьшей длиной; пусть это будет x; ясно, что $d[x] > \tau$. В конфигурации x выделим максимальное по длине начало y, которое представляет собой конфигурацию, одновременно принадлежащую множествам $K(\mathfrak{M}_1, v_0')$ и $K(\mathfrak{M}_2, v_0'')$ (здесь v_0' и v_0'' — входы схем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$), и запишем x в виде

$$x = yzw,$$

где $d[z] = 1$. Заметим, что если конфигурация y в схеме $\mathfrak{M}_2$ приводит в операторную вершину v'', то множеству $K(\mathfrak{M}_2, v'')$ не принадлежат ни конфигурация z, ни любое ее допустимое продолжение.

Убедимся в том, что $d[y] \leqslant \nu_1\nu_2\varepsilon + 1$. Действительно, в противном случае, применяя лемму 2, мы получим из конфигурации y конфигурацию y'; $x' = y'zw$ будет принадлежать множеству $K^*(\mathfrak{M}_1)$ и $d[x'] < d[x]$; но неравенство $d[x'] < \tau + 1$ невозможно, так как x' не может принадлежать множеству $K^*(\mathfrak{M}_2)$; вместе с тем, неравенство

$d[x'] > \tau + 1$ тоже невозможно, так как тогда мы войдем в противоречие с предположением о минимальности (по длине) конфигурации x.

Итак, $d[y] \leqslant \nu_1\nu_2\varepsilon + 1$; отсюда

$$d[w] = d[x] - d[y] - 1 > (\nu_1\nu_2\varepsilon + \varepsilon \max(\nu_1, \nu_2) + 2 - (\nu_1\nu_2\varepsilon + 1) - 1 =$$
$$= \varepsilon \max(\nu_1\nu_2) \geqslant \varepsilon\nu_1.$$

Следовательно, применима лемма 1 (недостающая единица компенсируется тем, что конфигурация w наверняка не содержит оператора A_0; согласно лемме, заменим конфигурацию w на w'; $x'' = yzw'$ принадлежит множеству $K^*(\mathfrak{M}_1)$ и $d[x''] < d[x]$; существование конфигурации x'' приводит к противоречию так же, как и существование конфигурации x'.

Теорема доказана.

§ 3. Схемы алгоритмов над интерпретацией

3.1. Будем говорить, что на множествах Γ и A задана **интерпретация**

$$J = (M, \{\varphi_i\}, \{M_\Delta\}),$$

если

1) дано множество M элементов произвольной природы;

2) каждому оператору A_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, сопоставлено отображение φ_i множества M в себя;

3) каждому элементу $\Delta \in \Gamma$ сопоставлено подмножество $M_\Delta \subseteq M$, и эти подмножества в совокупности удовлетворяют двум требованиям

$$\forall_{\Delta, \Delta' \in \Gamma} [\Delta \neq \Delta' \rightarrow M_\Delta \cap M_{\Delta'} = \varnothing],$$

$$\bigcup_{\Delta \in \Gamma} M_\Delta = M.$$

Задание интерпретации J индуцирует отображение δ множества M в множество Γ, элементу $m \in M$ соответствует в Γ тот единственный элемент Δ, который определяется отношением $m \in M_\Delta$.

Интерпретацию J назовем **допустимой** для распределения сдвигов $S = \langle s_1, s_2, \cdots, s_n \rangle$, если отображения φ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, обладают свойством

$$\forall_{m \in M} [m \in M_\Delta \rightarrow \varphi_i(m) \in \bigcup_{\Delta' \in s_i(\Delta)} M_{\Delta'}].$$

Множество всех интерпретаций, допустимых для распределения сдвигов S, обозначим через $I(S)$.

3.2. Пусть $\mathfrak{M}$ — схема алгоритма над алфавитами A и Γ; схему $\mathfrak{M}$, рассматриваемую при распределении сдвигов S и интерпретации $J \in I(S)$, назовем **интерпретированной** и будем обозначать через $J\mathfrak{M}$.

