ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 3, 1972 Математика

Е. Я. МЕЛАМУД

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ДАРЛИНГТОНА

В теории цепей широко известна теорема Дарлингтона [1] о реализации произвольной рациональной позитивной вещественной функции $z(\lambda)$ как полного сопротивления двухполюсника, представляющего собою четырехполюсник без потерь, нагруженный со стороны выходных зажимов на одно активное сопротивление R. Эта теорема допускает следующую эквивалентную формулировку: любая рациональная позитивная вещественная функция $z(\lambda)$ представима в виде дробно линейного преобразования

$$z(\lambda)=\frac{a(\lambda)R+b(\lambda)}{c(\lambda)R+d(\lambda)},$$

где $R>0$, а матрица $A(\lambda)=\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda)\end{pmatrix}$ рациональна и обладает следующими свойствами:

1. $A^*(\lambda)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}A(\lambda)-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\geqslant 0$ при $\operatorname{Re}\lambda>0$;

2. $A^*(\lambda)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}A(\lambda)-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0$ при $\operatorname{Re}\lambda=0$;

3. $\overline{A(\bar\lambda)}\equiv A(\lambda)$;

4. $\det A(\lambda)\equiv 1$.

В настоящей работе получены аналогичные теоремы для позитивных матриц-функций.

Определение. Аналитическая матрица-функция $Z(\lambda)$ называется **позитивной**, если

$$Z(\lambda)+Z^*(\lambda)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\lambda>0.$$

Теорема 1. *Произвольная рациональная позитивная матрица-функция $Z(\lambda)$ порядка n представима в виде дробно линейного преобразования*

$$Z(\lambda)=[a(\lambda)R+b(\lambda)][c(\lambda)R+d(\lambda)]^{-1}, \tag{1}$$

где R — постоянная позитивная матрица порядка n, а матрица-функция порядка $2n$ $\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda)\end{pmatrix}=A(\lambda)$ рациональна и обладает свойствами:

$$\text{I.}\quad A^*(\lambda)\mathrm{J}A(\lambda)-\mathrm{J}>0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\lambda>0,\ \mathrm{J}=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$$

(J — *несжимаемость в правой полуплоскости*);

$$\text{II.}\quad A^*(\lambda)\,\mathrm{J}\,A(\lambda)-\mathrm{J}=0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\lambda=0$$

(J — *унитарность на мнимой оси*).

Теорема 2. *Произвольная рациональная позитивная матрица-функция* $Z(\lambda)$, *вещественная на вещественной оси* $(\overline{Z(\bar{\lambda})}\equiv Z(\lambda))$, *представима в виде дробно линейного преобразования* (1), *где* R — *постоянная позитивная вещественная матрица, а* $A(\lambda)$ *обладает свойствами* I, II *и свойством*

$$\text{III.}\quad \overline{A(\bar{\lambda})}\equiv A(\lambda).$$

Теорема 3. *Произвольная рациональная позитивная симметрическая матрица-функция* $Z(\lambda)$ *представима в виде дробно линейного преобразования* (1), *где* R — *постоянная позитивная симметрическая матрица, а* $A(\lambda)$ *обладает свойствами* I, II *и свойством симплектичности:*

$$\text{IV.}\quad A'(\lambda)\,j\,\mathrm{J}A(\lambda)\equiv j\mathrm{J},\qquad j=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}.$$

Теорема 4. *Произвольная рациональная матрица-функция* $Z(\lambda)$, *удовлетворяющая условиям:*

$$1^\circ.\ Z(\lambda)+Z^*(\lambda)>0,\ \operatorname{Re}\lambda>0;$$

$$2^\circ.\ \overline{Z(\bar{\lambda})}=Z(\lambda);$$

$$3^\circ.\ Z'(\lambda)=Z(\lambda)$$

представима в виде дробно линейного преобразования (1), *где* R — *постоянная вещественная симметрическая неотрицательная матрица, а* $A(\lambda)$ *обладает свойствами* I, II, III, IV.

В работах В. П. Потапова и И. В. Ковалишиной [2, 3] впервые была детально изучена мультипликативная структура матриц-функций, обладающих свойствами I — IV (реактивных матриц-функций) и доказано, что произвольная рациональная реактивная матрица-функция представима в виде произведения конечного числа примарных реактивных множителей. Этот результат, имеющий принципиальное значение для теории синтеза электрических цепей, позволил А. В. Ефимову [5] доказать, что каждая рациональная реактивная матрица-функция $A(\lambda)$ порядка $2n$ есть A-матрица некоторого линейного пассивного $4n$-полюсника без потерь. Поэтому теорема 4 есть обобщение теоремы Дарлингтона и означает, что произвольная рациональная позитивная вещественная симметрическая матрица-функция $Z(\lambda)$ порядка n есть матрица импеданса $2n$-полюсника, представляющего собою $4n$-полюсник без потерь, n пар выходных зажимов которого замкнуты на активные сопротивления (из которых некоторые могут равняться нулю). Теорема 2 имеет, по-видимому, аналогичный смысл для цепи, содержащей также гираторы.

