ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 1, 1972 Математика

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ОСИ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМ СДВИГОМ И НЕТЕРОВОСТЬ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В теории сингулярных интегральных уравнений со сдвигом обычно [1]—[2] предполагается, что сдвиг $\alpha(t)$ (изоморфизм контура Γ на себя) является дифференцируемым отображением и $\alpha'(t) \in H^{\lambda}(\Gamma)$. Такие условия на сдвиг $\alpha(t)$, разумеется, предполагают конечность контура Γ. В случае же бесконечного контура сдвиг $\alpha(t)$ всегда является неограниченной функцией, что приводит к тому, что оператор сдвига $(W\varphi)(t)=\varphi[\alpha(t)]$ не ограничен, вообще говоря, в пространствах суммируемых функций. Здесь естественно возникает вопрос о корректном выборе пространства решений. Мы рассмотрим на контуре $\Gamma=(-\infty, \infty)$ сингулярное интегральное уравнение

$$(K\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)+b(x)\varphi[\alpha(x)]+c(x)(S\varphi)(x)+d(x)(S\varphi)[\alpha(x)]=f(x), \tag{1}$$

где S—сингулярный оператор

$$(S\varphi)(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,$$

и $\alpha(x)$—дробно-линейный сдвиг, удовлетворяющий условию Карлемана: $\alpha[\alpha(x)]\equiv x$. Такой сдвиг, как известно, имеет вид

$$\alpha(x)=\frac{\delta x+\beta}{\gamma x-\delta},$$

где β, δ и γ—вещественные числа.

В настоящей статье для оператора (1) будет найдено весовое пространство $L_p^{\rho}(-\infty, \infty)$ (с весом ρ, зависящим от p), в котором оператор K можно рассматривать как нетеров. Будут найдены условия нетеровости и получена формула для вычисления индекса.

Подчеркиваем, что необходимость в построении специального пространства L_p^{ρ} возникает при $\gamma\neq 0$. В случае $\gamma=0$, т. е. в случае, когда сдвиг $\alpha(x)$ является отражением: $\alpha(x)=\nu-x$, $\nu=-\dfrac{\beta}{\delta}$, исследование упрощается и проводится в рамках пространства $L_p(-\infty, \infty)$*.

* При $\gamma=0$ исследование можно провести также и в пространстве L_p^{ρ} с любым весом ρ, допускаемым в теории сингулярных уравнений.

Исследование оператора K основано на одной простой схеме исследования линейных операторов вида $A+QB$, где Q—инволюция: $Q^2=I$, а A и B—операторы из некоторой алгебры. Эта схема приведена в § 1. В § 2 рассмотрен случай $\gamma=0$. Основной же результат получен в § 3.

Заметим, что общая схема § 1 применима также к уравнениям с произвольным гладким карлемановским сдвигом на замкнутом контуре, что позволяет по новому взглянуть на теорию таких уравнений. Мы, однако, здесь на этом не останавливаемся.

§ 1. О нетеровости одного класса линейных операторов

Пусть X—банахово пространство и Q—линейный (ограниченный) в X оператор, являющийся инволюцией:

$$Q^2=I,\ Q\neq\pm I.$$

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{M}$ линейных в X операторов, удовлетворяющих следующим условиям:

1) для любых A, $B\in\mathfrak{M}$ коммутант $AB-BA$ ($\in\mathfrak{M}$) вполне непрерывен в X;

2) для любого $A\in\mathfrak{M}$ существует оператор $A_1\in\mathfrak{M}$ такой, что оператор $QA-A_1Q$ вполне непрерывен в X.

Мы будем изучать операторы вида

$$K=A+QB, \tag{2}$$

где A, $B\in\mathfrak{M}$. Приведем предварительно несколько примеров алгебр $\mathfrak{M}$.

Пример 1. $X=L_p(-\infty,\infty)$, $p>1$, $(Q\varphi)(x)=\varphi(\nu-x)$, ν— вещественное число, и

$$(A\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)+c(x)(S\varphi)(x)+(T\varphi)(x), \tag{3}$$

где T — вполне непрерывный оператор, $a(x)$, $c(x)\in C([-\infty,\infty])$*. Здесь

$$(A_1\varphi)(x)=a(\nu-x)\varphi(x)-c(\nu-x)(S\varphi)(x). \tag{4}$$

Пример 2. $X=l_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $(Q\varphi)_n=(-1)^n\varphi_n$, $n=0,1,\cdots$,

$$(A\varphi)_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n-k}\varphi_k+(T\varphi)_n,\quad n=0,1,2,\cdots,\ \{a_n\}_{-\infty}^{\infty}\in l_1.$$

Здесь $(A_1\varphi)_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{n-k}a_{n-k}\varphi_k$, $n=0,1,2,\cdots$ (ср. с [3]).

