ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 2, 1972 Математика

В. Х. МУСОЯН

О ЛАКУНАРНЫХ СИСТЕМАХ ДИРИХЛЕ

Введение

Пусть E — измеримое множество действительных чисел с положительной мерой Лебега. Если f — комплекснозначная измеримая функция, определенная на E, то обозначим

$$\|f\|_E = \left\{ \int_E |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \quad (1 < p < \infty).$$

Через $L^p(E)$ обозначим множество всех f, для которых $\|f\|_E < \infty$. Число $\|f\|_E$ будем называть $L^p(E)$-нормой функции f.

Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots;\ \lambda_n \to \infty$. Рассмотрим систему Дирихле

$$\{e^{-2\pi\lambda_n x}\} \tag{1}$$

в пространстве $L^p(E)$.

Л. Шварц в работе [1] изучает систему (1) в пространствах

$$L^p(0, \infty) \text{ и } L^p(A, B), \ -\infty < A < B < \infty.$$

Основной результат Шварца заключается в следующем.

Теорема I. Если ряд $\sum 1/\lambda_n$ сходится и если $\lambda_{n+1} - \lambda_n > q > 0$, то каждая функция $F(x)$, аппроксимируемая по $L^p(0, \infty)$-норме конечными линейными комбинациями функций из системы (1), обладает следующими свойствами:

1°. Существует функция $F(z)$, $z = x + iy$, аналитическая в полуплоскости $x > 0$, которая совпадает почти всюду на $(0, \infty)$ с функцией $F(x)$;

2°. Функция $F(z)$ разлагается в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_n c_n e^{-2\pi\lambda_n z},$$

нормально сходящийся в полуплоскости $x \geqslant \varepsilon > 0$;

3°. Имеют место неравенства

$$e^{2\pi\lambda_1 x} |F(z)| \leqslant \sum_n |c_n| \, e^{2\pi(\lambda_1 - \lambda_n)x} \leqslant C(x) \|F\|_{(0,\infty)},$$

где $C(x)$ зависит только от x и остается ограниченной, когда $x > \varepsilon > 0$.

Далее Шварц доказывает следующую лемму (на самом деле Шварц доказывает более общую лемму, из которой эта лемма получается как частный случай).

Если $P(x) = \sum a_n e^{-2\pi\lambda_n x}$ — полином по системе (1) и если ряд $\sum 1/\lambda_n$ сходится, то

$$\|P\|_{(A,\infty)} \leqslant C \|P\|_{(A,B)},$$

где постоянная C зависит только от последовательности $\{\lambda_n\}$ и от интервала (A, B).

Из этой леммы и теоремы I следует

Теорема II. Если ряд $\sum 1/\lambda_n$ сходится и $\lambda_{n+1} - \lambda_n > q > 0$, то каждая функция $F(x)$, аппроксимируемая по $L^p(A, B)$-норме конечными линейными комбинациями функций из системы (1), обладает следующими свойствами:

1°. Существует функция $F(z)$, $z = x + iy$, аналитическая в полуплоскости $x > A$, которая совпадает почти всюду на (A, B) с функцией $F(x)$;

2°. Функция $F(z)$ разлагается в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_n c_n \, e^{-2\pi\lambda_n z},$$

нормально сходящийся в полуплоскости $x > A$.

Оказывается, что если на систему (1) наложить более ограничительные условия, то результат Шварца можно распространить на более широкий класс множеств E. Мы ограничимся случаем $p=2$. Чтобы сформулировать полученный результат введем следующие определения.

Систему (1) будем называть лакунарной, если существует число $q > 1$, такое что выполняется условие

$$\lambda_{n+1}/\lambda_n > q. \tag{2}$$

Точку A будем называть точкой усиленной плотности справа для множества E, если существует число $\varepsilon > 0$, такое что

$$m\{CE \cap (A, A+h)\} = o(h^{1+\varepsilon}) \text{ при } h \to 0.$$

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1. *Если точка A является точкой усиленной плотности справа для множества E и система* (1) *лакунарная, то для полиномов $P(x)$ по системе* (1) *справедлива оценка*

$$\|P\|_{(A,\infty)} \leqslant C \|P\|_E, \tag{3}$$

где постоянная C зависит только от последовательности $\{\lambda_n\}$ и от множества E.