Мы приведем здесь подробное доказательство теорем 2 и 4 (доказательство теорем 1 и 3 не содержит новых принципиальных трудностей). При этом основную роль будет играть теорема о факторизации рациональной неотрицательной матрицы-функции.

Теорема о факторизации

Пусть $f(i\tau)$ $(-\infty < \tau < +\infty)$—неотрицательная матрица-функция

Определение. Если существует голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ матрица-функция $X(\lambda)$, граничные значения которой $X(i\tau)$ почти всюду удовлетворяют условию

$$f(i\tau) = X(i\tau)\, X^*(i\tau),$$

то $X(\lambda)$ называется решением левой факторизационной задачи для $f(i\tau)$.

Если существует голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ матрица-функция $Y(\lambda)$, граничные значения которой $Y(i\tau)$ почти всюду удовлетворяют условию

$$f(i\tau) = Y^*(i\tau)\, Y(i\tau),$$

то $Y(\lambda)$ называется решением правой факторизационной задачи для $f(i\tau)$.

Пусть $f(i\tau)$ рациональна относительно $i\tau$. Известно, что рациональная матрица-функция имеет постоянный ранг m всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Будем называть m рангом матрицы $f(i\tau)$.

Теорема о факторизации. (Доказательство см., например, в [6]). Если $f(i\tau)$— рациональная относительно $i\tau$ неотрицательная матрица-функция порядка n, ранга m, то существуют рациональные решения левой и правой факторизационных задач

$$X(\lambda) = \left\| x_{kj}(\lambda) \right\|_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \quad \text{и} \quad Y(\lambda) = \left\| y_{kj}(\lambda) \right\|_{k=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$$

полного ранга. Если, кроме того, $\overline{f}(-i\tau) = f(i\tau)$, то эти решения могут быть выбраны вещественными на вещественной оси $(\overline{X(\overline{\lambda})} = X(\lambda)$, $\overline{Y(\overline{\lambda})} = Y(\lambda))$.

Некоторые свойства рациональных позитивных вещественных матриц-функций

Определение. Аналитическую матрицу-функцию $Z(\lambda)$ будем называть *позитивной вещественной*, если она удовлетворяет условиям:

1°. $Z(\lambda) + Z^*(\lambda) \geqslant 0$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, 2°. $\overline{Z(\overline{\lambda})} \equiv Z(\lambda)$.

Впредь будут рассматриваться лишь рациональные позитивные вещественные матрицы-функции. Перечислим некоторые их свойства. (Для скалярных позитивных вещественных функций эти свойства широко известны. Перенесение их на матрицы-функции не вызывает каких-либо принципиальных трудностей).

a) Рациональная позитивная матрица-функция $Z(\lambda)$ не имеет полюсов в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

b) На мнимой оси рациональная позитивная матрица-функция $Z(\lambda)$ может иметь лишь простые полюсы; соответствующие вычеты суть эрмитовы неотрицательные матрицы.

c) Если $Z(\lambda)$ — позитивная вещественная матрица-функция, $i\tau_0$ — ее полюс, A — соответствующий вычет, то точка $-i\tau_0$ также является полюсом, а соответствующий вычет есть $\overline{A}$.

d) Позитивная вещественная рациональная матрица-функция представима в виде

$$Z(\lambda) = Z_0(\lambda) + Z_1(\lambda), \tag{2}$$

где $Z_0(\lambda) = A_\infty \lambda + \dfrac{A_0}{\lambda} + \sum\limits_{k=1}^{p} \left(\dfrac{A_k}{\lambda - i\tau_k} + \dfrac{\bar{A}_k}{\lambda + i\tau_k} \right)$ — позитивная вещественная матрица-функция, удовлетворяющая условию

$$Z_0(\lambda) + Z_0^{*}(\lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\lambda = 0$$

(реактансная матрица-функция), а $Z_1(\lambda)$ — рациональная позитивная вещественная матрица-функция, не имеющая полюсов на мнимой оси.

e) Позитивная вещественная симметрическая матрица-функция $Z(\lambda)$ представима в виде (2), где $Z_0(\lambda)$ — рациональная позитивная вещественная симметрическая реактансная матрица-функция, а $Z_1(\lambda)$ — рациональная позитивная вещественная симметрическая матрица-функция, не имеющая полюсов на мнимой оси.