Пример 3. $X=L_p(\Gamma)$, $p>1$, Γ — ляпуновский контур, $Q=S$, $(A\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)+(T\varphi)(x)$, $A_1=A$.

Здесь и всюду в дальнейшем через T, T_1, T_2 и т. д. обозначены вполне непрерывные операторы.

* Подчеркиваем, что функции из $C([-\infty,\infty)]$ имеют равные значения на бесконечности: $a(\infty)=a(-\infty)$.

Для операторов (2) справедлива следующая

Теорема 1. *Если оператор $AA_1 - BB_1$ нетеров в X, то и оператор $A+QB$ нетеров в X.*

Доказательство. Введем оператор

$$\tilde{K} = A_1 - QB. \tag{5}$$

Мы имеем: $K\tilde{K} = (A+QB)(A_1 - QB) = AA_1 - QBQB + QBA_1 - AQB = AA_1 - B_1B + T$, так что

$$K\tilde{K} = AA_1 - BB_1 + T_1,$$

$$\tilde{K}K = AA_1 - BB_1 + T_2, \tag{6}$$

где операторы T_1, T_2 вполне непрерывны в X. Остается применить теорему Аткинсона.

Остановимся на вопросе об индексе оператора K. В приложениях излагаемой схемы индекс $\varkappa(A)$ операторов A из алгебры $\mathfrak{M}$ обычно известен. Поэтому мы будем исходить из того, что индекс $\varkappa(AA_1 - BB_1)$ известен. Из (6) следует, что (в случае нетеровости)

$$\varkappa(K) + \varkappa(\tilde{K}) = \varkappa(AA_1 - BB_1).$$

Отсюда ясно, что для вычисления $\varkappa(K)$ нужно установить связь между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(\tilde{K})$. (В примерах 1 и 2 $\varkappa(K) = \varkappa(\tilde{K})$, а в примере 3 $\varkappa(K) = -\varkappa(\tilde{K})$.

Введем еще вспомогательный оператор

$$K' = A - QB, \tag{7}$$

который будем называть сопутствующим (по аналогии с терминологией в [2]). Привлечение оператора K' вызвано тем, что в приложениях обычно легче найти связь между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(K')$, чем между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(\tilde{K})$. Оказывается, из связи между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(K')$ может быть получена связь между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(\tilde{K})$.

Добавим к аксиомам 1), 2), определяющим алгебру $\mathfrak{M}$, еще одну аксиому:

3) Множество нетеровых операторов из $\mathfrak{M}$ плотно в $\mathfrak{M}$. Эта аксиома выполняется в приложениях, в частности, в примерах 1—3.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра, определяемая условиями 1)—3), пусть $A, B \in \mathfrak{M}$ и оператор $AA_1 - BB_1$ нетеров. Тогда из равенства*

$$\varkappa(L) = \varkappa(L') \tag{8}$$

для любого нетерова оператора $L = C + QD$, $C, D \in \mathfrak{M}$, следует, что и

$$\varkappa(K) = \varkappa(\tilde{K}).$$

Доказательство. Операторы K, K', $\tilde{K}$ — нетеровы в силу теоремы 1. Заменим, пользуясь аксиомой 3, в операторе $K = A + QB$ оператор A на близкий ему по норме нетеров оператор $A^{(\epsilon)}$ так, что операторы $K^{(\epsilon)} = A^{(\epsilon)} + QB$, $\tilde{K}^{(\epsilon)} = A_1^{(\epsilon)} - QB$, $(K^{(\epsilon)})' = A^{(\epsilon)} - QB$ по-прежнему нетеровы и, в силу теорем об устойчивости, их индексы не изменились. Очевидно, $A_1^{(\epsilon)} = QA^{(\epsilon)}Q + T^{(\epsilon)}$, где $T^{(\epsilon)}$ вполне непрерывен. Поэтому с самого начала можно считать, что A (а, следовательно, и $A_1 = QAQ + T$) нетеров. Имеем

$$A_1K = A_1A + QAB + T_3,$$

$$\tilde{K}A = A_1A - QAB + T_4,$$

где T_3, T_4 — вполне непрерывные операторы. Из (8), считая $L = A_1A + QAB$, получаем, что $\varkappa(A_1K) = \varkappa(\tilde{K}A)$. Так как здесь все операторы нетеровы, и $\varkappa(A_1) = \varkappa(A)$, то $\varkappa(K) = \varkappa(\tilde{K})$, что и требовалось.