Опишем алгоритм выполнения интерпретированной схемы $J\mathfrak{M}$ для $m \in M$. Он состоит в путешествии по схеме $\mathfrak{M}$, которое начинается с того, что с элементом m мы движемся в схеме $\mathfrak{M}$ по дуге, исходящей из ее входа. Пусть в процессе путешествия по схеме $\mathfrak{M}$

мы с элементом m' попали на дугу, ведущую в вершину v'. Если v'—выход схемы, то процесс путешествия по $\mathfrak{M}$ закончен; если v' — операторная вершина и ей сопоставлен оператор A_i, то выйдем из вершины v' по единственной исходящей из нее дуге и отправимся дальше с элементом $\varphi_i(m')$; если же v'—предикатная вершина, то из вершины v' мы выйдем с тем же элементом m', выбирая из двух исходящих из v' дуг одну по правилу: пусть $\alpha \subseteq \Gamma$ — сопоставленное вершине v' множество; если $\delta(m') \in \alpha$, то выберем отмеченную дугу, в противном случае—неотмеченную.

Маршрут путешествия по схеме $J\mathfrak{M}$ однозначно определяется выбором исходного элемента m и может быть зафиксирован последовательностью пройденных операторных вершин, включающей в себя вход и, может быть, выход

$$v_1, v_2, \cdots, v_l, \cdots. \tag{4}$$

Каждому началу $v_1, \cdots, v_l$ маршрута (4), где v_l — вершина, отличная от выхода схемы $\mathfrak{M}$, сопоставим так называемую *i*-конфигурацию

$$\begin{matrix} m = m_1 & m_2 & \cdots & m_{l-1} & m_l \\ A_0 & A_{j_2} & \cdots & A_{j_l} & \end{matrix}, \tag{5}$$

выписывая в нижней строке операторы, сопоставленные вершинам v_1, $v_2, \cdots, v_l$, а в верхней строке— элементы множества M, с которыми мы выходим из вершин $v_1, \cdots, v_l$. Если вершина v_{l+1} представляет собой выход схемы $\mathfrak{M}$, то *i*-конфигурацию (5) будем называть *конечной*, обозначать через $(J\mathfrak{M}, m)$, а элемент m_l будем рассматривать как результат применения схемы $\mathfrak{M}$ к m и записывать в виде $J\mathfrak{M}(m)$.

Сдвоенную последовательность

$$\begin{matrix} \delta(m_1) & \delta(m_2) \cdots & \delta(m_l) \\ A_0 & A_{j_2} \quad \cdots & A_{j_l} \end{matrix},$$

полученную из конечной *i*-конфигурации (5), условимся обозначать через $\delta(J\mathfrak{M}, m)$. Легко видеть, что $\delta(J\mathfrak{M}, m)$ есть *i*-конфигурация, принадлежащая множеству $K^*(\mathfrak{M})$.

3.3. Интерпретированные схемы $J\mathfrak{M}_1$ и $J\mathfrak{M}_2$ назовем *эквивалентными* $(J\mathfrak{M}_1 \sim J\mathfrak{M}_2)$, если

$$\underset{m \in M}{\forall} [J\mathfrak{M}_1(m) = J\mathfrak{M}_2(m)].$$

Легко видеть, что

$$K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2) \to \underset{J \in I(S)}{\forall} [J\mathfrak{M}_1 \sim J\mathfrak{M}_2].$$

Пусть R — некоторый класс схем алгоритмов. Интерпретацию $J^* \in I(S)$ назовем *универсальной* для класса R, если для любых схем $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \in R$ справедливо утверждение

$$J^*\mathfrak{M}_1 \sim J^*\mathfrak{M}_2 \to K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2).$$

3.4. Условимся называть мощностью интерпретации $J=(M, \{\varphi_i\}, \{M_\Delta\})$ мощность множества M.

Теорема 2. *Существует счетная интерпретация, универсальная для всех схем, построенных в алфавитах A и Γ и рассматриваемых при распределении сдвигов S.*

Доказательство. Рассмотрим множество K^* всех конфигураций, начинающихся оператором A_0 (распределение сдвигов S предполагается фиксированным). Легко видеть, что для всякой схемы

$$K^*(\mathfrak{M}) \subseteq K^*.$$

По каждой конфигурации $x \in K^*$ построим конечную интерпретацию $J^x=(M^x, \{\varphi_i^x\}, \{M_\Delta^x\})$, обладающую свойством: множеству M^x принадлежит элемент m_x, такой что для всякой схемы $\mathfrak{M}$

$$x \in K^*(\mathfrak{M}) \to \delta(J^x\,\mathfrak{M}, m_x) = x.$$

Отобразим множество Γ взаимно однозначным образом на некоторое множество $\overline{M}$; элемент $\overline{m} \in \overline{M}$, сопоставленный в этом отображении элементу $\Delta \in \Gamma$, будем обозначать через $\overline{m}(\Delta)$, а Δ, соответствующий элементу $\overline{m}$, через $\Delta(\overline{m})$.