Представление рациональной позитивной вещественной матрицы-функции в виде дробно линейного преобразования

Теорема. *Произвольная рациональная позитивная вещественная матрица-функция $Z(\lambda)$ порядка n представима в виде дробно линейного преобразования*

$$Z(\lambda) = [a(\lambda) R + b(\lambda)][c(\lambda) R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $R = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix}$, $m = \mathrm{rang}\,[Z(\lambda) + Z'(-\lambda)]$, *а матрица-функция* *порядка* $2n \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} = A(\lambda)$ *рациональна и удовлетворяет условиям**

$$\text{I. } A^*(\lambda)\,JA(\lambda) - J > 0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\lambda > 0;$$

$$\text{II. } A^*(\lambda)\,JA(\lambda) - J = 0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\lambda = 0;$$

$$\text{III. } \overline{A(\bar{\lambda})} \equiv A(\lambda).$$

Доказательство. Рассмотрим рациональную матрицу-функцию

$$f(\lambda) = \frac{Z(\lambda) + Z'(-\lambda)}{2},$$

и пусть $\operatorname{rang} f(\lambda) = m$. Очевидно, $0 \leqslant m \leqslant n$. Пусть сначала $m = 0$. В этом случае $Z(\lambda) + Z'(-\lambda) \equiv 0$, откуда, в силу 2°, следует

$$Z(i\tau) + Z^*(i\tau) \equiv 0, \tag{3}$$

то есть $Z(\lambda)$ — реактансная позитивная вещественная матрица-функция. Полагая $R = 0$, имеем

$$Z(\lambda) = [I \cdot R + Z(\lambda)][0 \cdot R + I]^{-1}.$$

Матрица этого дробно линейного преобразования

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} I & Z(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям I—III. Действительно, из 2° следует III, а из 1°, (3) и равенства

$$A^*(\lambda)\,JA(\lambda) - J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z(\lambda) + Z^*(\lambda) \end{pmatrix}$$

следуют I и II. Таким образом, при $m = 0$ теорема тривиальна. Это дает основание в дальнейшем считать $0 < m \leqslant n$.

Представим $Z(\lambda)$ в виде (2). Очевидно

$$Z(\lambda) = [I \cdot Z_1(\lambda) + Z_0(\lambda)][0 \cdot Z_1(\lambda) + I]^{-1}. \tag{4}$$

Так как $Z_0(\lambda)$ — рациональная позитивная вещественная реактансная матрица-функция, то, как и выше, матрица этого дробно линейного преобразования

$$A_0(\lambda) = \begin{pmatrix} I & Z_0(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям I—III.

Теперь вопрос сводится к тому, чтобы показать, что $Z_1(\lambda)$ представима в виде

* Мультипликативная структура матриц-функций, удовлетворяющих условиям I—III, изучена в работах И. В. Ковалишиной и В. П. Потапова [4] и Т. А. Товмасяна [7].

$$Z_1(\lambda) = [\alpha(\lambda) R + \beta(\lambda)][\gamma(\lambda) R + \delta(\lambda)]^{-1}, \tag{4'}$$

где $R = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix}$, а $A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix}$ — рациональная матрица-функция, удовлетворяющая условиям I—III, и к суперпозиции дробно линейных преобразований (4) и (4′). Мы покажем как может быть построена матрица $A_1(\lambda)$.

Так как $Z_0(\lambda) + Z_0^*(\lambda) = 0$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$, то, полагая $\lambda = i\tau$ и используя вещественность $Z_0(\lambda)$, получим $Z_0(i\tau) + Z_0'(-i\tau) = 0$ откуда, в силу аналитичности, вытекает тождество $Z_0(\lambda) + Z_0'(-\lambda) \equiv 0$, и, следовательно

$$f(\lambda) = \frac{Z_1(\lambda) + Z_1'(-\lambda)}{2}.$$

Из вещественности $Z_1(\lambda)$ следует

$$f(i\tau) = \frac{Z_1(i\tau) + Z_1^*(i\tau)}{2}.$$

Таким образом, $f(i\tau)$—рациональная относительно $i\tau$ неотрицательная матрица-функция ранга m, при этом $\overline{f}(-i\tau) = f(i\tau)$.