Таким образом, если в алгебре $\mathfrak{M}$ удается доказать равенство (8): $\varkappa(L) = \varkappa(L')$, $L = C + QD$, $C, D \in \mathfrak{M}$, то индекс оператора K вычисляется по формуле

$$\varkappa(K) = \frac{1}{2}\varkappa(AA_1 - BB_1).$$

Замечание. Равенство (8) будет выполнено, если, например, в алгебре $\mathfrak{M}$ существует нетеров оператор U такой, что $UQ + QU$ — вполне непрерывный оператор. Тогда между данным оператором и сопутствующим существует простая связь:

$$UK - K'U = T. \tag{9}$$

В §§ 2, 3 в соответствующей реализации излагаемой схемы оператор U будет найден.

Заметим в связи с построениями этого параграфа, что для операторов вида $A + QB$, где $Q^2 = I$, некоторые результаты алгебраического характера были получены в работах D. Przeworska-Rolewicz при иных аксиоматических предположениях (см., например, [4]).

§ 2. Сингулярный оператор с отражением (случай $\gamma = 0$)

Рассматриваем в $L_p(-\infty, \infty)$, $p > 1$, оператор

$$(K\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi(\nu - x) + c(x)(S\varphi)(x) + d(x)(S\varphi)(\nu - x) \tag{10}$$

где ν — вещественное число, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x) \in C([-\infty, \infty])$. Оператор K имеет вид $K = A + QB$, где $(Q\varphi)(x) = \varphi(\nu - x)$, $(A\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + c(x)(S\varphi)(x)$, $(B\varphi)(x) = b(\nu - x)\varphi(x) + d(\nu - x)(S\varphi)(x)$. Очевидно, $QS = -SQ$, так что здесь оператор A_1, определяемый аксиомой 2) § 1 находится по формуле (4). Отметим, что в алгебре $\mathfrak{M}$ операторов вида $A+T$ аксиома 3) § 1 выполняется.

В силу теоремы 1 § 1 нетеровость оператора (10) обеспечивается нетеровостью оператора

$$(AA_1-BB_1)\,\varphi=p\,(x)\,\varphi\,(x)+q\,(x)(S\varphi)(x)+(T_5\varphi)(x),$$

где

$$p\,(x)+q\,(x)=[a\,(x)+c\,(x)][a\,(\nu-x)-c\,(\nu-x)]-[b\,(x)-d\,(x)][b\,(\nu-x)+$$
$$+d\,(\nu-x)]=\Delta\,(x),\quad p\,(x)-q\,(x)=\Delta\,(\nu-x).$$

Таким образом, при

$$\Delta\,(x)\neq 0,\quad -\infty\leqslant x\leqslant\infty, \tag{11}$$

оператор (10) нетеров в $L_p(-\infty,\infty)$.

Переходим к вычислению индекса $\varkappa\,(K)$ оператора (10), считая условие (11) выполненным. Покажем, что $\varkappa\,(K)=\varkappa\,(K')$, где

$$(K'\varphi)(x)=a\,(x)\,\varphi\,(x)-b\,(x)\,\varphi\,(\nu-x)+c\,(x)(S\varphi)(x)-d\,(x)(S\varphi)(\nu-x).$$

Имеет место простая связь вида (9):

$$SK-K'S=T_6, \tag{12}$$

где T_6—вполне непрерывный оператор. Для ее доказательства достаточно заметить, что $SQ=-QS$. Из (12) же следует, что

$$\varkappa\,(K)=\varkappa\,(K'),$$

каковы бы ни были коэффициенты a, b, c, $d\in C\,([-\infty,\infty])$. Тогда в силу теоремы 2 $\varkappa\,(K)=\varkappa\,(\bar{K})$, и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Оператор* (10) *нетеров в* $L_p(-\infty,\infty)$, $p>1$, *при выполнении условия* (11) *и* $\varkappa\,(K)=-\operatorname{ind}\Delta\,(x)$.

