ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 2, 1972 Математика

Р. И. ПОДЛОВЧЕНКО, Г. Н. ПЕТРОСЯН, В. Е. ХАЧАТРЯН

ИНТЕРПРЕТАЦИИ СХЕМ АЛГОРИТМОВ И РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ОТНОШЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕЖДУ СХЕМАМИ

Схемы алгоритмов, рассматриваемые нами, определены в работе [1] и многократно служили объектом исследований в теории программирования. Мы пользуемся описанием схемы алгоритма посредством конечного ориентированного графа, в вершинах которого находятся или операторы, или функции алгебры логики от логических переменных; операторами называются символы некоторого алфавита; и этот алфавит, и список логических переменных являются конечными (такое описание схемы алгоритма дано в работе [2]).

Каждая схема алгоритма порождает свое множество слов, которые называются конфигурациями. Отдельной конфигурации соответствует единственный путь в схеме, берущий начало в ее входе; множеством конфигураций, порождаемых схемой, охватываются все пути в ней, по которым может передвигаться в схеме перерабатываемая ею информация.

Если задаться некоторым множеством M, с каждым оператором связать свое преобразование множества M в себя, а с каждой логической переменной—свое подмножество множества M, принимаемое за область истинности этой переменной, то схема алгоритма, как говорят, получит определенную интерпретацию. Для интерпретированной схемы естественным образом (см. [3]) определяется процесс ее выполнения на произвольном элементе множества M, превращающий интерпретированную схему в алгоритм по переработке элементов множества M в элементы того же множества. Если мы будем фиксировать историю переработки элемента $m \in M$, поступившего на вход схемы, то придем к понятию i-конфигурации, порождаемой интерпретированной схемой; можно фиксировать окончательный результат переработки элемента m, и тогда с интерпретированной схемой будет ассоциироваться реализуемая ею функция, которая отображает множество M в себя.

Одна и та же схема алгоритма может быть интерпретирована многими способами, и при каждой ее интерпретации возникают порождаемое схемой множество i-конфигураций и реализуемая схемой функция.

Нами рассмотрены три типа отношений эквивалентности между схемами алгоритмов. В основу первого положено сравнение подмножеств множеств конфигураций, порождаемых схемами. Отношения второго типа строятся путем сравнения порождаемых схемами множеств i-конфигураций; при этом множество рассматриваемых интерпретаций схем выбирается произвольно. Наконец, третий тип отношений основан на сравнении реализуемых схемами функций; множество интерпретаций схем и здесь берется произвольным.

Примером отношений эквивалентности первого типа являются отношения равносильности схем и их частичной равносильности, введенные в работе [1]; примером отношений третьего типа—отношение сильной эквивалентности граф—схем, определенное в [3], и отношение функциональной эквивалентности дискретных преобразователей, определенное в [4].

Рассматриваемые нами отношения эквивалентности оказались тесно связанными между собой; выявлению этих связей и посвящена данная работа.

Все понятия, используемые в работе, даны в ней самой. При этом конфигурации, интерпретации, i-конфигурации определены как самостоятельные объекты, вне связи их со схемами алгоритмов. Это избавило от необходимости описания и процесса порождения схемой конфигураций, и процесса выполнения интерпретированной схемы, известных из работ [2] и [3].

§ 1. Конфигурации, интерпретации и i-конфигурации

1.1. Зададимся алфавитами

$$A=\{A_0, A_1,\cdots, A_n\},\ n\geqslant 1,$$

$$P=\{p_1, p_2,\cdots, p_k\},\ k\geqslant 1;$$

порядок пересчета элементов в каждом из этих алфавитов полагаем фиксированным. Буквы алфавита A назовем *операторами*, буквы алфавита P—*предикатами*.

1.2. Предикат p_j, $j=1, 2,\cdots, k$, будем рассматривать как переменную, принимающую два значения: 0 и 1; тогда алфавитом P индуцируется множество χ, элементами которого являются наборы длины k, состоящие из нулей и единиц: если $x=(y_1, y_2,\cdots, y_k)$ — такой набор, то в нем y_j — значение переменной p_j, $j=1, 2,\cdots, k$.

1.3. Отображение множества χ в множество $\mathbf{B}(\chi)_{\{\varnothing\}}$, где $\mathbf{B}(\chi)$—множество подмножеств множества χ, будем обозначать через $s(x)$.

