ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 3, 1972 Математика

А. М. БАДАЛЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Введение

1°. В исследованиях М. М. Джрбашяна [1, 2] был введен оператор $L^{(\omega)}$, являющийся существенным обобщением оператора Римана-Лиувилля, с помощью которого была построена полная теория факторизации функций, мероморфных в круге $|z|<1$. Приведем сначала некоторые определения и результаты из работы [1].

Рассматривается класс Ω функций $\omega(x)$, положительных и непрерывных на $[0,1)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\omega(0)=1, \int\limits_0^1 \omega(x)\,dx < +\infty, \tag{1}$$

$$\sup_{0<x<\frac{1}{2}} \{|\omega(x)-1|\, x^{-1}\} < +\infty. \tag{2}$$

Каждой функции $\omega(x)\in\Omega$ ставится в соответствие функция $p(\tau)\in P_\omega$ следующим образом:

$$p(0)=1,\ p(\tau)=\tau\int\limits_\tau^1 \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx,\ \tau\in[0,1]. \tag{3}$$

С помощью этой функции строится последовательность положительных чисел

$$\Delta_0=1,\ \Delta_k=-(k+1)\int\limits_0^1 \tau^k\,dp(\tau)=k\int\limits_0^1 \omega(x)\,x^{k-1}\,dx \tag{4}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots)$$

и образуются следующие степенные ряды

$$C(z;\ \omega)=\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{-1} z^k,\ S(z;\ \omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k^{-1} z^k, \tag{5}$$

которые являются аналитическими функциями в единичном круге. При специальном значении $\omega(x)\equiv 1$, $x\in[0,1)$ эти функции соответственно совпадают с ядрами Коши и Шварца

$$C(z;\ 1)=C(z)=\frac{1}{1-z};\ S(z;\ 1)=S(z)=\frac{1+z}{1-z}\,. \tag{6}$$

Наконец, с каждой функцией $p(\tau)\in P_\infty$ ассоциируется оператор $L^{(\omega)}$

$$L^{(\omega)}[\varphi(x)]\equiv-\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^1\varphi(x\tau)\,dp(\tau)\right\} \tag{7}$$

на соответствующих классах допустимых функций.

Оператор $L^{(\omega)}$ дает возможность установить широкое обобщение интегральных формул Коши и Шварца для круга.

А именно, справедлива теорема [3].

Теорема А. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$, и пусть $\omega(x)\in\Omega$, $p(\tau)\in P_\infty$ и $\{\Delta_k\}_1^\infty\in\Delta_\infty$, тогда функция

$$L^{(\omega)}[f(re^{i\varphi})]=f_\omega(re^{i\varphi})=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k a_k(re^{i\varphi})^k$$

тоже будет голоморфной в круге $|z|<1$, и для любого ρ $(0<\rho<1)$ имеют место следующие интегральные формулы:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\theta};\ \omega\right)f_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta\quad\left(|z|<\rho<1\right), \tag{8}$$

$$f(z)=i\,\mathrm{Im}\,f(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\theta};\ \omega\right)\mathrm{Re}\,f_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta\ \ (|z|<\rho<1). \tag{9}$$

Из этой теоремы непосредственно следует обобщение интегральной формулы Пуассона для функций, гармонических в круге $|z|<1$.

Теорема Б. Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в круге $|z|<1$. Тогда функция

$$u_\omega(re^{i\varphi})=L^{(\omega)}[u(re^{i\varphi})]\quad(0\leqslant r<1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

будет гармонической в том же круге $|z|<1$, причем для любого ρ $(0<\rho<1)$ справедлива интегральная формула

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho};\ \omega\right)u_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{10}$$

$$(0\leqslant r<\rho<1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),$$

где

$$P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho};\ \omega\right)=\mathrm{Re}\,S\left(\frac{r}{\rho}e^{i(\varphi-\theta)};\ \omega\right)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_k^{-1}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k\cos k(\varphi-\theta). \tag{11}$$

В простейшем случае, когда $\omega(x)\equiv 1$, $x\in[0,1)$, согласно (6) имеем $S(z;1)=\dfrac{1+z}{1-z}$ и $P(\varphi-\theta,\ r;\ 1)=P(\varphi-\theta,r)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}$,

и формула (10) переходит в интегральную формулу Пуассона

$$u\left(re^{i\varphi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\varphi-\theta,\ r)\,u\left(\rho e^{i\theta}\right)d\theta \quad (0<r<\rho,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

В работе [2], полагая, что $\omega(x)\in\Omega$, с каждой функцией $F(z)$, мероморфной в круге $|z|<1$, ассоциируется ее ω-характеристика

$$T_\omega(\rho;\ F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)}\{\log|F(\rho e^{i\theta})|\}\,d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{\rho}\frac{n(t;\ \infty)-n(0;\ \infty)}{t}\,\omega\left(\frac{t}{\rho}\right)dt+n(0;\ \infty)\{\log\rho-k_\omega\},$$

где

$$L_{(+)}^{(\omega)}\{\varphi(\rho)\}=\max\{0;\ \varphi(\rho)\},\qquad k_\omega=\int\limits_0^1\frac{1-\omega(x)}{x}\,dx.$$

Посредством функции $T_\omega(\rho;\ F)$ вводится класс $N\{\omega\}$, как множество мероморфных в $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<\rho<1}\{T_\omega(\rho;\ F)\}<+\infty.$$

Устанавливается, что класс $N\{\omega\}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$F(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\omega}\,z^\lambda\,\frac{B_\omega(z;\ a_\mu)}{B_\omega(z;\ b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S\left(ze^{-i\theta};\ \omega\right)d\psi(\theta)\right\},$$

где

$$S(z;\ \omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k\int\limits_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx},$$

$$B_\omega(z;\ z_k)=\prod_{(k)}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\omega(z;\ z_k)}$$

— сходящиеся произведения, $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[0,2\pi]$ с конечным полным изменением, $\lambda\geqslant 0$ — любое целое, γ — любое вещественное число.

Цель настоящей работы — распространить этот основной результат М. М. Джрбашяна на субгармонические функции.

2°. В данной работе, на основании теоремы Б, устанавливается обобщение известной формулы Рисса [4] для функций, субгармонических в круге $|z|<1$. Эта формула одновременно является распространением на субгармонические функции формулы Неванлинны — Джрбашяна для мероморфных функций.

Доказывается следующая

Теорема. *Каждой субгармонической в круге $|z|<1$ функции $U(z)$* однозначно соответствует некоторое положительное распределение масс $\mu(\zeta)$ так, что для каждой функции $\omega(x)\in\Omega$ имеет место формула*

$$U(z)=\mu(0)\ln\frac{1}{|z|}+\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log|A_{\omega}^{(\rho)}(z;\zeta)|\,d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho};\ \omega\right)U_{\omega}(\rho e^{i\theta})\,d\theta\quad(|z|<\rho<1),\tag{12}$$

где

$$A_{\omega}^{(\rho)}(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-w_{\omega}^{(\rho)}(z;\zeta)\},$$

$$w_{\omega}^{(\rho)}(z;\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\theta};\ \omega\right)L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right\}d\theta,$$

$$U_{\omega}(\rho e^{i\theta})=L^{(\omega)}[U(\rho e^{i\theta})].$$

Отметим, что в специальном случае, когда $\omega(x)=(1-x)^{\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$, формула (12) впервые была установлена М. М. Джрбашяном [5].