Из этой теоремы, используя теорему I, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Если точка A является точкой усиленной плотности справа для множества E и система* (1) *лакунарная, то каждая функция $F(x)$, аппроксимируемая по $L^2(E)$-норме конечными линейными комбинациями функций из системы* (1), *обладает следующими свойствами:*

1°. *Существует функция* $F(z)$, $z = x + iy$, *аналитическая в полуплоскости* $x > A$, *которая совпадает почти всюду на* E *с функцией* $F(x)$;

2°. *Функция* $F(z)$ *разлагается в ряд Дирихле*

$$F(z) = \sum_n c_n \, e^{-2\pi\lambda_n z},$$

нормально сходящийся в полуплоскости $x > A + \varepsilon$ (*где* $\varepsilon > 0$ — *любое*).

§ 1. Оценка произведения Бляшке

Рассмотрим произведение Бляшке последовательности $\{\lambda_k\}$ для правой полуплоскости

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k + \lambda}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Если выполняется условие* (2), *то функция* $1/W(\lambda)$ *ограничена на луче* $\arg \lambda = \varphi$ *при* $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\varphi \neq 0$.

Доказательство. Обозначим $\lambda = re^{i\varphi}$. Имеем

$$\ln |1/W(\lambda)| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \sqrt{\frac{(\lambda_k + r\cos\varphi)^2 + r^2 \sin^2\varphi}{(\lambda_k - r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{4r\lambda_k \cos\varphi}{\lambda_k^2 - 2r\lambda_k \cos\varphi + r^2}\right).$$

Так как $\ln(1 + x) < x$, то имеем

$$\ln |1/W(\lambda)| \leqslant \cos\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2r\lambda_k}{\lambda_k^2 - 2r\lambda_k\cos\varphi + r^2}. \tag{5}$$

Обозначим $\cos\varphi = \alpha$, $\psi_{\pm} = (1 + \alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - 1}$.

Если $\lambda_k \overline{\in} (r\psi_-, r\psi_+)$, то

$$\lambda_k^2 - 2r\lambda_k \alpha + r^2 \geqslant 2r\lambda_k. \tag{6}$$

Учитывая (5) и (6), получим

$$\ln |1/W(\lambda)| \leqslant \sum_{\lambda_k < r\psi_-} \frac{2r\lambda_k + 2r\lambda_k \alpha}{\lambda_k^2 + r^2} +$$

$$+ 2 \sum_{r\psi_- < \lambda_k < r\psi_+} \frac{r\lambda_k}{(\lambda_k - r)^2 + 2r\lambda_k(1-\alpha)} = \sum_{\lambda_k > r\psi_+} \frac{2r\lambda_k + 2r\lambda_k\alpha}{\lambda_k^2 + r^2}$$

и, следовательно,

$$\ln |1/W(\lambda)| \leqslant 2(1 + \alpha) \frac{1}{r} \sum_{\lambda_k < r\psi_-} \lambda_k + \frac{1}{1 - \alpha} [n(r\psi_+) - n(r\psi_-)] +$$

$$+2(1+\alpha)\,r\sum_{\lambda_k>r\psi_+}\frac{1}{\lambda_k}=S_1(r)+S_2(r)+S_3(r), \qquad (7)$$

где $n(t)$ — число точек последовательности $\{\lambda_k\}$, не превосходящих t. Доказательство леммы закончится, если мы покажем, что S_1, S_2 и S_3 ограничены. Имеем

$$S_1(r)=2(1+\alpha)\,\psi_-\cdot\frac{1}{r\psi_-}\sum_{\lambda_k<r\psi_-}\lambda_k.$$