В каждом из множеств $s_i(\Delta)$, $\Delta \in \Gamma$ $i=1, 2, \cdots, n$, выберем по одному представителю и обозначим его через $\psi_i(\Delta)$.

Пусть рассматриваемая нами конфигурация x имеет вид:

$$x = \begin{matrix} & \Delta_1 & \Delta_2 & \cdot\;\cdot\;\cdot & \Delta_{t-1} & \Delta_t \\ A_0 & A_{j_1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & A_{j_{t-1}} & A_{j_t} & \end{matrix}; \; t>0,$$

возьмем t-элементное упорядоченное множество

$$\overline{M}^x = \{m_1, m_2, \cdots, m_t\},$$

такое, что $\overline{M}^x \cap \overline{M} = \varnothing$; i-ому элементу $m_i \in \overline{M}^x$ сопоставим i-ый элемент Δ_i верхней строки конфигурации x ($i=1, \cdots, t$); в полученном отображении множества $\overline{M}^x$ в множество Γ (обозначим его через δ^x) найдем прообраз элемента $\Delta \in \Gamma$; пусть это будет $\overline{M}_\Delta^x$.

Положим

$$M^x = \overline{M}^x \cup \overline{M},$$

$$M_\Delta^x = \overline{M}_\Delta^x \cup \{\overline{m}(\Delta)\},\ \Delta \in \Gamma.$$

Легко видеть, что

$$\forall_{\Delta_1\Delta_2 \in \Gamma} [\Delta_1 \neq \Delta_2 \to M_{\Delta_1}^x \cap M_{\Delta_2}^x = \varnothing],$$

$$\bigcup_{\Delta \in \Gamma} M_\Delta^x = M^x.$$

Для построения отображения $\varphi_i^x\ M^x \to M^x$ ($i=1, \cdots, n$) рассмотрим последовательность

$$a_x = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & \cdot\;\cdot\;\cdot & m_{t-1} & m_t \\ A_0 & A_{j_1} & \cdot\;\cdot\;\cdot & A_{j_{t-1}} & A_{j_t} & \end{matrix},$$

полученную из конфигурации x заменой Δ_k на m_k, $k=1,\cdots,t$. Выберем из α_x все фрагменты вида

$$\begin{matrix} m_l & m_{l+1} \\ & A_l \end{matrix};$$

для элементов m_l, входящих в такие фрагменты, полагаем

$$\varphi_i^x(m_l)=m_{l+1},$$

если же $m\in M^*$ не совпадает ни с одним из перечисленных элементов m_l, то полагаем

$$\varphi_i^x(m)=\begin{cases}\overline{m}(\psi_i(\delta^x(m))), & m\in\overline{M}^x\\ \overline{m}(\psi_i(\Delta(m))), & m\in\overline{M}\end{cases}.$$

Допустимость интерпретации J^x для распределения сдвигов S следует из ее построения. Остановимся на свойствах этой интерпретации.

Пусть $\mathfrak{M}$—произвольная схема и при выполнении $J^x\mathfrak{M}$ для элемента $m\in\overline{M}^x$ получена конечная i-конфигурация $(J^x\mathfrak{M},m)$. Тогда, если последний элемент верхней строки в $(J^x\mathfrak{M},m)$ принадлежит множеству $\overline{M}^x$, то и все элементы верхней строки $(J^x\mathfrak{M},m)$ принадлежат множеству $\overline{M}^x$ и их индексы составляют строго возрастающую последовательность.

Если же схема $\mathfrak{M}$ такова, что $x\in K^*(\mathfrak{M})$, то

$$(J^x\mathfrak{M},m_1)=\alpha_x,$$

$$J^x\mathfrak{M}(m_1)=m_t,$$

$$\delta(J^x\mathfrak{M},m_1)=x,$$

т. е. элемент m_1 можно взять как m_x,

Итак, каждой конфигурации $x\in K^*$ мы сопоставили интерпретацию J^x. Будем предполагать, что выбор множеств $\overline{M}^x$ был проведен следующим образом:

$$\forall_{x,x'\in K^*}[x\neq x'\to\overline{M}^x\cap\overline{M}^{x'}=\varnothing];$$

и из интерпретаций J^x, $x\in K^*$ синтезируем искомую интерпретацию J^*,

$$M^*=\bigcup_{x\in K^*}M^x,$$

$$M_\Delta^*=\bigcup_{x\in K^*}M_\Delta^x;\ \Delta\in\Gamma,$$

$$\varphi_i^*=\bigcup_{x\in K^*}\varphi_i^x,$$

здесь φ_i^* и φ_i^x отождествляются со своими графиками.