Обозначим через $n(r;\ U)$ массу функции $U(z)$, сосредоточенную в круге $|z|\leqslant r$, т. е.

$$n(r;\ U)=\iint\limits_{|\zeta|<r}d\mu(\zeta),$$

и введем в рассмотрение функцию

$$N_{\omega}(\rho;\ U)=\int_0^{\rho}\frac{\omega\left(\frac{t}{\rho}\right)}{t}[n(t;\ U)-n(0;\ U)]\,dt+\mu(0)\{\log\rho-k_{\omega}\},$$

где

$$k_{\omega}=\int_0^1\frac{1-\omega(x)}{x}dx.$$

В работе устанавливается формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{\omega}(\rho e^{i\theta})\,d\theta=N_{\omega}(\rho;\ U)+c_0,\tag{13}$$

---

* Здесь и в дальнейшем всюду предполагается, что в точке 0 $U(z)$ имеет изолированную массу, равную $\mu(0)$.

являющаяся обобщением формулы Иенсена—Неванлинны—Джрбашяна для субгармонических функций (см. [2], формулу (13.33′)).

Наконец, вводится класс E_ω — множество субгармонических в круге $|z|<1$ функций $U(z)$, для которых конечна величина

$$\sup_{0<\rho<1}\left\{\int_0^{2\pi} U_\omega^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta\right\}<+\infty, \tag{14}$$

где

$$U_\omega^+(\rho e^{i\theta})=\max\{U_\omega(\rho e^{i\theta});\ 0\}.$$

Справедлива следующая основная

Теорема. *Класс E_ω совпадает с множеством функций, которые в единичном круге допускают следующее представление*

$$U(z)=\mu(0)\log\frac{1}{|z|}+\iint_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\,d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\varphi-\theta,r;\ \omega)\,d\psi(\theta)\quad (z=re^{i\varphi}), \tag{15}$$

где $\mu(\zeta)$ — произвольное положительное распределение масс в круге $|\zeta|<1$, подчиненное лишь условию

$$\int_0^1\frac{\omega(t)}{t}[n(t;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,dt<+\infty, \tag{16}$$

а $\psi(\theta)$ — произвольная действительная функция с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$.

3°. Прежде чем перейти к изложению этих результатов, приведем несколько предварительных лемм, установленных в работах [1, 2], посвященных проблеме представления гармонических и мероморфных функций в круге.

Лемма А. Если $\omega(x)\in\Omega$, то в классе функций $\varphi(x)$, непрерывных на [0,1] и обладающих на [0,1] непрерывной производной $\varphi'(x)$

$$L^{(\omega)}[\varphi(x)]=\varphi(0)+x\int_0^1\varphi'(x\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Лемма Б. Если $\omega(x)\in\Omega$, то

$$L^{(\omega)}[\log r]=-k_\omega+\log r,$$

где

$$k_\omega=\int_0^1\frac{1-\omega(x)}{x}\,dx.$$

Далее, обозначим

$$w_\omega(z;\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(e^{-i\theta}z;\omega)\, v_\omega(e^{i\theta};\zeta)\,d\theta \tag{18}$$

$$(|z|<1,\ |\zeta|<1),$$

где

$$v_\omega(e^{i\theta};\zeta)=\left\{L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right]\right\}_{\rho=1}. \tag{19}$$

Лемма В. Справедливо разложение

$$w_\omega(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int\limits_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-\bar{\zeta}^k\int\limits_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^k}{\Delta_k} \tag{20}$$

$$(|z|<1,\ |\zeta|<1),$$

где

$$\Delta_0=1,\ \Delta_k=k\int\limits_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\quad(k=1,\,2,\cdots).$$

Наконец, введем в рассмотрение функцию

$$A_\omega(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-w_\omega(z;\zeta)}\ (|z|<1,\ |\zeta|\leqslant 1). \tag{21}$$

Тогда справедливы следующие важные утверждения.

Лемма Г. 1°. Если $0\leqslant|z|<|\zeta|\leqslant 1$, то функция $A_\omega(z;\zeta)$ допускает представление вида

$$A_\omega(z;\zeta)=\exp\{-\Omega(z;\zeta)\}, \tag{22}$$

где

$$\Omega(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\left\{C\left(\frac{z\bar{\zeta}}{x};\ \omega\right)+C\left(\frac{zx}{\zeta};\ \omega\right)-1\right\}\frac{\omega(x)}{x}\,dx. \tag{23}$$

2°. Если $|z|\leqslant r<|\zeta|<1$, то при $\zeta\to e^{i\theta}$ равномерно относительно z и θ справедлива асимптотическая формула

$$\Omega(z;\zeta)=S(ze^{-i\theta};\ \omega)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx+O\left((1-|\zeta|)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right). \tag{24}$$

Лемма Д. Для любого $\zeta\ (0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$ и $r\ (0<r<1)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|L^{(\omega)}[\log|A_\omega(re^{i\varphi};\zeta)|]|\,d\varphi\leqslant c(r_0)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx, \tag{25}$$

где $c(r_0)$—некоторая постоянная.

Лемма E. Для любого $r\ (0<r<1)$ справедливо тождество

$$L^{(\omega)}[P(\varphi-\theta,\ r;\ \omega)]=p(\varphi-\theta,\ r)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}. \tag{26}$$

§ 1. Обобщение формулы Рисса

1.1 (a). Пусть $U(z)$—субгармоническая функция в круге $|z|<R\leqslant+\infty$. Тогда известна следующая теорема Рисса [4]: каждой функции $U(z)$, субгармонической в круге $|z|<R\leqslant+\infty$, однозначно соответствует некоторое положительное распределение масс $\mu(\zeta)$ такое, что для любого $\rho\ (0<\rho<R)$ функция $U(z)$ может быть представлена в виде

$$U(z)=\iint\limits_{|\zeta|\leqslant\rho}\ln\left|\frac{\rho(\zeta-z)}{\rho^2-z\bar{\zeta}}\right|d\mu(\zeta)+h_\rho(z)\quad(|z|<\rho), \tag{1.1}$$

где $h_\rho(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $U(z)$ в круге $|z|\leqslant\rho$, т. е.

$$h_\rho(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U(\rho e^{i\theta})\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)+r^2}\quad(z=re^{i\varphi}). \tag{1.2}$$

Итак, справедлива формула

$$U(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U(\rho e^{i\theta})\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\theta+$$

$$+\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\ln\left|\frac{\rho(\zeta-z)}{\rho^2-z\bar{\zeta}}\right|d\mu(\zeta)\quad(|z|<\rho<R,\ z=re^{i\varphi}). \tag{1.3}$$

(б). Ниже мы установим обобщение этой теоремы. С этой целью отметим, что если образовать функцию

$$u(z;\rho)\equiv U(z)-\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\mu(\zeta)\quad(0\leqslant\rho<R,\quad|z|<\rho),$$

то она будет гармонической в круге $|z|<\rho$ и непрерывной на окружности $|z|=\rho$. Тогда согласно теореме A функция $u(z;\rho)$ допускает представление

$$u(z;\rho)\equiv U(z)-\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\mu(\zeta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}p\left(\varphi-\theta,\ \frac{r}{\rho};\ \omega\right)u_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{1.4}$$