Матрица-функция $f(\lambda)$ имеет главный минор $M_m(\lambda)$ порядка m, отличный от тождественного нуля. (Действительно, пусть $\operatorname{rang} f(i\tau_0) = m$; так как $f(i\tau_0)$ — эрмитова, то существует главный минор $M_m(i\tau_0) \neq 0$. Соответствующий главный минор $M_m(\lambda)$ матрицы-функции $f(\lambda)$, будучи рациональной функцией отличен от нуля всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек). Не ограничивая общности, будем считать, что $M_m(\lambda)$ находится в левом верхнем углу матрицы $f(\lambda)$.

Пусть $X(\lambda) = \|x_{kj}(\lambda)\|_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ и $Y(\lambda) = \|y_{kj}(\lambda)\|_{k=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$ — рациональные вещественные решения полного ранга соответственно левой и правой факторизационных задач для $f(i\tau)$. Представим их в виде

$$X(\lambda) = \begin{bmatrix} X_{11}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad Y(\lambda) = [Y_{11}(\lambda), \ Y_{12}(\lambda)],$$

где $X_{11}(\lambda)$ и $Y_{11}(\lambda)$ — квадратные матрицы. Так как

$$\det[X_{11}(i\tau) X_{11}^*(i\tau)] = \det[Y_{11}^*(i\tau) Y_{11}(i\tau)] = M_m(i\tau) \not\equiv 0,$$

то $X_{11}(\lambda)$ и $Y_{11}(\lambda)$ — неособенные всюду, за исключением, возможно конечного числа точек.

Выбирая решение $X(\lambda)$ левой факторизационной задачи для $f(i\tau)$, наложим на него следующее важное ограничение:

$X_{11}^{-1}(-\lambda)$ *голоморфна в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > 0$. (*)

(Такой выбор $X(\lambda)$ всегда возможен. Действительно, пусть $\widetilde{X}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{11}(\lambda) \\ \widetilde{X}_{21}(\lambda) \end{bmatrix}$ — рациональное вещественное решение левой

вой факторизационной задачи, причем $\widetilde{X}_{11}^{-1}(-\lambda)$ имеет полюсы в точках $\alpha_1=\bar{\alpha}_1, \cdots, \alpha_l=\bar{\alpha}_l, \alpha_{l+1}, \bar{\alpha}_{l+1}, \cdots, \alpha_N, \bar{\alpha}_N$ правой полуплоскости. Тогда

$$\widetilde{X}_{11}^{-1}(-\lambda)=\frac{Q(\lambda)}{\prod\limits_{l=1}^{l}(\lambda-\alpha_l)^{s_l}\prod\limits_{l=l+1}^{N}[(\lambda-\alpha_l)(\lambda-\bar{\alpha}_l)]^{s_l}},$$

где $Q(\lambda)$ голоморфна при $\operatorname{Re}\lambda>0$. Положим $X(\lambda)=\widetilde{X}(\lambda)\,b(\lambda)$, где

$$b(\lambda)=\frac{\prod\limits_{l=1}^{l}(\lambda-\alpha_l)^{s_l}\prod\limits_{l=l+1}^{N}[\lambda-\alpha_l)(\lambda-\bar{\alpha}_l)]^{s_l}}{\prod\limits_{l=1}^{l}(\lambda+\alpha_l)^{s_l}\prod\limits_{l=l+1}^{N}[\lambda-\alpha_l)(\lambda+\bar{\alpha}_l)]^{s_l}}.$$

Так как $b(\lambda)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости, вещественна на вещественной оси, а на мнимой оси $b(i\tau)\,\overline{b(i\tau)}=1$, то $X(\lambda)$ есть также решение левой факторизационной задачи для $f(i\tau)$, при этом $X_{11}^{-1}(-\lambda)=\dfrac{Q(\lambda)}{\prod\limits_{l=1}^{l}(\lambda+\alpha_l)^{s_l}\prod\limits_{l=l+1}^{N}[(\lambda+\alpha_l)(\lambda+\bar{\alpha}_l)]^{s_l}}$ голоморфна в правой полуплоскости).