Следствие. Краевая задача Римана с отражением

$$A\,(x)\,\Phi^+(x)+B\,(x)\,\Phi^-(x)+C(x)\,\Phi^+(\nu-x)+D(x)\,\Phi^-(\nu-x)=F\,(x) \tag{13}$$

с непрерывными коэффициентами нетерова в $L_p^{\pm}$, если

$$\Delta\,(x)=A\,(x)\,B\,(\nu-x)-D\,(x)\,C\,(\nu-x)\neq 0,$$
$$-\infty\leqslant x\leqslant\infty$$

и ее индекс равен $-\operatorname{ind}\Delta\,(x)$.

Отметим работы И. М. Мельника [5] и В. И. Азаматовой [6], в которых рассматривались некоторые специальные случаи задачи (13) при $\nu=0$, а также работы Юханонова Н. Н. [8] и Комяка И. И. [9].

§ 3. Сингулярные операторы с дробно-линейным сдвигом

Рассматривается оператор

$$(K\varphi)(x)=a\,(x)\,\varphi\,(x)+b\,(x)\,\varphi\,[\alpha\,(x)]+c\,(x)(S\varphi)(x)+d\,(x)(S\varphi)[\alpha(x)]=f\,(x),$$
$$-\infty<x<\infty, \tag{14}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{\delta x + \beta}{x - \delta}$$

(без ограничения общности считаем $\gamma = 1$).

Введем следующее весовое пространство:

$$L_p^\rho = \left\{ \varphi(x) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \rho(x)\, dx < \infty \right\},$$

где

$$\rho(x) = |x - \delta|^{\frac{p}{2} - 1}.$$

Очевидно, $\rho(x) = |\Delta|^{\frac{p}{4} - \frac{1}{2}} |\alpha'(x)|^{\frac{1}{2} - \frac{p}{4}}$, $\Delta = \delta^2 + \beta$.

Мы увидим (при некоторых предположениях к относительно коэффициентов a, b, c, d), что именно в этом пространстве операторы вида (14) образуют кольцо (с точностью до вполне непрерывных слагаемых).

п °1. *Случай сдвига, сохраняющего ориентацию* ($\Delta < 0$). Обозначим

$$b_0(x) = \frac{b(x)(x-\delta)}{i\sqrt{|\Delta|}}, \quad d_0(x) = \frac{d(x)(x-\delta)}{i\sqrt{|\Delta|}},$$

$$(Q\varphi)(x) = i\sqrt{|\Delta|}\, \frac{\varphi[\alpha(x)]}{x - \delta},$$

так что оператор (14) принимает вид

$$K\varphi = a\varphi + b_0 Q\varphi + cS\varphi + d_0 QS\varphi. \tag{15}$$

Очевидно, оператор Q ограничен в L_p^ρ

$$\|Q\varphi\|_{L_p^\rho} = \|\varphi\|_{L_p^\rho}$$

и является инволюцией: $Q^2 = I$. Мы естественно будем предполагать, что коэффициенты $a(x)$, $b_0(x)$, $c(x)$, $d_0(x) \in C([-\infty, \infty])$. Тогда оператор K ограничен в L_p^ρ (см. [7]).

Справедлива следующая

Лемма. *Операторы Q и S коммутируют*

$$QS\varphi = SQ\varphi, \quad \varphi \in L_p^\rho.$$

Доказательство. Имеем

$$(QS\varphi)(x) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\pi} \frac{1}{x-\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t - \alpha(x)} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\pi} \frac{1}{x-\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi[\alpha(t)]\,|\alpha'(t)|}{\alpha(t) - \alpha(x)}\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi[\alpha(t)]}{(t-\delta)(t-x)}\, dt = (SQ\varphi)(x).$$

Здесь мы воспользовались формулами

$$\alpha'(x) = -\Delta (x-\delta)^{-2}, \quad \alpha(t) - \alpha(x) = -\Delta \frac{t-x}{(t-\delta)(x-\delta)}.$$

Следствие. Операторы $K+T$, где K — оператор (15), а T — вполне непрерывный оператор, образуют кольцо.

Применим рассуждения § 1. Рассмотрим в L_p^ρ алгебру $\mathfrak{M}$ операторов вида

$$(A\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + c(x)(S\varphi)(x) + (T\varphi)(x),$$

где T — вполне непрерывный оператор, $a(x), c(x) \in C([-\infty, \infty])$. Эта алгебра удовлетворяет аксиомам 1)—3) § 1, при этом оператор A_1, определяемый аксиомой 2), имеет вид

$$(A_1\varphi)(x) = a[\alpha(x)]\varphi(x) + c[\alpha(x)](S\varphi)(x),$$

что легко проверяется с помощью леммы.