где

$$u_\infty(re^{i\theta}) = L^{(\omega)}[u(re^{i\theta})] =$$

$$= U_\infty(re^{i\theta}) - \iint\limits_{|\zeta|<\rho} L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\zeta}\right|\right] d\mu(\zeta). \qquad (1.5)$$

Подставляя в (1.4) значение $u_\infty(r\,e^{i\varphi})$ из (1.5), получим

$$U(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p\left((\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}; \omega\right) U_\infty(\rho e^{i\theta})\,d\theta -$$

$$- \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p\left(\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}; \omega\right) L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\zeta}\right|\right]_{r=\rho} d\theta\right\} d\mu(\zeta),$$

или, что то же самое

$$U(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) e^{-w_\infty^{(\rho)}(z;\zeta)}\right| d\mu(\zeta) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p\left(\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}; \omega\right) U_\infty(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \qquad (1.6)$$

где

$$w_\infty^{(\rho)}(z;\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\theta}; \omega\right) L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right] d\theta =$$

$$= \int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k^{-1}\left\{\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^k \int\limits_0^{\frac{|\zeta|}{\rho}} \omega(x)\,x^{k-1}\,dx -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\bar\zeta}{\rho}\right)^k \int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1} \omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\left(\frac{z}{\rho}\right)^k \equiv w_\infty\left(\frac{z}{\rho}; \frac{\zeta}{\rho}\right) \left(\begin{matrix} z=re^{i\varphi} \\ |z|<\rho \end{matrix}\right) \qquad (1.7)$$

(см. [2], формулу (1.57)).

Обозначив

$$A_\infty(z;\zeta) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right) e^{-w_\infty(z;\zeta)}, \qquad (1.8)$$

формулу (1.6) можно записать и в виде

$$U(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log\left|A_\infty\left(\frac{z}{\rho}; \frac{\zeta}{\rho}\right)\right| d\mu(\zeta) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\left(\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}; \omega\right) U_\infty(\rho e^{i\theta})\,d\theta. \qquad (1.9)$$

Естественно формулу (1.9) называть обобщением формулы Рисса. Итак, мы получим следующую теорему.

Теорема 1. *Каждой функции $U(z)$, субгармонической в круге $|z|<R$, однозначно соответствует определенное положительное распределение масс $\mu(\zeta)$ такое, что для любой функции $\omega(x)\in\Omega$ функция $U(z)$ допускает представление* (1.9).

(в). Введем в рассмотрение интеграл

$$M_\omega(z;\ \mu)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-w_\omega(z,\ \zeta)}\right|d\mu(\zeta),\tag{1.10}$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\mu(\zeta)$ — некоторое положительное распределение масс в круге $|\zeta|<1$, подчиненное условию*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(t)}{t}\,[n(t;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,dt<+\infty,\tag{1.11}$$

где

$$n(t;\ \mu)=\iint\limits_{|\zeta|<t}d\mu(\zeta),\quad n(0;\ \mu)=\mu(0).\tag{1.12}$$

Тогда функция $M_\omega(z)$ субгармонична в круге $|z|<1$, и распределение ее масс совпадает с $\mu(\zeta)$.

Доказательство. Убедимся сначала, что при любом ζ ($|\zeta|<1$) функция $\log|A_\omega(z;\ \zeta)|$ субгармонична в круге $|z|<1$.

В самом деле, если $\zeta=0$, то, как известно (см. [2], формулу (3.22)), имеем

$$\{\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\}_{\zeta=0}=k_\omega+\log|z|,$$

и функция $\log|A_\omega(z;\ 0)|$ субгармонична в круге $|z|<1$. Если же $0<|\zeta|<1$, то это очевидно, поскольку тогда функция $A_\omega(z;\ \zeta)$ аналитична в круге $|z|<1$.

Полагая теперь, что $|z|\leqslant r<\rho<1$, рассмотрим интеграл

$$M_\omega(z;\ \mu;\ \rho)=\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\mu(0)\,\{k_\omega+\log|z|\}+\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\mu(\zeta)-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\operatorname{Re}w_\omega(z;\ \zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Из данного представления легко заключаем, что функция $M_\omega(z;\ \mu;\ \rho)$ субгармонична в круге $|z|\leqslant r$, и распределение ее масс совпадает с функцией $\mu(\zeta)$. Рассмотрим далее интеграл

$$M^*_\infty(z;\ \mu;\ \rho)=\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \log|A_\infty(z;\ \zeta)|\,d\mu(\zeta), \tag{1.13}$$

и убедимся, что функция $M^*_\infty(z;\ \mu;\ \rho)$ гармонична в круге $|z|\leqslant r$.

С этой целью отметим сперва, что, согласно лемме Г введения, при $|z|<|\zeta|$ функция $A_\infty(z;\ \zeta)$ допускает представление вида

$$A_\infty(z;\ \zeta)=\exp\{-\Omega(z;\ \zeta)\},$$

где

$$\Omega(z;\ \zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\left\{S\left(\frac{z\overline{\zeta}}{x};\ \omega\right)+S\left(\frac{zx}{\zeta};\ \omega\right)-1\right\}\frac{\omega(x)}{x}\,dx$$

—функция, аналитичная в круге $|z|\leqslant r$.

Следовательно, для рассматриваемых значений z и ζ

$$\log|A_\infty(z;\ \zeta)|=-\operatorname{Re}\Omega(z,\ \zeta) \tag{1.14}$$

будет гармонической функцией от z в круге $|z|\leqslant r$.

Таким образом, наше утверждение относительно $M^*_\infty(z;\ \rho)$ будет доказано, если мы покажем, что интеграл (1.13) абсолютно и равномерно сходится в круге $|z|\leqslant r$.

Но, согласно второму утверждению той же леммы Г, при $|z|\leqslant r< <\rho\leqslant|\zeta|<1$ и $\zeta\to e^{i\theta}$ имеет место асимптотическая формула

$$\Omega(z;\ \zeta)=S(ze^{-i\theta};\ \omega)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx+O((1-|\zeta|)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

и притом равномерно относительно z и $\theta\in[0,2\pi]$. Поэтому имеет место оценка вида

$$|\Omega(z;\ \zeta)|\leqslant B(r;\ \rho)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\quad(|z|\leqslant r<\rho\leqslant|\zeta|<1), \tag{1.15}$$

где $B(r;\ \rho)$ зависит лишь от своих аргументов.