Введем теперь в рассмотрение матрицы-функции n-го порядка

$$q_X(\lambda)=\begin{pmatrix} X_{11}^{-1}(\lambda) & 0 \\ -X_{21}(\lambda)\,X_{11}^{-1}(\lambda) & I\end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$p_X(\lambda)=q_X(\lambda)\,Z_1(\lambda), \tag{6}$$

$$q_Y(\lambda)=\begin{pmatrix} Y_{11}^{-1}(\lambda) & -Y_{11}^{-1}(\lambda)\,Y_{12}(\lambda) \\ 0 & I\end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$p_Y(\lambda)=Z_1(\lambda)\,q_Y(\lambda). \tag{8}$$

Имеют место легко проверяемые тождества:

$$q_X(\lambda)\,X(\lambda)=\begin{bmatrix} I_m \\ 0\end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$Y(\lambda)\,q_Y(\lambda)=[I_m,\ 0]. \tag{10}$$

Положим

$$A_1(\lambda)=\begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda)\end{pmatrix},$$

где рациональные матрицы-функции n-го порядка $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\gamma(\lambda)$, $\delta(\lambda)$ определим формулами:

$$\alpha(\lambda)=\frac{p_Y(\lambda)+p'_X(-\lambda)}{2}+I-R,\quad R=\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m}\end{pmatrix},$$

$$\beta(\lambda)=\frac{p_Y(\lambda)-p'_X(-\lambda)}{2},$$

$$\gamma(\lambda)=\frac{q_Y(\lambda)-q'_Y(-\lambda)}{2},$$

$$\delta(\lambda)=\frac{q_Y(\lambda)+q'_X(-\lambda)}{2}.$$

Убедимся, что матрица-функция $Z_1(\lambda)$ представима в виде дробно линейного преобразования (4′). Так как $Z_1(\lambda)$, $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ вещественны на вещественной оси, тождества

$$\frac{Z_1(i\tau)+Z_1^*(i\tau)}{2}\equiv X(i\tau)\,X^*(i\tau)\equiv Y^*(i\tau)\,Y(i\tau) \tag{11}$$

можно переписать так:

$$\frac{Z_1(i\tau)+Z_1'(-i\tau)}{2}\equiv X(i\tau)\,X'(-i\tau)\equiv Y'(-i\tau)\,Y(i\tau),$$

а отсюда, в силу аналитичности, следует

$$\frac{Z_1(\lambda)+Z_1(-\lambda)}{2}\equiv X(\lambda)\,X'(-\lambda)\equiv Y'(-\lambda)\,Y(\lambda). \tag{12}$$

Из (12), в частности, получаем

$$X_{11}(\lambda)\,X_{11}'(-\lambda)\equiv Y_{11}'(-\lambda)\,Y_{11}(\lambda),\quad X_{11}(\lambda)\,X_{21}'(-\lambda)\equiv Y_{11}'(-\lambda)\,Y_{12}(\lambda), \tag{13}$$

откуда вытекает

$$X_{11}^{-1'}(-\lambda)\,X_{21}'(-\lambda)\equiv Y_{11}^{-1}(\lambda)\,Y_{12}(\lambda),$$

поэтому

$$\gamma(\lambda)=\begin{pmatrix}\dfrac{Y_{11}^{-1}(\lambda)-X_{11}^{-1'}(-\lambda)}{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma(\lambda)\,R=\gamma(\lambda)$$

и, следовательно

$$\gamma(\lambda)\,R+\delta(\lambda)=q_Y(\lambda). \tag{14}$$

Далее, используя (6), (8), (12) и (9), получаем

$$\frac{p_Y(\lambda)+p'_X(-\lambda)}{2}=Z_1(\lambda)\frac{q_Y(\lambda)-q'_X(-\lambda)}{2}+\frac{Z_1(\lambda)+Z_1'(-\lambda)}{2}\,q'_X(-\lambda)=$$

$$=Z_1(\lambda)\,\gamma(\lambda)+X(\lambda)\,X'(-\lambda)\,q'_X(-\lambda)=Z_1(\lambda)\,\gamma(\lambda)+X(\lambda)[I_m,\ 0],$$

откуда

$$\alpha(\lambda)\,R=Z_1(\lambda)\,\gamma(\lambda)\,R+X(\lambda)[I_m,\ 0]\,R+(I-R)\,R=$$

$$=Z_1(\lambda)\,\gamma(\lambda)+X(\lambda)\,[I_m,0]=\frac{p_Y(\lambda)+p'_X(-\lambda)}{2}$$

и, следовательно

$$\alpha(\lambda) R + \beta(\lambda) = p_Y(\lambda). \tag{15}$$

Из (8), (14) и (15) следует

$$[\alpha(\lambda) R + \beta(\lambda)][\gamma(\lambda) R + \delta(\lambda)]^{-1} = p_Y(\lambda)\, q_Y^{-1}(\lambda) = Z_1(\lambda),$$

что и требовалось.

Покажем теперь, что построенная нами матрица $A_1(\lambda)$ удовлетворяет условиям I — III.