Соответствие, при котором каждому оператору $A_l\in A$, отличному от A_0, сопоставлено свое отображение $s_l(x)$, назовем *распределением сдвигов на* A и будем записывать в виде кортежа

$$S=<s_1(x),\ s_2(x),\cdots,\ s_n(x)>.$$

1.4. Конечную сдвоенную последовательность

$$q=\begin{matrix} & x_1 & & x_2 & \cdots & x_t \\ A_{j_1} & & A_{j_2} & \cdots & A_{j_t} & \end{matrix},\ t\geqslant 1,$$

верхняя строка которой составлена из элементов множества χ, а нижняя из операторов множества A, назовем *конфигурацией, допустимой для распределения сдвигов* S (или просто конфигурацией, так как S не меняется в процессе наших рассмотрений), если

1) $A_{j_1} = A_0$, и это единственное вхождение A_0 в q;
2) для каждого $l = 2, 3, \cdots, t$,

$$x_l \in s_{jl}\ (x_{l-1}).$$

Обозначим через K множество всех конфигураций, допустимых для S.

1.5. Будем говорить, что на множествах A и P задана *интерпретация* J, *допустимая для распределения сдвигов* S, если

1) дано некоторое множество $M = \{m\}$;

2) каждому предикату $p_j \in P$ сопоставлено свое подмножество $M_j \subseteq M$; это соответствие будем записывать как $\mu(P)$; оно индуцирует отображение δ множества M в множество χ, определяемое следующим образом: элементу $m \in M$ сопоставляется набор $\delta(m) = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$, в котором

$$y_j = \begin{cases} 1, \text{ если } m \in M_j, \\ 0, \text{ если } m \notin M_j, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \cdots, k;$$

3) каждому оператору $A_l \in A$, отличному от A_0, сопоставлено свое отображение φ_l множества M в себя, и φ_l удовлетворяет требованию:

$$\underset{m \in M}{\forall}\ [\delta(\varphi_l(m)) \in s_l(\delta(m))];$$

это соответствие будем записывать как $\varphi(A)$.

Заметим, что заданием множеств M_j, $j = 1, 2, \cdots, k$, индуцируется отображение χ в $\mathrm{B}(M)$: набору $x = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$ в этом отображении соответствует множество

$$M_x = \bigcap_{j=1}^{k} M_j^{y_j},$$

где

$$M_j^{y_j} = \begin{cases} M_j, \text{ если } y_j = 1 \\ M/M_j, \text{ если } y_j = 0 \end{cases} \qquad j = 1, 2, \cdots, k;$$

это соответствие фиксируем записью: $\bar{\mu}(\chi)$.

Верно и обратное: заданием множеств $M_x \subseteq M$, $x \in \chi$, удовлетворяющих требованиям: $\underset{x, x' \in \chi}{\forall} (x \neq x') \rightarrow M_x \cap M_{x'} = \varnothing$ и $\bigcup_{x \in \chi} M_x = M$, определяются множества M_j, $j = 1, 2, \cdots, k$; $M_j = \bigcup M_x$, где суммирование ведется по всем таким наборам $x = (y_1, y_2, \cdots, y_k)$, для которых $y_j = 1$.

Таким образом, при задании интерпретации J можно пользоваться как отображением $\mu(P)$, так и отображением $\bar{\mu}(\chi)$; отсюда — две формы записи интерпретации J:

$$J=\langle M,\ \mu(P),\ \varphi(A)\rangle=\langle M,\ \bar{\mu}(\chi),\ \varphi(A)\rangle.$$

Мощностью интерпретации J мы будем называть мощность множества M. Множество всех интерпретаций, допустимых для распределения сдвигов S, обозначим через I.

1.6. Пусть задана интерпретация $J=\langle M,\ \mu(P),\ \varphi(A)\rangle\in I$. Сдвоенную последовательность

$$r=\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_t \\ A_{j_1} & A_{j_2} & \cdots & A_{j_t} \end{matrix},\quad t\geqslant 1,$$

верхняя строка которой состоит из элементов множества M, а нижняя—из операторов алфавита A, назовем *i-конфигурацией, индуцируемой интерпретацией J*, если

1) $A_{j_1}=A_0$ и нет других вхождений оператора A_0 в r;

2) для всех $l=2, 3,\cdots, t$

$$m_l=\varphi_{j_l}(m_{l-1}).$$

Пусть r —i-конфигурация; будем говорить, что элемент m_1 начинает i-конфигурацию r, а элемент m_t — завершает ее.