Отсюда следует, что нам достаточно лишь убедиться в том, что

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1}\left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\}d\mu(\zeta)<+\infty.$$

Согласно обозначению (1.12)

$$n(t;\ \mu)=\iint\limits_{0<|\zeta|<t}d\mu(\zeta)=\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi}d\mu(re^{i\varphi})$$

и, таким образом

$$dn(t;\ \mu)=\int\limits_0^{2\pi}d\mu(te^{i\varphi}).$$

Полагая, что $\rho < \rho' < 1$, вычислим интеграл

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<\rho'} \left\{ \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx \right\} d\mu(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\rho}^{\rho'} \int\limits_{0}^{2\pi} \left\{ \int\limits_{t}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx \right\} d\mu(te^{i\varphi}) =$$

$$= \int\limits_{\rho}^{\rho'} \left\{ \int\limits_{t}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx \right\} dn(t; \mu) = \int\limits_{t}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx \cdot n(t; \mu)\Big|_{t=\rho}^{\rho'} +$$

$$+ \int\limits_{\rho}^{\rho'} n(t; \mu) \frac{\omega(t)}{t} dt = n(\rho'; \mu) \int\limits_{\rho'}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx -$$

$$- n(\rho; \mu) \int\limits_{\rho}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx + \int\limits_{\rho}^{\rho'} \frac{n(t; \mu)}{t} \omega(t)\, dt. \tag{1.16}$$

Но очевидно, что

$$n(\rho'; \mu) \int\limits_{\rho'}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx \leqslant \int\limits_{\rho'}^{1} \frac{n(t; \mu)}{t} \omega(t)\, dt < +\infty,$$

ввиду условия (1.11), и поэтому

$$\lim_{\rho' \to 1-0} n(\rho'; \mu) \int\limits_{\rho'}^{1} \frac{\omega(t)}{t} dt = 0.$$

Переходя в (1.16) к пределу при $\rho' \to 1-0$, получим

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \left\{ \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx \right\} d\mu(\zeta) \leqslant \int\limits_{\rho}^{1} \frac{\omega(t)}{t} n(t; \mu)\, dt < +\infty.$$

Наконец, поскольку очевидно

$$M_\omega(z; \mu) = M_\omega(z; \mu; \rho) + M_\omega^*(z; \mu; \rho) \quad (|z| \leqslant r < \rho < 1),$$

то ввиду произвольности r и ρ теорема доказана.

Отметим, что условие (1.11) не только достаточно, но и необходимо для существования субгармонической функции $M_\omega(z)$.

Действительно, если $M_\omega(z)$ субгармонична в круге $|z|<1$, то, взяв $z=0$, согласно формуле (3.22) работы [2], имеем

$$\{M_\omega(z) - \mu(0)[k_\omega + \log|z|]\}_{z=0} =$$

$$= \iint\limits_{0<|\zeta|<1} \log|A_\omega(0; \zeta)|\, d\mu(\zeta) > -\infty, \tag{1.17}$$

где

$$A_\omega(0;\zeta)=\exp\left\{-\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}.$$

Следовательно, полагая $0<\rho^*<1$, получим

$$-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho^*}\log|A_\omega(0;\zeta)|\,d[\mu(\zeta)-\mu(0)]=$$

$$=\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho^*}\left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d[\mu(\zeta)-\mu(0)]=$$

$$=\int\limits_{0}^{\rho^*}\left\{\int\limits_{\rho}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]<+\infty, \tag{1.18}$$

ввиду условия (1.17).

Интегрируя правую часть по частям, получим

$$[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]\int\limits_{\rho}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\,\Bigg|_{\rho=0}^{\rho^*}+$$

$$+\int\limits_{0}^{\rho^*}[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,d\rho.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho^*}\log|A_\omega(0;\zeta)|\,d\mu(\zeta)=$$

$$=[n(\rho^*;\mu)-n(0;\mu)]\int\limits_{\rho^*}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx+$$

$$+\int\limits_{0}^{\rho^*}[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,d\rho \tag{1.19}$$

для любого $\rho^*\in(0,1)$, причем оба члена, стоящие в правой части формулы (1.19), положительны . С другой стороны, очевидно

$$\int\limits_{0}^{\rho^*}[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,d\rho\leqslant$$

$$\leqslant-\iint\limits_{|\zeta|<\rho^*}\log|A_\omega(0;\zeta)|\,d\mu(\zeta)\leqslant-\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(0;\zeta)|\,d\mu(\zeta)<+\infty, \tag{1.20}$$

и так как правая часть неравенства (1.20) не зависит от ρ^*, то теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть* $\mu(\zeta)$ — *положительное распределение масс в круге* $|\zeta|<1$ *с конечным интегралом*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,[n(t;\mu)-n(0;\mu)]\,dt<+\infty, \qquad (1.21)$$

и $M_\omega(z;\mu)$ — *ассоциированная с распределением* $\mu(\zeta)$ *субгармоническая функция. Если*

$$M_\omega^{(\rho)}(z;\mu)=\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta)=$$

$$=\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-w_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)}\right|d\mu(\zeta)\quad (0<\rho<1), \qquad (1.22)$$

где функция $w_\omega\left(\dfrac{z}{\rho};\dfrac{\zeta}{\rho}\right)$ *определяется из* (1.7), *то справедливо следующее предельное соотношение*

$$\lim_{\rho\to1-0} M_\omega^{(\rho)}(z;\mu)=M_\omega(z;\mu)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\zeta)|\,d\mu(\zeta) \qquad (1.23)$$

$$(|z|<1).$$

Доказательство. Вспомним, что согласно теореме 2, функция $M_\omega(z;\mu)$ является субгармонической всюду в круге $|z|<1$. Предположим

$$|z|\leqslant r<r_0<\rho<1 \qquad (1.24)$$

и, обозначая

$$M_\omega^{(r_0,\rho)}(z;\mu)=\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta),$$

$$M_\omega^{(\rho)}(z;\mu)=\iint\limits_{|\zeta|<\rho<1}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta), \qquad (1.25)$$

будем иметь

$$M_\omega^{(\rho)}(z;\mu)=\iint\limits_{|\zeta|<r_0}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta)+M_\omega^{(r_0,\rho)}(z;\mu). \qquad (1.26)$$

Как известно (см. [2], (4.17))

$$\lim_{\rho\to1-0} w_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)=w_\omega(z;\zeta)\quad(|z|<1),$$

поэтому

$$\lim_{\rho\to 1-0}\iint\limits_{|\zeta|<r_0}\log\left|A_\infty\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right| d\mu(\zeta)=$$

$$=\iint\limits_{|\zeta|<r_0}\log|A_\infty(z;\ \zeta)|\ d\mu(\zeta)\quad(|z|<1). \tag{1.27}$$

Далее, согласно лемме Г, мы имеем формулу

$$A_\infty(z;\ \zeta)=\exp\{-\Omega(z;\ \zeta)\}\quad(|z|<|\zeta|<1), \tag{1.28}$$

где

$$\Omega(z;\ \zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\left\{C\left(\frac{z\bar\zeta}{x};\ \omega\right)+C\left(\frac{zx}{\zeta};\ \omega\right)-1\right\}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

причем

$$|\Omega(z;\ \zeta)|\leqslant Q(z;\ \zeta)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\quad(|z|<|\zeta|<1), \tag{1.28'}$$

где $Q(z;\ \zeta)$ имеет вид

$$Q(z;\ \zeta)=C(|z|;\ \omega)+C\left(\left|\frac{z}{\zeta}\right|;\ \omega\right)+1.$$

Отметим теперь, что при условии (1.24) имеем $\dfrac{|z|}{\rho}<\dfrac{|\zeta|}{\rho}<1$, если $r_0<|\zeta|<\rho$, и $|z|<|\zeta|$, если $r_0<|\zeta|<1$.