Чтобы доказать ограниченность $S_1(r)$ число n выберем так, чтобы выполнялось условие $r\psi_-\in[\lambda_n,\lambda_{n+1})$, тогда

$$\frac{1}{r\psi_-}\cdot\sum_{\lambda_k<r\psi_-}\lambda_k\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\lambda_n}+1.$$

Так как из условия (2) следует, что $\lambda_n>q^i\lambda_{n-i}$, $1<i\leqslant n-1$, то

$$\frac{1}{r\psi_-}\sum_{\lambda_k<r\psi_-}\lambda_k\leqslant\frac{1}{1-\frac{1}{q}}.$$

и ограниченность $S_1(r)$ установлена.

Чтобы доказать ограниченность $S_2(r)$, выберем целые числа m и n так, чтобы выполнялись условия $r\psi_+\in[\lambda_m,\lambda_{m+1})$ и $r\psi_-\in[\lambda_n,\lambda_{n+1})$.

Тогда

$$n(r\psi_+)=m,\ n(r\psi_-)=n\ \text{ и }\ S_2(r)=\frac{1}{1-\alpha}(m-n). \qquad (8)$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_{n+1}}\leqslant\frac{r\psi_+}{r\psi_-}=\frac{\psi_+}{\psi_-}\ \text{ или }\ \lambda_m\leqslant\frac{\psi_+}{\psi_-}\lambda_{n+1}. \qquad (9)$$

Теперь если целое число j выбирать так, чтобы выполнялось условие $q_j>\psi_+/\psi_-$, то будем иметь

$$\lambda_{n+j+1}>q^j\lambda_{n+1}>\lambda_{n+1}\cdot\psi_+/\psi_-.$$

Сравнивая это неравенство с (9), получим

$$\lambda_{n+j+1}>\lambda_m.$$

Так как $\{\lambda_k\}$ — возрастающая последовательность, то отсюда следует, что $n+j+1>m$, или, что то же самое, $m-n<j+1$. Из этого неравенства и из (8) следует ограниченность $S_2(r)$.

Чтобы доказать ограниченность $S_3(r)$ число n выберем так, чтобы выполнялось условие $r\psi_+\in(\lambda_n,\lambda_{n+1}]$. Тогда будем иметь

$$S_3(r)=\frac{2(1+\alpha)}{\psi_+}r\psi_+\cdot\sum_{\lambda_k>r\psi_+}\frac{1}{\lambda_k}\leqslant\frac{2(1+\alpha)}{\psi_+}\cdot\lambda_{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=$$

$$=\frac{2(1+\alpha)}{\psi_+}\cdot\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}}+\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}}+\cdots\right).$$

Так как $\lambda_{n+1}/\lambda_{n+1+i}<\left(\frac{1}{q}\right)^i$, то отсюда следует ограниченность $S_3(r)$.

Лемма доказана.

Обозначим $r_k = \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}$.

Лемма 2. *Если выполняется условие* (2), *то функция* $1/W(\lambda)$ *остается ограниченной, когда* λ *стремится к бесконечности, оставаясь на дугах* $\lambda = r_k e^{i\varphi}, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 1.

§ 2. Оценка полиномов Дирихле

Следуя рассуждениям Л. Шварца, построим систему, биортогональную к системе (1), следующим образом: обозначим

$$J_k(\lambda) = \frac{W(\lambda)}{W'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

Так как функции $J_k(\lambda)$ принадлежат пространству H^2 (в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$), то их можно представить в виде

$$J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x} \varphi_k(x)\, dx,$$

где $\varphi_k(x) \in L^2(0, \infty)$. Таким образом, полученная система $\{\varphi_k(x)\}$ будет биортонормированной с системой $\{e^{-2\pi\lambda_k x}\}$.