Множество всех i-конфигураций, индуцируемых интерпретацией J, обозначим через $R(J)$.

1.7. Из определения i-конфигурации и свойств отображений φ_i, $i=1, 2,\cdots, n$, принадлежащих интерпретации J, следует

Утверждение 1. *Какой бы ни была i-конфигурация*

$$r=\begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_t \\ A_{j_1} & A_{j_2} & \cdots & A_{j_t} \end{matrix},$$

индуцируемая интерпретацией $J\in I$, последовательность

$$\hat{r}=\begin{matrix} \delta(m_1) & \delta(m_2) & \cdots & \delta(m_t) \\ A_{j_1} & A_{j_2} & \cdots & A_{j_t} \end{matrix}$$

представляет собой конфигурацию, допустимую для распределения сдвигов S (т. е. $\hat{r}\in K$).

Доказательство этого утверждения опускаем.

1.8. Пусть

$$\hat{R}(J)=\{\hat{r}/r\in R(J)\}.$$

По определению

а) множество $I'\subseteq I$ интерпретаций *покрывает* множество $K'\subseteq K$ конфигураций, если

$$K'\subseteq\bigcup_{J\in I'}\hat{R}(J);$$

в частности, если множество I' состоит из одной интерпретации J, а множество K'—из одной конфигурации q, то будем говорить, что интерпретация J покрывает конфигурацию q;

б) множество $I'\subseteq I$ интерпретаций *не выводит* из множества $K'\subseteq K$ конфигураций, если

$$K' \supseteq \bigcup_{J \in I'} \hat{R}(J).$$

Имеет место

Утверждение 2. *Какой бы ни была конфигурация $q \in K$, существует такая конечная интерпретация J^q, которая покрывает конфигурацию q.*

Доказательство этого утверждения состоит в построении требуемой интерпретации

$$J^q = \langle M^q, \ \mu^q(\chi), \ \varphi^q(A) \rangle.$$

Множество M^q слагаем из двух множеств: $\overline{M}^q$ и $\overline{M}$, не имеющих общих элементов. Множество $\overline{M}$ возьмем состоящим из 2^k элементов и установим взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств $\overline{M}$ и χ; пусть $\overline{m}(x)$ — элемент из $\overline{M}$, соответствующий элементу $x \in \chi$, а $\Delta(\overline{m})$—набор из χ, соответствующий элементу $\overline{m} \in \overline{M}$.

В каждом из множеств $s_i(x) \subseteq \chi$, $x \in \chi$, $i = 1, 2, \cdots, n$, выберем своего представителя; обозначим его через $\psi_i(x)$. Пусть

$$q = \overset{x_1}{A_{j_1}} \overset{x_2}{A_{j_2}} \cdots \overset{x_t}{A_{j_t}};$$

множество $\overline{M}^q$ возьмем состоящим из элементов $m_1, \cdots, m_t$; элементу m_l сопоставим набор x_l, $l=1, 2, \cdots t$, и через $\overline{M}^q_x$ обозначим прообраз элемента $x \in \chi$ в этом отображении $\overline{M}^q$ в χ.

Множество M^q построено. Отметим, что любому элементу $m \in M^q$ соответствует единственный элемент $\delta(m) \in \chi$:

$$\delta(m) = \begin{cases} \Delta(m), & \text{если } m \in \overline{M}; \\ x_l, & \text{если } m \in \overline{M}^q \text{ и } m = m_l. \end{cases}$$

Множество M^q_x, сопоставляемое набору $x \in \chi$ в отображении $\mu^q(\chi)$, определим равенством

$$M^q_x = \overline{M}^q_x \cup \{\overline{m}(x)\}.$$

Отображение φ^q_i, сопоставляемое оператору A_i в соответствии $\varphi^q(A)$, определим с помощью последовательности

$$r = \overset{m_1}{A_{j_1}} \overset{m_2}{A_{j_2}} \cdots \overset{m_t}{A_{j_t}};$$

если $m = m_l \in \overline{M}^q$ и $A_{j_{l+1}} = A_i$, то полагаем $\varphi^q_i(m) = m_{l+1}$, во всех остальных случаях $\varphi^q_i(m) = \overline{m}(\psi_i(\delta(m)))$.