Интерпретация J^* является допустимой для распределения сдвигов S и обладает свойством: какими бы ни были схема $\mathfrak{M}$ и элемент $m\in M^x$,

$$(J^* \mathfrak{M}, m) = (J^x \mathfrak{M}, m).$$

Счетность интерпретации J^* не вызывает сомнений. Покажем, что для любых схем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$

$$J^*\mathfrak{M}_1 \sim J^*\mathfrak{M}_2 \to K^* (\mathfrak{M}_1) = K^* (\mathfrak{M}_2).$$

Пусть $x \in K^* (\mathfrak{M}_1)$; тогда $x \in K^* (\mathfrak{M}_2)$. Действительно

$$J^* \mathfrak{M}_1 (m_x) = J^* \mathfrak{M}_2 (m_x), \tag{6}$$

так как i-конфигурация $(J^*\mathfrak{M}_1, m_x)$ заканчивается элементом множества $\overline{M}^x$, то равенство (6) влечет за собой равенство

$$(J^* \mathfrak{M}_1, m_x) = (J^* \mathfrak{M}_2, m\ );$$

последнее означает, что

$$x = \delta (J^*\mathfrak{M}_1, m_x) = \delta (J^* \mathfrak{M}_2, m_x) \in K^* (\mathfrak{M}_2).$$

Теорема доказана.

3.5. Теорема 3. *Каким бы ни было распределение сдвигов S, не существует конечной интерпретации J, которая была бы универсальной для всех схем над A и Γ при этом распределении сдвигов.*

Доказательство. Предположим, что J—некоторая конечная интерпретация, и построим такие схемы $\mathfrak{M}_1^0$ и $\mathfrak{M}_2^0$, что

$$(J\mathfrak{M}_1^0 \sim J\mathfrak{M}_2^0) \wedge (K^* (\mathfrak{M}_1^0) \neq K^* (\mathfrak{M}_2^0)).$$

Пусть $J = (M, \{\varphi_i\}, \{M_\Delta\})$; рассмотрим отображение $\varphi_1 \colon M \to M$, для каждого элемента $m \in M$ построим последовательность

$$m = \varphi_1^0 (m),\ \varphi_1^1 (m),\ \varphi_1^2 (m), \cdots,\ \varphi_L^k (m), \cdots, \tag{7}$$

здесь $\varphi_1^k (m) = \underbrace{\varphi_1\varphi_1 \cdots \varphi_1}_{k \text{ раз}} (m)$, $k > 0$. В силу конечности множества M последовательность (7) будет периодической с некоторым предпериодом; пусть $j (m) > 0$ и $l (m) > 1$—наименьшие из чисел, для которых

$$\varphi_1^{j(m)} (m) = \varphi_1^{j(m) + l(m)} (m).$$

Тогда число $n_1 = \max\limits_{m \in M} j (m)$ обладает свойством

$$\underset{m \in M}{\forall} [\varphi_1^{n_1} (m) = \varphi_1^{n_1 + l(m)}(m)],$$

а число n_2, равное наименьшему общему кратному всех чисел множества $\{l (m),\ m \in M\}$—свойством

$$\underset{m \in M}{\forall} [\varphi_1^{n_1} (m) = \varphi_1^{n_1 + kn_2}(m)],\ k = 1, 2, \cdots. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь схемы

$$\mathfrak{M}_i^\circ \quad \circ\!\to \underbrace{\boxed{A_1} \to \boxed{A_1} \to \cdots \to \boxed{A_1}}_{} \to\!\circ\ ,\ i = 1, 2,$$

N_i — операторных вершин,

где $N_1 = n_1 + n_2$, $N_2 = n_1 + 2n_2$. Легко видеть, что

$$K^* (\mathfrak{M}_1^0) \cap K^* (\mathfrak{M}_2^0) = \varnothing;$$

вместе с тем, на основании (8)

$$\underset{m \in M}{\forall} [J\mathfrak{M}_1^0 (m) = J\mathfrak{M}_2^0 (m)].$$

Теорема доказана.