Условие III выполнено, так как $Z_1(\lambda)$, $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, а значит и $q_X(\lambda)$, $q_Y(\lambda)$, $p_X(\lambda)$, $p_Y(\lambda)$ вещественны на вещественной оси.

Убедимся в том, что $A_1(\lambda)$ является J-несжимающей в правой полуплоскости и J-унитарной на мнимой оси. Для этого вычислим J-форму $A_1^*(\lambda)\, \mathrm{J} A_1(\lambda) - \mathrm{J}$. С целью сделать выкладки более прозрачными, перейдем к j-метрике. Положим

$$B(\lambda) = U A_1(\lambda)\, U^*,$$

где $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}$. Так как $U^* = U^{-1}$ и $U^* j U = \mathrm{J}$, то

$$A_1^*(\lambda)\, \mathrm{J} A_1(\lambda) - \mathrm{J} = U^* [B^*(\lambda)\, j B(\lambda) - j]\, U.$$

Таким образом, достаточно показать, что j-форма $B^*(\lambda)\, j\, B(\lambda) - j$ неотрицательна в правой полуплоскости и равняется нулю на мнимой оси.

Легко видеть, что

$$B(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_Y(\lambda) + p_Y(\lambda) + I - R & q_X'(-\lambda) - p_X'(-\lambda) - I + R \\ q_Y(\lambda) - p_Y(\lambda) - I + R & q_X'(-\lambda) + p_X'(-\lambda) + I - R \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $(I - R)\, q_Y(\lambda) = I - R$ и $q_X(\lambda)(I - R) = I - R$, получим

$$B^*(\lambda)\, j B(\lambda) - j = \begin{pmatrix} \dfrac{q_Y^*(\lambda)\, p_Y(\lambda) + p_Y^*(\lambda)\, q_Y(\lambda)}{2} - R & \dfrac{p_Y^*(\lambda)\, q_X'(-\lambda) - q_Y^*(\lambda)\, p_X'(-\lambda)}{2} \\ \dfrac{q_X'^*(-\lambda)\, p_Y(\lambda) - p_X'^*(-\lambda)\, q_Y(\lambda)}{2} & R - \dfrac{q_X'^*(-\lambda)\, p_X'(-\lambda) + p_X'^*(-\lambda)\, q_X'(-\lambda)}{2} \end{pmatrix}.$$

Желая сделать это выражение более обозримым, умножим его справа на

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} q_Y^{-1}(\lambda) & -q_Y^{-1}(\lambda)\, q_X'(-\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

слева на $L^*(\lambda)$. Используя (9), (10) и (12), получим

$$L^*(\lambda)[B^*(\lambda)\, jB(\lambda) - j]\, L(\lambda) =$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2}-q_Y^{-1*}(\lambda)\,R\,q_Y^{-1}(\lambda) & q_Y^{-1*}(\lambda)\,Rq_Y^{-1}(\lambda)\,q_X'(-\lambda)- \\ q_X^{1*}(-\lambda)\,q_Y^{-1*}(\lambda)\,R\,q_Y^{-1}(\lambda)-q_X^{\prime *}(-\lambda) & \dfrac{Z_1^*(\lambda)+Z_1^*(-\lambda)}{2} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} -\dfrac{Z_1(\lambda)+Z_1(-\lambda)}{2}\,q_k'(-\lambda) \\ R-q_X^{\prime *}(-\lambda)\,q_Y^{-1*}(\lambda)\,R\,q_Y^{-1}(\lambda)\,q_X'(-\lambda) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2}-Y^*(\lambda)\,Y(\lambda) & Y^*(\lambda)\,Y(\lambda)\,q_X'(-\lambda)-X(\lambda)\,[I_m,\,0] \\ q_X^{\prime *}(-\lambda)\,Y^*(\lambda)\,Y(\lambda)-\begin{vmatrix} I_m \\ 0 \end{vmatrix}X^*(\lambda) & R-q_X^{\prime *}(-\lambda)\,Y^*(\lambda)\,Y(\lambda)\,q_X'(-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь, что полученная матрица-функция есть разность гармонической и субгармонической матриц-функций, граничные значения которых совпадают; после этого останется воспользоваться принципом максимума для субгармонических матриц-функций.