Интерпретация J^q построена. Легко проверить, что J^q — допустима для распределения сдвигов S, а последовательность r есть i-конфигурация, индуцируемая интерпретацией J^q и такая, что $\hat{r} = q$. Утверждение 2 доказано.

§ 2. Схема алгоритма; порождаемые ею множества конфигураций и i-конфигураций; отображение, осуществляемое интерпретированной схемой

2.1. Будем обозначать через $\alpha(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ (или просто через α) функцию алгебры логики от переменных $p_1, p_2, \cdots, p_k$; пусть D — множество таких функций.

2.2. Схемой алгоритма, построенной над алфавитами A и P, будем называть конечный ориентированный граф, в котором

1) выделены две вершины: вход — вершина, из которой исходит одна дуга и в которую не приходит ни одной дуги графа; выход—вершина, из которой не исходит ни одной дуги; остальные вершины (их может быть пустое множество) делятся на операторные—из каждой такой вершины исходит одна дуга—и предикатные—из каждой вершины этого типа исходят две дуги, одна из них некоторым образом отмечена;

2) входу сопоставлен символ $A_0 \in A$, каждой операторной вершине сопоставлен свой оператор $A_l \in A$; отличный от A_0, каждой предикатной вершине—своя функция α из множества D.

2.3. Схеме алгоритма **A**, рассматриваемой при распределении сдвигов S, сопоставим множество $K(\mathbf{A}) \subseteq K$, подтверждаемых схемой конфигураций.

В этих целях определим функцию $\lambda(v, x)$, сопоставляющую каждой операторной вершине (или входу) v схемы **A** и каждому набору $x \in X$ некоторую вершину w схемы **A**. Вершина w находится следующим образом: с набором x путешествуем по схеме **A**, начиная двигаться в ней по дуге (единственной), исходящей из вершины v; при этом переход через каждую встречающуюся по пути движения предикатную вершину не меняет набора x, выбор дуги—одной из двух, исходящих из предикатной вершины—проводится по правилу: если функция, сопоставленная предикатной вершине, равна 1 на данном наборе x, то дальше идем по отмеченной дуге, в противном случае — по неотмеченной; путешествие по схеме **A** заканчивается или в первой встретившейся по пути операторной вершине (или в выходе схемы), или во вторично встретившейся в процессе путешествия предикатной вершине; это и будет вершина w.

По определению, конфигурация

$$q = \overset{x_1}{A_{l_1}} \overset{x_2}{A_{l_2}} \cdots \overset{x_l}{A_{l_l}}; \quad q \in K,$$

принадлежит множеству $K(\mathbf{A})$ в том и только том случае, если вершина $v_2 = \lambda(v_1, x_1)$, где v_1—вход схемы **A**, v_2—операторная и такая, что ей сопоставлен оператор A_{l_2}; вершина $v_3 = \lambda(v_2, x_2)$ — операторная и ей сопоставлен оператор $A_{l_3}, \cdots$; вершина $v_l = \lambda(v_{l-1}, x_{l-1})$, где v_{l-1} — операторная вершина, полученная на предыдущем шаге, v_l — тоже операторная и ей сопоставлен оператор A_{l_l}.

Пусть $q \in K$ (A); будем говорить, что конфигурация q приводит в вершину $w(q) = \lambda(v_i, x_i)$ схемы A.

Множество конфигураций из K (A), приводящих в выход схемы A, обозначим через K^* (A).

Справедливо

Утверждение 3. *Какой бы ни была конфигурация $q \in K$, существует схема* A *такая, что* $q \in K^*(\mathrm{A}) \subseteq K(\mathrm{A})$.

Оно доказывается построением требуемой схемы A; последнее нами опускается.

2.4. Схему A, рассматриваемую при интерпретации $J \in I$ будем называть *интерпретированной* и обозначать через JA.

Определим множество $R(J\mathrm{A}) \subseteq R(J)$ i-конфигураций, порождаемых схемой JA: i-конфигурация $r \in R(J)$ принадлежит множеству $R(J\mathrm{A})$ в том и только том случае, если конфигурация $\hat{r}$ принадлежит множеству K (A).

Множество i-конфигураций r из $R(J\mathrm{A})$, для которых $\hat{r} \in K^*$ (A), обозначим через $R^*(J\mathrm{A})$.