3.6. Обозначим через $R^{(\nu)}$ множество схем, содержащих не более чем ν операторных вершин каждая.

Теорема 4. *Каким бы ни было натуральное ν и распределение сдвигов S, существует конечная интерпретация $J^{\bullet}_{\nu}$, универсальная для схем класса $R^{(\nu)}$ при распределении сдвигов S.*

Доказательство. Обозначим через ε ранг распределения сдвигов S; и пусть $\tau = \nu^2 \varepsilon + \nu\varepsilon + 2$; тогда по теореме 1 для любых схем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ из R^{ν}

$$K^* (\mathfrak{M}_1) = K^* (\mathfrak{M}_2) \leftrightarrows K^{\bullet}_{\tau} (\mathfrak{M}_1) = K^{\bullet}_{\tau} (\mathfrak{M}_2).$$

Рассмотрим множество

$$K^{\bullet}_{\tau} = \{x \in K^* / d [x] \leqslant \tau\}.$$

Интерпретация $J^{\bullet}_{\tau}$ строится совершенно так же как интерпретация J^* в доказательстве теоремы 2, только в нашем случае учитываются не все конфигурации x, а лишь принадлежащие множеству $K^{\bullet}_{\tau}$, иными словами:

$$M^{\bullet}_{\tau} = \bigcup_{x \in K^{\bullet}_{\tau}} M^x,$$

$$M^{\bullet}_{\tau, \Delta} = \bigcup_{x \in K^{\bullet}_{\tau}} M^x_{\Delta}, \quad \Delta \in \Gamma,$$

$$\varphi^{\bullet}_{\tau, i} = \bigcup_{x \in K^{\bullet}_{\tau}} \varphi^x_i, \quad i = 1, 2, \cdots n;$$

число элементов множества $K^{\bullet}_{\tau}$ конечно, отсюда и универсальная интерпретация $J^{\bullet}_{\tau}$ будет конечной.

Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступило 12.VII. 1971

Գ. Ն. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Հաշվեկանոնների սխեմաների ունիվերսալ մեկնարկներ *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են Յանովի օպերատոր սխեմաների ընդհանրացումը հանդիսացող՝ հաշվեկանոնների (ալգորիթմների) սխեմաներ։ Սխեմայի տարրերի մեկնարկումը (ինտերպրետացիան) այն վեր է ածում հաշվեկանոնի, վերջինս բնորոշվում է իրենով իրագործվող ֆունկցիայով։ Հնարավոր են սխեմայի տարբեր մեկնարկումներ։ Դրանցից ունիվերսալ է կոչվում հետևյալ հատկությամբ օժտվածը՝ երկու սխեմաներով իրագործվող ֆունկցիաների՝ սրանց ունիվերսալ մեկնարկման դեպքում համընկնելը բխեցնում է այդ նույն սխեմաներով իրագործվող ֆունկցիաների համընկնումը նաև կամայական այլ մեկնարկման դեպքում։ Տրված մեկնարկի

ունիվերսալ լինելու հատկությունը կախված է նրանից, թե սխեմաների ինչ դաս է դիտարկվում։ Աշխատության մեջ տրվում են հաշվեկանոնների բոլոր սխեմաների համար ունիվերսալ՝ թվարկելի մեկնարկի և յուրաքանչյուրը կանխադիր թվից ոչ ավել օպերատորներ օգտագործող սխեմաների համար ունիվերսալ՝ վերջավոր մեկնարկների կառուցման եղանակներ. ինչպես նաև ապացուցվում է բոլոր սխեմաների համար ունիվերսալ՝ վերջավոր մեկնարկի չգոյությունը։

G. N. PETROSSIAN. *The universal interpretation of algorithmic schemes*
(summary)

The article is on the algorithmic schemes representing a generalization of Yanov's operator schemes. The interpretation of the elements of the scheme converts the latter into an algorithm characterized by the selfrealisable function. The interpretation is called universal if coincidence of functions for two schemes under universal interpretation induces coincidence under any other interpretation. Some ways of constructing countable interpretations for general schemes and finite interpretations for schemes with restrictions are proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. И. Янов*. О логических схемах алгоритмов, сб. „Проблемы кибернетики", вып. 1, 1958, 57—127.
2. *Р. И. Подловченко, Г. Н. Петросян, В. Е. Хачатрян*. Интерпретации схем алгоритмов и различные типы отношений эквивалентности между схемами, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", VII, № 2, 1972, 140—151.