В силу теоремы 1 § 1 нетеровость оператора (14) или, что то же, (15) в L_p^ρ обеспечивается нетеровостью оператора $AA_1 - BB_1$, где на этот раз

$$(B\varphi)(x) = b_0[\alpha(x)]\varphi(x) + d_0[\alpha(x)](S\varphi)(x), \ (B_1\varphi)(x) = b_0(x)\varphi(x) + \\ + d_0(x)(S\varphi)(x).$$

Мы имеем

$$(AA_1 - BB_1)\varphi = m(x)\varphi(x) + n(x)(S\varphi)(x) + (T_7\varphi)(x),$$

где

$$m(x) + n(x) = \{a(x) + c(x)\}\{a[\alpha(x)] + c[\alpha(x)]\} - \\ -\{b(x) + d(x)\}\{b[\alpha(x)] + d[\alpha(x)]\} = \Delta_1(x),$$

$$m(x) - n(x) = \{a(x) - c(x)\}\{a[\alpha(x)] - c[\alpha(x)]\} - \\ -\{b(x) - d(x)\}\{b[\alpha(x)] - d[\alpha(x)]\} = \Delta_2(x).$$

Таким образом, условие нетеровости оператора K принимает вид

$$\Delta_1(x) \neq 0, \ \Delta_2(x) \neq 0, \ -\infty \leqslant x \leqslant \infty. \tag{16}$$

Покажем, как и в § 2, что $\varkappa(K) = \varkappa(\widetilde{K})$, для чего достаточно показать, что $\varkappa(K) = \varkappa(K')$, где $K' = A - QB$.

Последнее утверждение вытекает из связи типа (9)

$$UK - K'U = T_8, \tag{17}$$

где U — обратимый в L_p^ρ оператор: $(U\varphi)(x) = u(x)\varphi(x)$, где

$$u(x) = \frac{x - \alpha(x)}{x + \alpha(x) + i} = \frac{x^2 - 2\delta x - \beta}{x^2 + \beta + i(x-\delta)} \neq 0.$$

Связь (17) проще всего проверить, если заметить, что $u(x) + u[\alpha(x)] \equiv 0$.

Тем самым получена следующая

Теорема 4. *Пусть* $a(x), c(x), b(x)(x-\delta), d(x)(x-\delta) \in C([-\infty, \infty])$. *Оператор* (14) *нетеров в пространстве* L_p^ρ *при выполнении условий (16), при этом*

$$\varkappa(K) = -\frac{1}{2} \operatorname{ind} \frac{\Delta_1(x)}{\Delta_2(x)}.$$

Следствие. Краевая задача с дробно-линейным сдвигом ($\Delta < 0$)

$$A(x)\,\Phi^+(x) + B(x)\,\Phi^-(x) + C(x)\,\Phi^+[\alpha(x)] + D(x)\,\Phi^-[\alpha(x)] = F(x)$$

$$-\infty < x < \infty$$

с коэффициентами $A(x), B(x), C(x)(x-\delta), D(x)(x-\delta) \in C([-\infty, \infty])$ нетерова в $(L_p^\rho)^\pm$, если $\Delta_1(x) = A(x)\,A[\alpha(x)] - C(x)\,C[\alpha(x)] \neq 0$, $\Delta_2(x) = B(x)\,B[\alpha(x)] - D(x)\,D[\alpha(x)] \neq 0$, и ее индекс равен

$$-\frac{1}{2} \operatorname{ind} \frac{\Delta_1(x)}{\Delta_2(x)}.$$

п° 2. *Случай сдвига, изменяющего ориентацию* ($\Delta > 0$). В случае такого сдвига все построения повторяют рассуждения § 2. Изменения по сравнению с п° 1 этого параграфа коснутся лишь выбора Q:

$$(Q\varphi)(x) = \sqrt{\Delta}\, \frac{\varphi[\alpha(x)]}{x-\delta}$$

(очевидно, снова $Q^2 = I$, $\|Q\varphi\|_{L_p^\rho} = \|\varphi\|_{L_p^\rho}$). В этом случае, как и в § 2,

$$QS = -SQ.$$

Поэтому оператор A_1 по оператору $(A\varphi)(x) = a(x)\,\varphi(x) + c(x)(S\varphi)(x)$ строится в виде $(A_1\varphi)(x) = a[\alpha(x)]\,\varphi(x) - c[\alpha(x)](S\varphi)(x)$. И, наконец, роль оператора U из связи (9) играет, как и в § 2, оператор S. Окончательный результат содержит следующая