Из определения i-конфигурации следует

Утверждение 4. *Если $r \in R^*(J\mathrm{A})$, то в множестве $R^*(J\mathrm{A})$ нет другой i-конфигурации, которая начиналась бы тем же элементом, что и r.*

Таким образом, интерпретированная схема JA осуществляет частичное отображение множества M в себя: каждому элементу m, начинающему какую-либо i-конфигурацию $r \in R^*(J\mathrm{A})$, в этом отображении сопоставляется элемент (обозначим его через $J\mathrm{A}(m)$), завершающий эту i-конфигурацию.

В заключение отметим, что из утверждения 3 следует

Утверждение 5. *Для всякой i-конфигурации $r \in R(J)$ можно построить такую схему* A, *что* $r \in R^*(J\mathrm{A}) \subseteq R(J\mathrm{A})$.

§ 3. Различные отношения эквивалентности между схемами; связи между отношениями эквивалентности

3.1. Рассмотрим три типа отношений эквивалентности между схемами.

I. Пусть задан некоторый эффективный способ ν, посредством которого из множества K (A), где A—произвольная схема, выделяется его подмножество K^ν(A).

Схемы A_1 и A_2 назовем *ν-эквивалентными*, если

$$K^\nu(\mathrm{A}_1) = K^\nu(\mathrm{A}_2);$$

это отношение между схемами записываем в виде $\mathrm{A}_1 \overset{\nu}{\sim} \mathrm{A}_2$; оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

В частности, если способ ν таков, что для всех схем A $K^\nu(\mathrm{A}) = K(\mathrm{A})$, мы получим отношение равносильности схем, определенное в работе [1]; обозначим его через $\mathrm{A}_1 \sim \mathrm{A}_2$. Легко видеть, что при любом ν

$$\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1 \overset{\nu}{\sim} \mathbf{A}_2.$$

Другой частный случай: пусть для каждой схемы **A** множество $K^{\nu}(\mathbf{A})$ совпадает с множеством $K^*(\mathbf{A})$; тогда отношение ν-эквивалентности превратится в отношение частичной равносильности схем, данной в той же работе [1]*); это отношение между схемами будем записывать в виде $A_1 \overset{*}{\sim} \mathbf{A}_2$.

Наконец, можно указать целую серию способов ν: задается натуральное число n_0; из множества $K(\mathbf{A})$ выделяется подмножество $K_{n_0}(\mathbf{A})$, состоящее из всех таких конфигураций $q \in K(\mathbf{A})$, длина которых не превышает числа n_0; и так для всех схем **A**.

II. Пусть $I' \subseteq I$. Схемы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ назовем *эквивалентными на множестве I' интерпретаций* (и будем записывать это отношение в виде $\mathbf{A}_1 \simeq \mathbf{A}_2\,(I')$), если

$$\underset{J \in I'}{\forall} [R(J\mathbf{A}_1) = R(J\mathbf{A}_2)];$$

частично эквивалентными на множестве J интерпретаций (это отношение записываем как $\mathbf{A}_1 \overset{*}{\simeq} \mathbf{A}_2\,(I')$), если

$$\underset{J \in I'}{\forall} [R^*(J\mathbf{A}_1) = R^*(J\mathbf{A}_2)].$$

Каждое из введенных отношений между схемами является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

III. Пусть $I' \subseteq I$. По определению, схемы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ *функционально эквивалентны на множестве I' интерпретаций* (фиксируем это в виде $\mathbf{A}_1 \overset{f}{\simeq} \mathbf{A}_2\,(I')$), если

$$\underset{J \in I'}{\forall} [J\mathbf{A}_1(m) = J\mathbf{A}_2(m)];$$

здесь равенство $J\mathbf{A}_1(m) = J\mathbf{A}_2(m)$ понимается как равенство отображений. Отношение $\mathbf{A}_1 \overset{f}{\simeq} \mathbf{A}_2\,(I')$ обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

В том частном случае, когда множество I' берется равным множеству I, а распределение сдвигов на A таково, что при всех $i = 1, 2, \cdots, n$ и при всех $x \in \chi$ $s_i(x) = \chi$, отношение функциональной эквивалентности схем совпадает с отношением сильной эквивалентности схем, введенным в работе [2].

3.2. Пусть $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — произвольные схемы, ν — некоторый способ выделения из множества $K(\mathbf{A})$ подмножества $K^{\nu}(\mathbf{A})$.

Введем обозначение: $\overline{K}(\mathbf{A}) = K / K(\mathbf{A})$.