Поэтому из представления (1.28) функции $A_\infty(z;\ \zeta)$ для $M_\infty^{(r_0,\rho)}(z;\ \mu)$ будем иметь

$$M_\infty^{(r_0,\rho)}(z;\ \mu)=\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho}\log\left|A_\infty\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right| d\mu(\zeta)=$$

$$=\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho}\log\left|e^{-\Omega\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)}\right| d\mu(\zeta)=$$

$$=-\mathrm{Re}\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho}\Omega\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)d\mu(\zeta)\quad(|z|\leqslant r) \tag{1.29}$$

и

$$M_\infty^{(r_0,1)}(z;\ \mu)=-\mathrm{Re}\iint\limits_{r_0<|\zeta|<1}\Omega(z;\ \zeta)\,d\mu(\zeta)\quad(|z|\leqslant r).$$

Но из (1.28′) и (1.29) легко вытекает, что в случае $|z|\leqslant r<r_0<$ $<|\zeta|<\rho<1$

$$\left|\Omega\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right|\leqslant Q(r;\ r_0)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx, \tag{1.30}$$

и так как правая сторона не зависит от ρ, то

$$\lim_{\rho\to 1-0} \Omega\left(\frac{z}{\rho}; \frac{\zeta}{\rho}\right) = \Omega(z; \zeta).$$

Но тот факт, что интегралы

$$\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho} \left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\} d\mu(\zeta)$$

при условии (1.21) ограничены сверху при $\rho\to 1-0$, нами уже был доказан в предыдущей лемме. Поэтому из оценки (1.30) следует

$$\lim_{\rho\to 1-0} M_{\omega}^{(r_0, \rho)}(z; \mu) = M_{\omega}^{(r_0, 1)}(z; \mu) \quad (|z|\leqslant r).$$

Следовательно, для завершения доказательства леммы нам остается перейти к пределу в тождестве (1.26) при $\rho\to 1-0$, поскольку число $r<1$ было произвольным.

Теорема 3. *Пусть $\mu(\zeta)$ — положительное распределение масс в круге $|z|<1$, подчиненное условию*

$$\int\limits_0^1 [n(\rho; \mu) - n(0; \mu)]\,\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,d\rho < +\infty. \tag{1.31}$$

Тогда для функции $M_{\omega}(z; \mu)$ имеет место оценка

$$\sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |L^{(\omega)}\{M_{\omega}(re^{i\varphi}; \mu)\}|\,d\varphi\right\} < +\infty. \tag{1.32}$$

Доказательство. По определению

$$M_{\omega}(z; \mu) = \iint\limits_{|\zeta|<1} \log|A_{\omega}(z; \zeta)|\,d\mu(\zeta) \quad (|z|<1), \tag{1.33}$$

причем, согласно лемме Д, при каждом ζ $(0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$, r $(0<r<1)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |L^{(\omega)}\{\log|A_{\omega}(re^{i\varphi}; \zeta)|\}|\,d\varphi \leqslant c(r_0)\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\,dx, \tag{1.34}$$

где $c(r_0)$ — некоторая постоянная.

Теперь предположим, что к обеим частям (1.33) можно применить оператор $L^{(\omega)}$ и ввести его под знак двойного интеграла. В результате получим формулу

$$L^{(\omega)}\{M_{\omega}(re^{i\varphi}; \mu)\} = \iint\limits_{|\zeta|<1} L^{(\omega)}\{\log|A_{\omega}(re^{i\varphi}; \zeta)|\}\,d\mu(\zeta) \tag{1.35}$$

и оценку

$$|L^{(\omega)}\{M_\omega(re^{i\varphi};\ \mu)\}| \leqslant \iint\limits_{|\zeta|<1} |L^{(\omega)}\log|A_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)||\, d\mu(\zeta). \tag{1.35'}$$

Интегрируя неравенство (1.35′) по φ вдоль промежутка $[0,2\pi]$, мы получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\{M_\omega(re^{i\varphi};\ \mu)\}|\, d\varphi \leqslant \iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\log|A_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)||\, d\varphi\right] d\mu(\zeta). \tag{1.36}$$

Наконец, ввиду оценок (1.34) из (1.36) заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\{M_\omega(re^{i\varphi};\ \mu)\}|\, d\varphi \leqslant c(r_0)\iint\limits_{|\zeta|<1}\left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\} d\mu(\zeta) =$$

$$= c(r_0)\int\limits_0^1\left\{\int\limits_\rho^1\frac{\omega(x)}{x}dx\right\} d[n(\rho;\ \mu)-n(0;\ \mu)] =$$

$$= c(r_0)\int\limits_0^1[n(\rho;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\frac{\omega(\rho)}{\rho}\, d\rho < +\infty$$

согласно условию (1.31) теоремы.

Следовательно, для завершения доказательства утверждения (1.32) теоремы остается обосновать применение оператора $L^{(\omega)}$ под знаком двойного интеграла (1.33). Это можно сделать так же, как и в случае дискретного распределения масс (см. [2], теорему 2.2).

С этой целью предположим, что $|z| \leqslant \rho < \rho_1 < |\zeta| < 1$, и, пользуясь представлением функции $A_\omega(z;\ \zeta)$ (лемма Г), запишем $M_\omega(z;\ \mu)$ в следующем виде:

$$M_\omega(z;\ \mu) - \iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\, d\mu(\zeta) =$$

$$= -\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1}\operatorname{Re}\Omega(z;\ \zeta)\, d\mu(\zeta) \equiv \Psi_\rho(z), \tag{1.37}$$

где $\psi_\rho(z)$ будет гармонической функцией в круге $|z|<\rho$, и значит $\psi_\rho(\rho x e^{i\varphi})$ как функция от x будет непрерывно дифференцируемой н отрезке $[0,1)$. Следовательно, по лемме А

$$L^{(\omega)}\{\psi_\rho(\rho x e^{i\varphi})\} = \psi_\rho(0) + \rho x e^{i\varphi}\int\limits_0^1\psi_\rho'(\rho x\tau e^{i\varphi})\,\omega(\tau)\, d\tau,$$

откуда, если заменить ρx на r, получим

$$L^{(\omega)}\{\psi_\rho(re^{i\varphi})\} = \psi_\rho(0) + re^{i\varphi}\int\limits_0^1\psi_\rho'(r\tau e^{i\varphi})\,\omega(\tau)\, d\tau. \tag{1.38}$$

Так как интеграл (1.38) равномерно сходится относительно z, то под знаком интеграла можно продифференцировать, и полученный интеграл

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \operatorname{Re} \Omega'(z;\ \zeta)\, d\mu(\zeta) = \psi_\rho'(z)$$

будет равномерно сходиться в круге $|z| \leqslant \rho$.

Поэтому интеграл

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \operatorname{Re} \Omega'(\tau re^{i\varphi};\ \zeta)\, d\mu(\zeta) = \psi_\rho'(\tau re^{i\varphi}) \tag{1.39}$$

будет абсолютно-равномерно сходиться относительно $r \in [0,\ \rho)$,

$$\tau \in [0,\ 1) \text{ и } \varphi \in [0,\ 2\pi].$$

Из (1.38) и (1.39) приходим к формуле

$$L^{(\omega)}\{\psi_\rho(re^{i\varphi})\} = -\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \operatorname{Re}\left[\Omega(0;\zeta) + re^{i\varphi}\int_0^1 \Omega'(\tau re^{i\varphi};\ \zeta)\,\omega(\tau)\,d\tau\right] d\mu, \tag{1.40}$$

причем интеграл справа сходится абсолютно-равномерно относительно $r \in [0,\ \rho)$ и $\varphi \in [0,\ 2\pi]$.