Пусть теперь $P(x)$ есть произвольный полином Дирихле по системе (1), то есть $P(x)$ представляет собой конечную линейную комбинацию функций из системы (1)

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-2\pi\lambda_k x}.$$

Коэффициенты c_k можно вычислять по формулам

$$c_k = \int_0^\infty P(x) \varphi_k(x)\, dx.$$

Тогда полином $P(x)$ можно представить в следующем виде:

$$P(x) = \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) e^{-2\pi\lambda_k x} \right) P(t)\, dt, \tag{10}$$

где $m > n$.

Из этого представления, на основании неравенства Буняковского, для полинома $P(x)$ получаем следующую оценку:

$$|P(x)| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) e^{-2\pi\lambda_k x} \right\|_{(0, \infty)} ; \|P\|_{(0, \infty)} \tag{11}$$

для любого $x > 0$ и любого $m \geqslant n$.

С другой стороны, так как для любого фиксированного x функция $\sum_{k=1}^{m} J_k(\lambda)\, e^{-2\pi\lambda_k x}$, как функция от λ, является преобразованием Лапласа функции $\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t)\, e^{-2\pi\lambda_k x}$, как функции от t, то

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t)\, e^{-2\pi\lambda_k x} \right\|_{(0,\infty)} = \left\| \sum_{k=1}^{m} J_k(i\tau)\, e^{-2\pi\lambda_k x} \right\|_{(-\infty,\infty)} (\lambda = \sigma + i\tau).$$

Следовательно, неравенство (11) можно написать в следующем виде:

$$|P(x)| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{m} J_k(i\tau)\, e^{-2\pi\lambda_k x} \right\|_{(-\infty,\infty)} \cdot \|P\|_{(0,\infty)} \tag{12}$$

для любого $x > 0$ и любого $m > n$.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Если выполняется условие* (2), *то для любого числа* α, *удовлетворяющего условию* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, *существует постоянная* $C(\alpha)$ (*зависящая только от выбора* α *и не зависящая от* x *и от* P), такая что

$$|P(x)| < \frac{C(x)}{x^{1-\alpha}} \|P\|_{(0,\infty)} \quad (0 < x < 1).$$

Для доказательства леммы функцию $\sum_{k=1}^{m} J_k(i\tau)\, e^{-2\pi\lambda_k x}$ представим в виде контурного интеграла следующим образом. Прежде всего имеем

$$J_k(i\tau)\, e^{-2\pi\lambda_k x} = W(i\tau) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{-2\pi\zeta x}}{W(\zeta)(i\tau - \zeta)}\, d\zeta \quad (-\infty < \tau < \infty), \tag{13}$$

где Γ_k — окружность с центром в точке λ_k, не содержащая нулей функции $W(\lambda)$, отличных от λ_k.

Далее, возьмем число φ, удовлетворяющее условию $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, и обозначим через L_m контур, состоящий из двух отрезков

$$\left(\arg\zeta = \varphi,\ \frac{\lambda_1}{2} \leqslant |\zeta| \leqslant \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}\right) \text{ и } \left(\arg\zeta = -\varphi,\ \frac{\lambda_1}{2} \leqslant |\zeta| \leqslant \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}\right)$$

и из двух дуг

$$\left(|\zeta| = \frac{\lambda_1}{2},\ -\varphi \leqslant \arg\zeta \leqslant \varphi\right) \text{ и } \left(|\zeta| = \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2},\ -\varphi \leqslant \arg\zeta \leqslant \varphi\right).$$

Тогда согласно (13) будем иметь следующее представление:

$$\sum_{k=1}^{m} J_k(i\tau)\, e^{-2\pi\lambda_k x} = W(i\tau)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_m} \frac{e^{-2\pi\zeta x}}{W(\zeta)(i\tau-\zeta)}\, d\zeta \quad (-\infty<\tau<\infty). \tag{14}$$

Так как $|W(i\tau)|\leqslant 1$ и функция $1/W(\zeta)$ остается ограниченной на контурах L_m (в силу лемм 1 и 2), то из представления (14) получаем следующую оценку:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} J_k(i\tau)\, e^{-2\pi\lambda_k}\right| \leqslant M \int\limits_{L_m} \frac{|e^{-2\pi\zeta x}|}{|i\tau-\zeta|}\,|d\zeta|, \tag{15}$$

где M — некоторая постоянная, не зависящая от m.