Лемма 1. *Если множество $I' \subseteq I$ интерпретаций не выводит из множества* $\{\overline{K}(\mathbf{A}_1) \cap \overline{K}(\mathbf{A}_2)\} \cup K^{\nu}(\mathbf{A}_1)$ *конфигураций, то*

---

* В обоих случаях мы пренебрегли тем, что используемое нами понятие распределения сдвигов на алфавите A является более широким по сравнению с одноименным понятием, используемым в [1].

$$A_1 \overset{\cdot}{\sim} A_2 \to A_1 \simeq A_2\,(I').$$

Доказательство. Пусть $r \in R\,(JA_1)$, где $J \in I'$; покажем, что $r \in R\,(JA_2)$. Этого будет достаточно для доказательства леммы, так как симметричность всех рассматриваемых нами отношений эквивалентности позволяет поменять ролями схемы A_1 и A_2 и из установленного получить утверждение

$$r \in R\,(JA_2) \to r \in R\,(JA_1)^*.$$

Итак, $r \in R\,(JA_1)$, следовательно, $\hat{r} \in K(A_1)$; с другой стороны, $\hat{r} \in \hat{R}\,(J)$, а по условию леммы $\hat{R}\,(J) \subseteq K^{\cdot}\,(A_1) \cup \{\overline{K}(A_1) \cap \overline{K}\,(A_2)\}$; сопоставляя утверждения $\hat{r} \in K\,(A_1)$ и $\hat{r} \in K^{\cdot}(A_1) \cup \{\overline{K}(A_1) \cap \overline{K}\,(A_2)\}$, получим, что $\hat{r} \in K^{\cdot}\,(A_1)$. Воспользуемся теперь тем, что $K^{\cdot}\,(A_1) = K^{\cdot}\,(A_2)$, получим $\hat{r} \in K^{\cdot}\,(A_2)$; следовательно, $\hat{r} \in K\,(A_2)$, а отсюда $r \in R\,(JA_2)$.

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует

Утверждение 6. *Если схемы A_1 и A_2 равносильны, то они эквивалентны на любом множестве $I' \subseteq I$ интерпретаций, т. е.*

$$A_1 \sim A_2 \to \underset{I' \subseteq I}{\forall}\,[A_1 \simeq A_2\,(I')].$$

Действительно, в рассматриваемом случае $K^{\cdot}\,(A_1) = K\,(A_1)$, $K^{\cdot}(A_2) = K\,(A_2)$ и $K\,(A_1) = K\,(A_2)$; следовательно, $K^{\cdot}\,(A_1) \cup \{\overline{K}\,(A_1) \cap \cap\, \overline{K}\,(A_2)\} = K$, и так как любое множество интерпретаций не выводит из множества K конфигураций (см. утверждение 1), то будет справедливым наше утверждение.

Убедимся в верности и

Утверждения 7. *Если схемы A_1 и A_2 частично равносильны, то они частично эквивалентны на любом множестве $I' \subseteq I$ интерпретаций, т. е.*

$$A_1 \overset{*}{\sim} A_2 \to \underset{I' \subseteq I}{\forall}\,[A_1 \overset{*}{\simeq} A_2\,(I')].$$

Действительно, какой бы ни была i-конфигурация $r \in R^*\,(JA_1)$, где $J \in I'$, конфигурация $\hat{r}$ принадлежит множеству $K^*\,(A_1)$; так как по условию $K^*\,(A_1) = K^*\,(A_2)$, то $\hat{r} \in K^*\,(A_2)$, а отсюда $r \in R^*\,(JA_2)$.

3.3. Предположим, что выделение подмножества $K^{\cdot}\,(A)$ из множества $K\,(A)$ сопровождается пометкой всех конфигураций, попадающих в $K^{\cdot}\,(A)$. Считаем при этом, что если интерпретация J покрывает некоторую (непомеченную) конфигурацию q, то она покрывает и

---

* При доказательстве всех последующих лемм и утверждений мы будем руководствоваться высказанными соображениями.

помеченную конфигурацию q. Тогда, какими бы ни были схема $\mathbf{A}$ и помеченная конфигурация q, справедливо утверждение

$$q \in K(\mathbf{A}) \to q \in K^{\vee}(\mathbf{A}). \qquad (1)$$

Опираясь на него, докажем лемму.