С другой стороны, исходя из аналитичности функции $\Omega(z;\ \zeta)$ в круге $|z| \leqslant \rho$, при $\rho < |\zeta| < 1$, по лемме А будем иметь

$$L^{(\omega)}\{\Omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = \Omega(0;\ \zeta) + re^{i\varphi}\int_0^1 \Omega'(\tau re^{i\varphi};\ \zeta)\,\omega(\tau)\,d\tau,$$

$$r \in [0,\ \rho),\quad \varphi \in [0,\ 2\pi].$$

Отсюда и из (1.40) получим

$$L^{(\omega)}\{\psi_\rho(re^{i\varphi})\} = -\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\Omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\}\, d\mu(\zeta) =$$

$$= \iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} L^{(\omega)}\{\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\}\, d\mu(\zeta), \tag{1.41}$$

причем интеграл справа также абсолютно-равномерно сходится для всех $r \in [0,\ \rho)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Значит, если к обеим частям равенства (1.37) применить оператор $L^{(\omega)}$, то в силу (1.41) получим

$$L^{(\omega)}\{M_\omega(re^{i\varphi};\ \mu)\} - L^{(\omega)}\left\{\iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log|A_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)|\, d\mu(\zeta)\right\} =$$

$$= \iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} L^{(\omega)}\{\log|A_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)|\}\, d\mu(\zeta).$$

Отсюда приходим к требуемой формуле (1.35).

§ 2. Определение ω-характеристической функции. Класс E_ω и его параметрическое представление

2.1. Пусть $U(z)$—субгармоническая функция в круге $|z|<1$, и пусть $\omega(x)\in\Omega$.

Согласно формуле (1.6) для любого ρ $(0<\rho<1)$

$$U(z)=\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\log\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-w_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)}\right|d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho};\omega\right)U_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta,\quad z=re^{i\varphi}. \tag{2.1}$$

Сначала предположим, что $U(0)$ конечно. Тогда из (2.1) при $z=0$ будем иметь

$$U(0)=\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\log|e^{-w_\omega\left(0;\frac{\zeta}{\rho}\right)}|\,d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P(\theta,0;\omega)\,U_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta. \tag{2.2}$$

Имея в виду, что

$$w_\omega\left(0;\frac{\zeta}{\rho}\right)=\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx \quad\text{и}\quad p(\theta,0;\omega)\equiv 1,$$

запишем (2.2) в виде

$$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\left\{\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d\mu(\zeta). \tag{2.3}$$

Отсюда в специальном случае, когда $\omega(x)\equiv 1$, мы получаем формулу Пуассона-Иенсена для субгармонических функций [4].

Действительно, при $\omega(x)\equiv 1$

$$\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx=\log\frac{\rho}{|\zeta|}\quad\text{и}\quad U_\omega(\rho e^{i\theta})=U(\rho e^{i\theta}),$$

и формула (2.3) принимает вид

$$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U(\rho e^{i\theta})\,d\theta-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\log\frac{\rho}{|\zeta|}\,d\mu(\zeta). \tag{2.3'}$$

Предположим теперь, что $U(0)$ не конечно, т. е. $U(0)=-\infty$. Тогда образуем функцию

$$U^*(z)=U(z)-\mu(0)\ln|z|,$$

также субгармоническую в круге $|z|<1$, для которой уже

$$\lim_{z\to 0} U^*(z)=U^*(0)=c_0>-\infty.$$

Следовательно, к функции $U^*(z)$ можно применить формулу (2.3)

$$U^*(0)=c_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U^*_\omega(\rho e^{i\vartheta})\,d\vartheta-$$

$$-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\left\{\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d[\mu(\zeta)-\mu(0)], \qquad (2.4)$$

где

$$U^*_\omega(\rho e^{i\theta})=L^{(\omega)}[U^*_\omega(\rho e^{i\theta})]=L^{(\omega)}[U(\rho e^{i\theta})-\mu(0)\ln\rho]=$$
$$=U_\omega(\rho e^{i\theta})-\mu(0)L^{(\omega)}[\log\rho]. \qquad (2.5)$$

Согласно лемме Б, если $\omega(x)\in\Omega$, то

$$L^{(\omega)}[\log\rho]=-k_\omega+\log\rho.$$

Поэтому из (2.5) получим

$$U^*_\omega(\rho e^{i\theta})=U_\omega(\rho e^{i\theta})-\mu(0)[\log\rho-k_\omega]. \qquad (2.6)$$

Теперь преобразуем двойной интеграл, стоящий в правой части формулы (2.4), принимая во внимание, что

$$\int\limits_0^{2\pi} d\mu(te^{i\varphi})=dn(t;\mu),$$

где $n(t;\mu)$—масса функции $U(z)$, сосредоточенная в круге $|z|\leqslant t$:

$$\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\left\{\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d[\mu(\zeta)-\mu(0)]=$$

$$=\int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_{\frac{r}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d[\mu(re^{i\varphi})-\mu(0)]=$$

$$=\int\limits_0^{\rho}\left\{\int\limits_{\frac{r}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d[n(r;\mu)-n(0;\mu)]=$$

$$=[n(r;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\int\limits_{\frac{r}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\Big|_{r=0}^{\rho}+$$

$$+\int\limits_{0}^{\rho}[n(r;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\ \frac{\omega\left(\frac{r}{\rho}\right)}{r}\,dr=$$

$$=\int\limits_{0}^{\rho}\ [n(r;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\ \frac{\omega\left(\frac{r}{\rho}\right)}{r}\,dr=\int\limits_{0}^{1}[n\ (\rho t;\ \mu)-n\ (0;\ \mu)]\ \frac{\omega\ (t)}{t}\,dt. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что интеграл, находящийся в левой части (2.7), как функция параметра ρ $(0<\rho<1)$ монотонно возрастает.

Ввиду (2.6) и (2.7) формула (2.4) запишется в следующем виде:

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}U_\infty(\rho e^{i\theta})\,d\theta-\int\limits_{0}^{\rho}[n\ (r;\ \mu)-n\ (0;\ \mu)]\ \frac{\omega\left(\frac{r}{\rho}\right)}{r}\,dr-\mu(0)\ \{\log\rho-k_\infty\}. \tag{2.8}$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$m_\infty^+\ (\rho;\ U)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}U_\infty^+\ (\rho e^{i\theta})\ d\theta,$$

$$m_\infty^-(\rho;\ U)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}U_\infty^-\ (\rho e^{i\theta})\ d\theta, \tag{2.9}$$

$$N_\infty(\rho;\ U)=\int\limits_{0}^{\rho}\frac{\omega\left(\frac{t}{\rho}\right)}{t}[n\ (t;\ \mu)-n\ (0;\ \mu)]\ dt+n\ (0;\ U)[\log\rho-k_\infty], \tag{2.10}$$