Возьмем число α, удовлетворяющее условию $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Тогда из (15) получим следующее неравенство:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} J_k(i\tau)\, e^{-2\pi\lambda_k x}\right| \leqslant \frac{M_1}{|\tau|^{1-\alpha}+1} \int\limits_{L_m} \frac{|e^{-2\pi\zeta x}|}{|\zeta|^{\alpha}}\,|d\xi|, \tag{16}$$

где M_1—некоторая постоянная, не зависящая от m.

Сравнивая (16) и (12), так как функция $1/|\tau|^{1-\alpha}+1$ принадлежит классу $L^2(-\infty, \infty)$, для многочлена $P(x)$ получим следующую оценку:

$$|P(x)| \leqslant M(\alpha)\|P\|_{(0,\infty)} \int\limits_{L_m} \frac{|e^{-2\pi\zeta x}|}{|\zeta|^{\alpha}}\,|d\zeta|,$$

где $x>0$, $m\geqslant n$, а $M(\alpha)$ — некоторая постоянная, зависящая только от α. В этом неравенстве устремим m к бесконечности. Так как интеграл по дуге $\left(|\zeta|=\frac{\lambda_m+\lambda_{m+1}}{2},\ -\varphi\leqslant\arg\zeta\leqslant\varphi\right)$ стремится к нулю, то в пределе получим следующую оценку:

$$|P(x)| \leqslant M(\alpha)\|P\|_{(0,\infty)} \int\limits_{L} \frac{|e^{-2\pi\zeta x}|}{|\zeta|^{\alpha}}\,|d\zeta|,$$

где L — контур, состоящий из двух лучей $\left(\arg\zeta=\varphi,\ |\zeta|\geqslant\frac{\lambda_1}{2}\right)$ и $\left(\arg\zeta=-\varphi,\ |\zeta|>\frac{\lambda_1}{2}\right)$ и из дуги $\left(|\zeta|=\frac{\lambda_1}{2},\ -\varphi\leqslant\arg\zeta\leqslant\varphi\right)$.

Из этой оценки уже следует утверждение леммы, потому что интеграл по дуге $\left(|\zeta|=\frac{\lambda_1}{2},\ -\varphi\leqslant\arg\zeta\leqslant\varphi\right)$ ограничен, а интегралы по лучам не превосходят следующего выражения:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2\pi x r\cos\varphi}}{r^{\alpha}}\,dr = \int\limits_0^\infty e^{-u}\left(\frac{2\pi x\cos\varphi}{u}\right)^{\alpha}\frac{du}{2\pi x\cos\varphi} =$$

$$= \frac{1}{x^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{(2\pi\cos\varphi)^{1-\alpha}} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}}{u^\alpha}\, du.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

При доказательстве теоремы можно считать $A=0$, так как общий случай сводится к этому случаю заменой x на $x-A$.

Доказательство проведем, предположив противное, что существует последовательность $\{P_n(x)\}$, такая что $\|P_n\|_{(0,\infty)}=1$, но $\|P_n\|_E \to 0$ при $n\to\infty$.

Из заключения 3° теоремы 1 следует

$$|P_n(z)| \leqslant C(x)\, \|P_n\|_{(0,\infty)}\, e^{-2\pi\lambda_1 x} \quad (z = x+iy).$$

Следовательно, имеем

$$|P_n(z)|\, C(x)\, e^{-2\pi\lambda_1 x}, \tag{17}$$

где $C(x)$ зависит только от x и остается ограниченной, когда $x > \varepsilon > 0$.

Из оценки (17) следует, что семейство $\{P_n(z)\}$ нормально в полуплоскости $x>\varepsilon$. Чтобы не вводить новых обозначений, предположим, что уже эта последовательность сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости $x>\varepsilon$.