Лемма 2. *Если множество $I_0 \subseteq I$ интерпретаций покрывает множество $K^{\vee}(\mathbf{A}_1) \cup K^{\vee}(\mathbf{A}_2)$ конфигураций, то*

$$\mathbf{A}_1 \simeq \mathbf{A}_2 \, (I_0) \to \mathbf{A}_1 \overset{\vee}{\sim} \mathbf{A}_2.$$

Доказательство. Пусть $q \in K^{\vee}(\mathbf{A}_1)$, покажем, что $q \in K^{\vee}(\mathbf{A}_2)$. По условию леммы, $K^{\vee}(\mathbf{A}_1) \subseteq \bigcup_{J \in I_0} \hat{R}(J)$; следовательно, найдется такая интерпретация $J_0 \in I_0$, что $q \in \hat{R}(J_0)$; предположим, что i-конфигурация $r_0 \in R(J_0)$ обладает свойством: $\hat{r}_0 = q$. Легко видеть, что $r_0 \in R(I_0\mathbf{A}_1)$; но $R(J_0\mathbf{A}_1) = R(J_0\mathbf{A}_2)$, поэтому $r_0 \in R(J_0\mathbf{A}_2)$; последнее возможно лишь при условии: $\hat{r}_0 = q \in K(\mathbf{A}_2)$; отсюда и из (1) следует $q \in K^{\vee}(\mathbf{A}_2)$. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает

Утверждение 8. *Если множество $I_0 \subseteq I$ интерпретаций покрывает множество $K(\mathbf{A}_1) \cup K(\mathbf{A}_2)$ конфигураций, то*

$$\mathbf{A}_1 \simeq \mathbf{A}_2 \, (I_0) \to \mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2.$$

Утверждение 9. *Если множество $I_0 \subseteq I$ интерпретаций покрывает множество $K^*(\mathbf{A}_1) \cup K^*(\mathbf{A}_2)$ конфигураций, то*

$$\mathbf{A}_1 \overset{\bullet}{\simeq} \mathbf{A}_2 \, (I_0) \to \mathbf{A}_1 \overset{\bullet}{\sim} \mathbf{A}_2;$$

доказывается так же, как и лемма 2.

3.4. Используем обозначение

$$K^{\vee} = \bigcup_{\mathbf{A}} K^{\vee}(\mathbf{A})$$

и выведем из леммы 2

Утверждение 10. *Если множество $I_0 \subseteq I$ интерпретаций покрывает множество $K^{\vee}$ конфигураций, то для любых схем $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$*

$$\mathbf{A}_1 \simeq \mathbf{A}_2 \, (I_0) \to \mathbf{A}_1 \overset{\vee}{\sim} \mathbf{A}_2; \qquad (2)$$

если же еще $K^{\vee} = K$, то для любых схем $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$

$$\mathbf{A}_1 \simeq \mathbf{A}_2 \, (I_0) \to \mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2. \qquad (3)$$

Справедливость импликации (2) очевидна; чтобы установить истинность импликации (3), достаточно заметить, что выполнены посылки утверждения 8.

Множество I_0 интерпретаций, покрывающее множество K конфигураций, можно составить, беря для всех $q \in K$ интерпретации J^q, построенные при доказательстве утверждения 2. И тогда становится очевидным

Утверждение 11. *Если схемы* A_1 *и* A_2 *эквивалентны на множестве, состоящем из всех конечных интерпретаций, то они равносильны.*

3.5. Легко видеть, что для любого множества $I' \subseteq I$ интерпретаций справедливо утверждение

$$A_1 \stackrel{\cdot}{\simeq} A_2\,(I') \to A_1 \stackrel{f}{\simeq} A_2\,(I').$$

Мы установим существование такого множества $I_0 \subseteq I$, для которого будет верным утверждение

$$A_1 \stackrel{f}{\simeq} A_2\,(I_0) \to \underset{I' \subseteq I}{\forall} [A_1 \stackrel{\cdot}{\simeq} A_2\,(I')]. \tag{4}$$

Лемма 3. *Пусть множество* I_0 *состоит из всех таких интерпретаций* J^q, *для которых* $q \in K^*(A_1) \cup K^*(A_2)$; *тогда*

$$A_1 \stackrel{f}{\simeq} A_2\,(I_0) \to A_1 \stackrel{\cdot}{\sim} A_2.$$

Доказательство. Возьмем $q \in K^*(A_1)$ и покажем, что $q \in K^*(A_2)$.