где

$$U_\infty^+\ (\rho e^{i\theta})=\max\ \{U_\infty(\rho e^{i\theta});\ 0\},$$

$$U_\infty^-\ (\rho e^{i\theta})=\max\ \{-U_\infty(\rho e^{i\theta});\ 0\},$$

и, таким образом

$$U_\infty(\rho e^{i\theta})=U_\infty^+\ (\rho e^{i\theta})-U_\infty^-(\rho e^{i\theta}). \tag{2.11}$$

Пользуясь обозначениями (2.9), (2.10) и равенством (2.11), формулу (2.8) можно записать в следующем виде:

$$c_0=m_\infty^+\ (\rho;\ U)-m_\infty^-\ (\rho;\ U)-N_\infty(\rho;\ U),$$

или, что то же самое, в виде

$$m_\omega^+(\rho;\ U) = m_\omega^-(\rho;\ U) + N_\omega(\rho;\ U) + c_0. \qquad (2.12)$$

Таким образом, функция $m_\omega^+(\rho;\ U)$ — среднее положительных значений функции $U_\omega(z)$ на окружности $|z|=\rho$, с точностью до постоянной совпадает с суммой $m_\omega^-(\rho;\ U) + N_\omega(\rho;\ U)$, где первое слагаемое — это среднее отрицательных значений $U_\omega(z)$ на окружности $|z|=\rho$, взятых с положительным знаком, а второе слагаемое— $N_\omega(\rho;\ U)$ зависит лишь от распределения масс функции $U_\omega(z)$ в круге $|z|\leqslant\rho$.

Но для функций вида

$$u(z) = U(z) - V(z),$$

где $U(z)$ и $V(z)$ — субгармонические в круге $|z|<1$ функции, можно установить формулу симметрического характера.

С этой целью запишем формулу (2.12) для функции $V(z)$

$$m_\omega^+(\rho;\ V) = N_\omega(\rho;\ V) + m_\omega^-(\rho;\ V) + c_1. \qquad (2{,}12')$$

Вычитанием формул (2.12) и (2.12′) мы приходим к тождеству

$$m_\omega^+(\rho;\ u) + N_\omega(\rho;\ V) = m_\omega^-(\rho;\ u) + N_\omega(\rho;\ U) + c. \qquad (2.13)$$

Соотношение (2.13) в специальном случае, когда $\omega(x)\equiv 1$, переходит в обобщенную формулу Иенсена-Неванлинны, для разности двух субгармонических функций, установленную И. И. Приваловым [4].

И если теперь возьмем $u(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ есть мероморфная функция, тогда $n(r;\ U)$ будет означать число нулей функции $f(z)$ в круге $|z|\leqslant r$, а $n(r;\ V)$ — число ее полюсов в том же круге, причем каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность. В этом случае мы приходим к классам формул типа Иенсена-Неванлинны, ассоциированных с произвольной функцией $\omega(x)\in\Omega$. Эти формулы впервые были установлены М. М. Джрбашяном [2], в связи с построенной им общей теорией факторизации мероморфных в круге функций.

Следовательно, естественно, следуя М. М. Джрбашяну, ввести в рассмотрение функцию

$$T_\omega(\rho) \equiv T_\omega(\rho;\ u) \equiv m_\omega^+(\rho;\ u) + N_\omega(\rho;\ V) \geqslant 0 \qquad (2.14)$$

и называть ее ω-характеристической для функции $u = U - V$.

Ясно, что $T_\omega(\rho)$ одновременно зависит как от роста функции $u(z)$, так и от распределения масс субгармонической функции $V(z)$. Формула (2.13) выражает определенное равновесие между членами $N_\omega(\rho;\ V)$ и $m_\omega(\rho;\ u)$, так как, заменив функцию $u(z)$ функцией $[-u(z)]$, т. е. изменив знаки U и V, функция $T_\omega(\rho)$ не изменится, или, более точно, разность $T_\omega(\rho;\ u) - T_\omega(\rho;\ -u)$ будет постоянной. Поэтому (2.13) можно назвать соотношением ω-равновесия.

Полагая, что $\omega(x)\in\Omega$, обозначим через E_ω — множество субгармонических в круге $|z|<1$ функций $U(z)$, для которых

$$T_{\infty}(U) = \sup_{0<\rho<1}\left\{\int_0^1 U_{\infty}^{+}(\rho e^{i\theta})\,d\theta\right\} < +\infty. \tag{2.15}$$

Из этого определения непосредственно следует, что если $U_j(z)\in E_{\infty}$ $(j=1,\ 2)$, то имеем также

$$U_1(z)+U_2(z)\in E_{\infty}.$$

Из теоремы 3 непосредственно вытекает, что $M_{\infty}(z)\in E_{\infty}$.

Приведем еще один важный пример функции из класса E_{∞}.

Лемма 2. *Пусть* $\psi(\theta)$ — *функция ограниченной вариации на* $[0,\ 2\pi]$, *тогда функция*

$$F(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\varphi-\theta,\ r;\ \omega)\,d\psi(\theta) \tag{2.16}$$

принадлежит классу E_{∞}.

Доказательство. Нужно показать, что

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi} F_{\infty}^{+}(re^{i\varphi})\,d\varphi\right\} < +\infty.$$

По лемме E имеем

$$L^{(\infty)}[P(\varphi-\theta,\ r;\ \omega)] = P_0(\varphi-\theta,\ r) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2},$$

и поэтому

$$L^{(\infty)}[F(re^{i\varphi})] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{(\infty)}[P(\varphi-\theta,\ r;\ \omega)]\,d\psi(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_0(\varphi-\theta,\ r)\,d\psi(\theta). \tag{2.17}$$

Поскольку $\psi(\theta)$—функция ограниченной вариации, то ее можно представить в виде разности

$$\psi(\theta) = \psi_1(\theta) - \psi_2(\theta), \tag{2.18}$$

где $\psi_i(\theta)$ $(i=1,\ 2)$—неубывающие ограниченные функции на $[0,\ 2\pi]$. Следовательно, ввиду (2.17) и (2.18), будем иметь

$$m_{\infty}^{+}(F) = \sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}[L^{(\infty)}(F(re^{i\varphi}))]^{+}\,d\varphi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_0(\varphi-\theta,\ r)\,d\psi_1(\theta)\right]d\varphi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<r<1} \left\{ \int_0^{2\pi} d\psi_1(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_0(\varphi - \vartheta, r)\, d\varphi \right\} = \int_0^{2\pi} d\psi_1(\theta) < +\infty,$$

т. е. $F(z) \in E_\infty$.

Лемма 3. *Если $U(z) \in E_\infty$ и $\mu(\zeta)$ — ассоциированное с $U(z)$ положительное распределение масс в круге $|\zeta| < 1$, то*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} [n(t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt < +\infty. \tag{2.19}$$

Доказательство. Действительно, согласно определению функции $N_\infty(\rho; U)$,

$$N_\infty(\rho; U) = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} [n(\rho t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt + n(0; U)\, [\log \rho - k_\infty],$$

причем очевидно, что она монотонно возрастающая, $0 < \rho < 1$.