Если ε достаточно мало, то $m\{E\cap(\varepsilon,\infty)\}>0$, и так как $\|P_n\|_E\to 0$, то последовательность $\{P_n(z)\}$ сходится к нулю в полуплоскости $x>\varepsilon$. Согласно оценке (17), отсюда следует, что последовательность $\{P_n(z)\}$ и по $L^2(\varepsilon,\infty)$-норме будет сходиться к нулю. Таким образом, имеем $\|P_n\|_{(\varepsilon,\infty)}\to 0$, но $\|P_n\|_{(0,\infty)}=1$, отсюда следует, что

$$\|P_n\|^2_{(0,\varepsilon)} \to 1 \text{ при } n\to\infty. \tag{18}$$

С другой стороны, имеем

$$\|P_n\|^2_{(0,\varepsilon)} = \int\limits_0^\varepsilon |P_n(x)|^2\,dx = \int\limits_{(0,\varepsilon)\cap E} |P_n(x)|^2\,dx + \int\limits_{(0,\varepsilon)\cap CE} |P_n(x)|^2\,dx. \tag{19}$$

Первое слагаемое справа стремится к нулю, когда $n\to\infty$, второе слагаемое оценим следующим образом: согласно лемме 3 имеем

$$\int\limits_{(0,\varepsilon)\cap CE} |P_n(x)|^2\,dx \leqslant C^2(\alpha) \int\limits_{(0,\varepsilon)\cap CE} \frac{dx}{x^{2-2\alpha}} \quad \left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right). \tag{20}$$

Так как точка нуль является точкой усиленной плотности справа для множества E, то, по определению, существует положительное число ε_1, такое что

$$m\{CE\cap(0,x)\} = o(x^{1+\varepsilon_1}). \tag{21}$$

Теперь если обозначим $\sigma(x) = m\{CE\cap(0,x)\}$, то будем иметь

$$\sigma(x)=\int_0^x \varkappa_{CE}(x)\,dx,$$

где $\varkappa_{CE}$ — характеристическая функция множества CE.

Отсюда следует, что

$$\int_{(0,\varepsilon)\cap CE}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon_1/2}}=\int_0^{\varepsilon}\frac{\varkappa_{CE}(x)\,dx}{x^{1+\varepsilon_1/2}}=\int_0^{\varepsilon}\frac{d\sigma(x)}{x^{1+\varepsilon_1/2}}=$$

$$=\frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon^{1+\varepsilon_1/2}}+(1+\varepsilon_1/2)\int_0^{\varepsilon}\frac{\sigma(x)\,dx}{x^{2+\varepsilon_1/2}}.$$

Из (21) вытекает, что последний интеграл сходится. Следовательно, если в неравенстве (20) число α выбрать так, чтобы выполнялось условие $2-2\alpha<1+\varepsilon_1/2$, то интеграл справа в неравенстве (20) будет сходиться. Значит, если число ε достаточно мало, то

$$\int_{(0,\varepsilon)\cap CE}|P_n(x)|^2\,dx<\frac{1}{2},\quad n=1,2,\cdots. \tag{22}$$

Сравнивая (18), (19) и (22), получаем противоречие. Таким образом, теорема 1 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступило 20.VI.1971

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ. Դիրիխլեի լակունար սիստեմների մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է (1) լակունար սիստեմը L²(E) տարածությունում, որտեղ E-ն իրական թվերի Լեբեգի իմաստով չափելի դրական չափի բազմություն է։ Ուսումնասիրվում են դիտարկվող սիստեմի ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիաներով մոտարկվող ֆունկցիաները։

V. Kch. MUSOIAN. *On lacunary Dirichlet systems* (summary)

The lacunary system (1) is considered in the $L^2(E)$ space, where E is a measurable set of real numbers with positive Lebesgue measure. The functions, which admit approximation by the finite linear combinations of functions from this system are considered.

ЛИТЕРАТУРА

L. Schwartz. Etude des sommes d'exponentielles, Actualites Scientifiques et Industrilles, 1959.