По условию леммы $J^q \in I_0$. Обозначим через m—первый элемент, а через m^*—последний элемент упорядоченного множества $\overline{M}^q$. Из построения интерпретации J^q видно, что множеству $R(J^q)$ принадлежит единственная i-конфигурация, которая начинается элементом m и завершается элементом m^*, и если это—r, то $\hat{r} = q$.

Так как $q \in K^*(A_1)$, то $r \in R^*(J^q A_1)$ и $J^q A_1(m) = m^*$. По условию леммы $J^q A_1(m) = J^q A_2(m)$; но равенство $J^q A_2(m) = m^*$ означает, что $r \in R^* J^q A_2)$, а отсюда $\hat{r} = q \in K^*(A_2)$.

Лемма доказана.

Из леммы 3 и утверждения 7 и следует (4).

Утверждение 12. *Пусть*

$$I^* = \{J^q,\ q \in K\},$$

тогда для любых схем A_1 *и* A_2

$$A_1 \stackrel{f}{\simeq} A_2\,(I^*) \to A_1 \stackrel{\cdot}{\sim} A_2;$$

очевидным образом вытекает из леммы 3.

В заключение отметим, что отношение сильной эквивалентности, введенное в работе [2], совпадает с отношением частичной равносильности, взятым из работы [1]. Действительно

$$A_1 \stackrel{f}{\simeq} A_2\,(I) \to A_1 \stackrel{f}{\simeq} A_2\,(I^*) \to A_1 \stackrel{\cdot}{\sim} A_2,$$

вместе с тем

$$A_1 \stackrel{\cdot}{\sim} A_2 \to A_1 \stackrel{\cdot}{\simeq} A_2\,(I) \to A_1 \stackrel{f}{\simeq} A_2\,(I).$$

Ереванский государственный
университет

Поступило 12.VII.1971

Ռ. Ի. ՊՈԴԼՈՎՉԵՆԿՈ, Գ. Ն. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Վ. Ե. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Հաշվեկանոնների սխեմաների մեկնարկներ և սխեմաների միջև համարժեքության հարաբերության տարբեր տիպեր *(ամփոփում)*

Հաշվեկանոնների (ալգորիթմների) սխեման մի առարկա է, որը, նրա տարրերը մեկնաբանելիս, վեր է ածվում հաշվեկանոնի։ Միևնույն սխեման կարող է մեկնաբանվել տարբեր ձևերով և, հետևաբար, կրում է իր մեջ հաշվեկանոնների ամբողջ մի դաս։ Սխեմաների միջև հնարավոր են համարժեքության տարբեր հարաբերություններ՝ թե սխեմաների մեկնաբանման վրա հիմնված և թե բուն սխեմաների լոկ կառուցվածքային հատկությունները օգտագործող։ Երկրորդ տիպի հարաբերություններով որոշվող համարժեքությունները, առավելապես, ձևական բընույթի են, հաճախ սակայն, դրան ի փոխ, կանոնհաշվելի (հաշվեկանոնային լուծում ունեցող)։ Համարժեքության այս հարաբերությունների բովանդակային իմաստը վեր է հանվում վերջիններս առաջին տիպի հարաբերությունների հետ բաղդատելիս։

Հոդվածը նվիրված է հաշվեկանոնների սխեմաների վրա սահմանված համարժեքության այդ հարաբերությունների միջև եղած կապերի ուսումնասիրությանը։

R. I. PODLOVCHENKO, G. N. PETROSSIAN, V. E. KHACHATRIAN.

The interpretation of algorithmic schemes and different relations of equivalence between the schemes (summary)

An algorithmic scheme becomes an algorithm when an interpretation is given to its elements. The same scheme may be interpreted in different ways and thus a class of algorithms is associated. The schemes admit different equivalence relations based either on the interpretation or on the structure of the scheme. Interconnections between equivalence relations defined for algorithmic schemes are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. И. Янов.* О логических схемах алгоритмов, сб. Проблемы кибернетики, вып. 1, М., Физматгиз, 1958, 57—127.
2. *А. П. Ершов.* Операторные алгоритмы. III (Об операторных схемах Янова), сб. Проблемы кибернетики, вып. 20, изд. „Наука", М., 1968, 181—200.
3. *Л. А. Калужнин.* Об алгоритмизации математических задач, сб. Проблемы кибернетики, вып. 2, М., Физматгиз, 1959, 51—67.
4. *А. А. Летичевский.* Функциональная эквивалентность дискретных преобразователей, журн. „Кибернетика", № 2, Киев, 1969, 5—16.