С другой стороны, по формуле (2.13) имеем

$$m_\infty^+(\rho; U) = m_\infty^-(\rho; U) + N_\infty(\rho; U) + c_0.$$

Но поскольку $U(z) \in E_\infty$,

$$\sup_{0<\rho<1} \{m_\infty^+(\rho; U)\} = \sup_{0<\rho<1} \{m_\infty^-(\rho; U) + N_\infty(\rho; U) + c_0\} = T_\infty(U) < +\infty.$$

И так как $m_\infty^-(\rho; U) \geqslant 0$, то это означает, что существует конечный предел

$$\lim_{\rho \to 1-0} \left\{ \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} [n(\rho t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt \right\} < +\infty.$$

Теперь для произвольного фиксированного $\rho_0 \in (0, 1)$ напишем цепь неравенств

$$\int_0^{\rho_0} \frac{\omega(t)}{t} [n(t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt =$$

$$= \lim_{\rho \to 1-0} \int_0^{\rho_0} \frac{\omega(t)}{t} [n(\rho t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\rho \to 1-0} \left\{ \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} [n(\rho t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt \right\} < +\infty.$$

Отсюда, ввиду произвольности $\rho \in (0, 1)$, вытекает (2.19).

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 4. 1°. *Класс E_ω совпадает с множеством субгармонических в круге $|z|<1$ функций, представимых в виде*

$$U(z)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\zeta)|\,d\mu(\zeta)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\iota}^{\pi}P(\varphi-\theta,\ r;\ \omega)\,d\psi(\theta)\qquad(|z|<1),\tag{2.20}$$

где $\mu(\zeta)$—произвольное положительное распределение масс в круге $|z|<1$, подчиненное условию

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(t)}{t}\,[n(t;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,dt<+\infty,$$

а $\psi(\vartheta)$ — любая вещественная функция на $[0,\ 2\pi]$ с конечным полным изменением.

2°. *Существует такая последовательность $\rho_n\uparrow 1$, что*

$$\psi(\theta)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\theta L^{(\omega)}[U(\rho_n e^{i\theta})]\,d\theta.\tag{2.21}$$

Доказательство. Что любая функция $U(z)$ вида (2.20) входит в класс E_ω, непосредственно следует из теоремы 3 и леммы 2, ввиду отмеченного выше свойства класса E_ω.

Предположим теперь, что $U(z)\in E_\omega$, и докажем, что тогда справедливо представление вида (2.20).

Отметим сначала, что для распределения $\mu(\zeta)$ и функции

$$n(t;\ \mu)=\iint\limits_{0<|\zeta|<t}d\mu(\zeta),$$

ассоциированных с $U(z)$, согласно лемме 3 имеем

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(t)}{t}\,[n(t;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,dt<+\infty.$$

Но тогда, по теореме 1, интеграл

$$M_\omega(z;\ \mu)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\,d\mu(\zeta)$$

определяет функцию, субгармоническую в круге $|z|<1$. Для функции $U(z)$ запишем формулу (1.9)

$$U(re^{i\varphi})=\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log\left|A_\omega\left(\frac{re^{i\varphi}}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho};\ \omega\right)U_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta\quad(r<\rho<1).\tag{2.22}$$

Поскольку $U(z)\in E_\omega$, для каждого ρ $(0<\rho<1)$

$$\int_0^{2\pi} |U_\omega(\rho e^{i\theta})|\, d\theta = m_\omega^+(\rho;\ U) + m_\omega^-(\rho;\ U) < 2T_\omega(U) < +\infty.$$

Обозначая

$$\psi_\rho(\theta) = \int_0^\theta L^{(\omega)}[U(\rho e^{i\theta})]\, d\theta = \int_0^\theta U_\omega(\rho e^{i\theta})\, d\theta \quad (0<\rho<1),$$

получим семейство функций $\{\psi_\rho(\theta)\}$, $(0<\rho<1)$, для которого

$$\sup_{\theta\in[0,\,2\pi]} |\psi_\rho(\theta)| \leqslant \int_0^{2\pi} |U_\omega(\rho e^{i\theta})|\, d\theta < 2T_\omega(U) < +\infty,$$

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(\psi_\rho) \leqslant 2T_\omega(U) < +\infty.$$

Поэтому, согласно первой теореме Хелли, существует функция $\psi(\theta)$ с конечным полным изменением на $[0,\ 2\pi]$ и такая, что

$$\psi(\theta) = \lim_{n\to\infty} \psi_{\rho_n}(\theta) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\theta U_\omega(\rho_n e^{i\theta})\, d\theta,\ \theta\in[0,\ 2\pi],$$

где $\{\rho_n\}$ — некоторая последовательность, $\rho_n \uparrow 1$ при $n\to+\infty$.

Отсюда в силу второй теоремы Хелли вытекает

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\varphi-\theta,\ \frac{r}{\rho_n};\ \omega\right) d\psi_{\rho_n}(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\varphi-\theta,\ r;\ \omega)\, d\psi(\theta). \tag{2.23}$$

Фиксируя z в формуле (2.22) и положив $\rho = \rho_n$, перейдем в ней к пределу при $n\to+\infty$. Имея в виду (2.23) и лемму 1, получим утверждение теоремы.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность проф. М. М. Джрбашяну за постановку задачи и помощь при ее решении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 3.XII.1971

Ա. Մ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ. Միավոր շրջանում սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի ներկայացում (ամփոփում)

Մ. Մ. Ջրբաշյանի ուսումնասիրություններում [1,2] ներմուծված է Ռիման-Լիուվիլի օպերատորի էական ընդհանրացումը հանդիսացող $L^{(\omega)}$ օպերատոր, որի միջոցով կառուցված է միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացման լրիվ տեսություն։

Ներկա աշխատանքում բերված է այդ տեսության հիմնական արդյունքի ընդհանրացումը սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար.

Ենթադրելով, որ $\omega(x)\in\Omega$ յուրաքանչյուր $U(z)$ սուբհարմոնիկ ֆունկցիայի $|z|<1$ շրջանում ապացուցված է

$$U_\infty(z) = L^{(\infty)}\{U(z)\}$$

ֆունկցիա և E_∞ դաս, որը հանդիսանում է շրջանում սուբհարմոնիկ այն $U(z)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց համար

$$\sup_{0<\rho<1}\left\{\int_0^{2\pi} U_\infty^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta\right\} < +\infty,\quad U_\infty^+(\rho e^{i\theta}) = \max\{0,\ U_\infty(\rho e^{i\theta})\}:$$

Ստացված է E_∞ դասի պարամետրական ներկայացումը։

A. M. BADALIAN. *The representation of certain subharmonic functions in unite circle* (summary)

In his earlier papers [1, 2] M. M. Džrbašian has introduced the operator $L^{(\infty)}$, which is an essential generalization of the Rieman-Liuvill operator. With use of $L^{(\infty)}$, full theory of factorization of meromorphic function in the circle $|z| < 1$, was constructed.

The present paper expands this theory on subharmonic functions. Parametric representation of the corresponding class is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, ДАН СССР, 32, 1968, 1075—1111.
2. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., 79, № 4, (8), 1969.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука", М., 1966.
4. *И. И. Привалов.* Субгармонические функции, ОНТИ, НКТП, СССР, М.—Л., 1937.
5. *М. М. Джрбашян.* Классы функций и их параметрическое представление, Современные проблемы теории аналитических функций, Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965, Изд. „Наука", М., 1966, 118—137.