Введем обозначение

$$r(\lambda)=Y(\lambda)\,q_X'(-\lambda).$$

Используя тождества (13), найдем, что $r(\lambda)=[r_0(\lambda),\,0]$, где $r_0(\lambda)=$ $=Y_{11}(\lambda)\,X_{11}^{*-1}(-\lambda)$. Таким образом

$$L^*(\lambda)\,[B^*(\lambda)\,jB(\lambda)-j]\,L(\lambda)=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2}-Y^*(\lambda)\,Y(\lambda) & Y^*(\lambda)\,r(\lambda)-X(\lambda)\,[I_m,\,0] \\ r^*(\lambda)\,Y(\lambda)-\begin{vmatrix} I_m \\ 0 \end{vmatrix}X^*(\lambda) & R-r^*(\lambda)\,r(\lambda) \end{pmatrix}=$$

$$=G(\lambda)-\Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda),$$

где

$$G(\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2} & -X(\lambda)\,[I_m,\,0] \\ -\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}X^*(\lambda) & R \end{pmatrix},\quad \Phi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Y(\lambda) & -r(\lambda) \\ -Y(\lambda) & r(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Так как $Z_1(\lambda)$, $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ и $r(\lambda)$ голоморфны в D, где D—открытая правая полуплоскость (голоморфность $r(\lambda)$ следует из ограничения (*) при построении $X(\lambda)$), то $G(\lambda)$ — гармоническая, а $\Phi^*(\lambda)\Phi(\lambda)$—субгармоническая в D матрица-функция.

Эти матрицы-функции непрерывны в $\overline{D}$. Действительно, так как $Z_1(\lambda)$ позитивна и не имеет полюсов на мнимой оси, то $\dfrac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2}$ непрерывна в $\overline{D}$; из тождества (11) следует, что $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ также не имеют полюсов на мнимой оси и, следовательно, непрерывны в $\overline{D}$; отсутствие полюсов на мнимой оси у матрицы-функции $r(\lambda)$ вытекает из легко проверяемого тождества

$$r^*(i\tau)\, r(i\tau) \equiv R.$$

Покажем, что на мнимой оси значения $G(\lambda)$ и $\Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda)$ совпадают. Для этого вычислим блоки матрицы $G(i\tau) - \Phi^*(i\tau)\,\Phi(i\tau)$. Правый нижний блок равен нулю в силу предыдущего тождества, а левый верхний—в силу тождества (11). Вычислим правый верхний блок, используя тождества (13):

$$Y^*(i\tau)\, r(i\tau) - X(i\tau)\,[I_m,\ 0] =$$
$$= \begin{pmatrix} Y_{11}^*(i\tau)\ Y_{11}(i\tau)\, X_{11}^{*-1}(i\tau) - X_{11}(i\tau) & 0 \\ Y_{12}^*(i\tau)\ Y_{11}(i\tau)\, X_{11}^{*-1}(i\tau) - X_{21}(i\tau) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом

$$G(i\tau) - \Phi^*(i\tau)\,\Phi(i\tau) \equiv 0. \qquad (16)$$

Так как субгармоническая матрица-функция $\Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda)$ на границе области $\overline{D}$ совпадает с гармонической матрицей-функцией $G(\lambda)$, то, согласно принципу максимума, внутри D справедливо неравенство

$$G(\lambda) \geqslant \Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda).$$

Из этого неравенства и равенства (16) вытекает, что $B^*(\lambda) jB(\lambda) - j$, а значит и J-форма $A_1^*(\lambda)\, J\, A_1(\lambda) - J$ неотрицательна в правой полуплоскости (условие I) и равняется нулю на мнимой оси (условие II), что и требовалось.

Остается заметить, что данная позитивная вещественная матрица-функция $Z(\lambda)$ представлена в виде

$$Z(\lambda) = [a(\lambda)\, R + b(\lambda)][c(\lambda)\, R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} = A_0(\lambda)\, A_1(\lambda) = A(\lambda)$ удовлетворяет условиям I—III. Теорема доказана.

Обобщенная теорема Дарлингтона

Теорема. *Произвольная рациональная позитивная вещественная симметрическая матрица-функция $Z(\lambda)$ порядка n представима в виде дробно линейного преобразования*

$$Z(\lambda) = [a(\lambda)\, R + b(\lambda)][c(\lambda)\, R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $R = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix}$, $m = \operatorname{rang}\,[Z(\lambda) + Z(-\lambda)]$, *а* $\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} = A(\lambda)$ — *рациональная реактивная матрица-функция* $2n$-го *порядка.*

Доказательство этой теоремы повторяет предыдущее и лишь содержит некоторые дополнения.