Теорема 5. *Пусть* $a(x), c(x), b(x)(x-\delta), d(x)(x-\delta) \in C([-\infty, \infty])$. *Оператор* (14) *нетеров в* L_p^ρ *при выполнении условия*

$$\Delta(x) = \{a(x) + c(x)\}\,\{a[\alpha(x)] - c[\alpha(x)]\} -$$
$$-\{b(x) - d(x)\}\,\{b[\alpha(x)] + d[\alpha(x)]\} \neq 0,$$
$$-\infty \leqslant x \leqslant \infty$$

при этом

$$\varkappa_{L_p^\rho}(K) = -\operatorname{ind} \Delta(x).$$

Аналогично переформулируется следствие из п°1.

Ростовский-на-Дону
Государственный университет

Поступило 10.VI.1971

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ, Ս. Գ. ՍԱՄԿՈ. Կարլեմանի կոտորակագծային տեղաշարժով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումներ առանցքի վրա և ինվոլյուցիայով օպերատորների նետերյան տեսությունը (*ամփոփում*)

Առաջարկվում է Բանախի տարածության մեջ $A - QB$ (*Q-ն ինվոլյուցիա է,* $Q^2 = I$) *տեսքի օպերատորների հետազոտման մի ընդհանուր սխեմա, որը կիրառվում է*

$$(K\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi[\alpha(x)] + \frac{c(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt +$$

$$+\frac{d(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-\alpha(x)}\,dt,$$

սինգուլյար ինտեգրալ օպերատորների ուսումնասիրության մեջ։ Այստեղ $\alpha(x)$*-ը կոտորակագծային տեղաշարժ է, որը բավարարում է Կարլեմանի պայմանին՝*

$$\alpha[\alpha(x)] \equiv x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Գտնված է այնպիսի կշռային L_p *տարածություն, որտեղ* K *օպերատորի համար ճիշտ է նետերի տեսությունը։ Գտնված են օպերատորի նետերայնության պայմաններ և բանաձև, որով կարելի է հաշվել նրա ինդեքսը։*

N. K. KARAPETIANĆ, S. G. SAMKO. *Singular integral operators on a line with a fractional linear shift of Carleman type and Noether theory of operators with involution* (summary)

A general scheme of investigation of operators $A+QB$ with involution Q ($Q^2=I$) in Banach spaces is proposed and applied to singular integral operator

$$(K\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi[\alpha(x)] + c(x)(S\varphi)(x) + d(x)(S\varphi)[\alpha(x)]$$

where $(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)(t-x)^{-1}\,dt$ and $\alpha(x)$ is a fractional linear shift of Carleman type: $\alpha[\alpha(x)] = x$. The weight L_p-space is found which is appropriate for the Noether theory of operator K. The condition for operator K to be Noetherian as well as the formula for its index are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, М., ФМ, 1963.
2. *Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения, УМН, XXIII, вып. 3, 1968.
3. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко.* О функциональном уравнении $\psi(x+a) - b(x) \times \psi(x) = g(x)$, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика", V, № 5, 1970, 441—448.
4. *D. Przeworska-Rolewicz.* Sur les equations involutives et leurs applications, Studia Mathem., 20, № 2, 1961, 95—117.
5. *И. М. Мельник.* О сингулярном интегро-функциональном уравнении, Изв. ВУЗ-ов, Математика, № 2, 1964, 100—109.
6. *В. И. Азаматова.* О некоторых интегральных уравнениях с суммарными и разностными ядрами, Тр. II респ. конференции математиков Белоруссии, Минск, Белорусский ун-т, 1969, 249—252.

7. *К. И. Бабенко*. О сопряженных функциях, ДАН СССР, 62, № 2, 1948, 157—160.
8. *Н. Н. Юхановов*. О некоторых особых интегральных уравнениях на прямой и полупрямой, ДАН Тадж. ССР, 10, № 4, 1967, 10—14.
9. *И. И. Комяк*. Об одном интегральном уравнении на полуоси, 'ДАН БССР, 13, № 3, 1969, 197—201.