Из симметричности $Z(\lambda)$ следует, что $f(\lambda) = \dfrac{Z(\lambda) + Z(-\lambda)}{2}$. При

$m=0$, $R=0$, $Z(\lambda)=[I\cdot R+Z(\lambda)][0\cdot R+I]^{-1}$, где $A(\lambda)=\begin{pmatrix} I & Z(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$, помимо условий I—III, удовлетворяет и условию симплектичности IV

$$A'(\lambda)\,j\mathrm{J}A(\lambda)-j\mathrm{J}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z'(\lambda)-Z(\lambda) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, является реактивной.

Пусть $0<m\leqslant n$. Представим $Z(\lambda)$ в виде (2), где $Z_0(\lambda)$ и $Z_1(\lambda)$ — рациональные позитивные вещественные симметрические матрицы-функции, причем $Z_0(\lambda)$ — реактансная, а $Z_1(\lambda)$ лишена полюсов на мнимой оси. Как и выше, матрица $A_0(\lambda)=\begin{pmatrix} I & Z_0(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$ в представлении (4) является реактивной. Перейдем к построению $A_1(\lambda)$.

Пусть $X(\lambda)=\begin{bmatrix} X_{11}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) \end{bmatrix}$ — рациональное вещественное решение левой факторизационной задачи для $f(i\tau)=\dfrac{Z_1(i\tau)+Z_1^*(i\tau)}{2}$, подчиненное ограничению ($*$). Так как

$$\frac{Z_1(i\tau)+Z_1^*(i\tau)}{2}=\left[\frac{Z_1(i\tau)+Z_1^*(i\tau)}{2}\right]'=X'^*(i\tau)\,X'(i\tau),$$

то в качестве $Y(\lambda)$ возьмем $X'(\lambda)$. Очевидно, $q'_X(\lambda)=q_Y(\lambda)$, $p'_X(\lambda)=p_Y(\lambda)$, поэтому

$$A_1(\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{p_Y(\lambda)+p_Y(-\lambda)}{2}+I-R & \dfrac{p_Y(\lambda)-p_Y(-\lambda)}{2} \\ \dfrac{q_Y(\lambda)-q_Y(-\lambda)}{2}, & \dfrac{q_Y(\lambda)+q_Y(-\lambda)}{2} \end{pmatrix}.$$

Как и выше, $A_1(\lambda)$ удовлетворяет условиям I—III. Убедимся, что она удовлетворяет и условию симплектичности. Очевидно

$$A_1(-\lambda)=jA_1(\lambda)\,j.$$

Из (II) и (III) следует

$$A_1'(-i\tau)\,\mathrm{J}A_1(i\tau)=\mathrm{J},$$

и в силу аналитичности

$$A_1'(-\lambda)\,\mathrm{J}A_1(\lambda)=\mathrm{J},$$

откуда

$$A_1'(\lambda)\,j\mathrm{J}A_1(\lambda)=j\mathrm{J}$$

и, следовательно, условие симплектичности IV выполнено.

Полагая $A_0(\lambda)\,A_1(\lambda)=A(\lambda)=\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$, получим представление

$$Z(\lambda) = [a(\lambda) R + b(\lambda)][c(\lambda) R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $A(\lambda)$ — реактивная матрица-функция. Теорема доказана.

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Поступило 9.IX.1971

Ե. ՅԱ. ՄԵԼԱՄՈՒԴ. Դարլինգտոնի թեորեմի մի ընդհանրացման մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է Դարլինգտոնի ընդհանրացված թեորեմը կամայական գծային պասսիվ 2n-բևեռի համար։

E. Ya. MELAMUD. *A generalisation of Darlington's theorem* (summary)

The Darlington theorem for arbitrary linear passive $2n$-Pole is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Darlington*. Synthesis of Reactance 4-Poles, J. Math. and Phys., v. 18, 1939.
2. *В. П. Потапов*. Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН Арм.ССР, XLVIII, № 5, 1969, 257—262.
3. *И. В. Ковалишина*. Мультипликативная структура аналитических реактивных матриц-функций, Известия АН Арм.ССР, сер. „Математика“, I, № 2, 1966, 138—146.
4. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов*. Мультипликативная структура аналитических вещественных J-растягивающих матриц-функций, Известия АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, XVIII, № 6, 1965, 3—10.
5. *А. В. Ефимов*. Реализация реактивных J-растягивающих матриц-функций, Известия АН Арм.ССР сер. „Математика“, V, № 1, 1970, 54—63.
6. *Ю. А. Розанов*. Стационарные случайные процессы, Ф.—М., 1963.
7. *Т. А. Товмасян*. Об элементарных и примарных множителях J-несжимающих вещественных матриц-функций, Уч. зап. Ереванского Госуниверситета, № 1, 1971, 11—25.