Յ. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Բ. Ն. ԴԻՄԻՏՐՈՎ

ОДНА ПРИОРИТЕТНАЯ СИСТЕМА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ
ИСТОЧНИКОВ И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ
ОЖИДАНИЯ

В в е д е н и е

За последние годы, судя по публикациям, интерес к различным задачам с приоритетом резко возрос. Появилось много новых постановок задач с приоритетом, по-видимому, возникших из практики. Приоритетные задачи с конечным числом источников изучались в [1]; исследование производилось методом введения дополнительных переменных Кокса, что приводило к уравнениям в частных производных первого порядка.

Далее, имеются статьи по задачам с приоритетом, когда обслуживание разбивается на несколько независимых этапов (многоэтапное), [2, 3], причем на некоторых этапах возможно прерывание вызова (но системы с конечным числом источников не затрагивались).

Неприоритетными задачами с ограничением на время ожидания занимались многие авторы [4—6].

В настоящей статье рассматривается одноканальная система с конечным числом источников, ограничением на время ожидания, двухэтапным обслуживанием и абсолютным приоритетом. Инженерная постановка и решение задачи, приводящей к подобной системе обслуживания, в детерминированном случае имеются в [7].

Основная цель работы—получение асимптотики времени до первой потери вызова при быстром обслуживании. Кроме того, находятся соотношения, определяющие период занятости и время пребывания вызова на приборе.

Функции, к которым применяется преобразование Лапласа-Стильтьеса, обозначаются прописными латинскими буквами; преобразование Лапласа-Стильтьеса—соответствующими строчными латинскими или греческими буквами, а моменты—теми же малыми буквами, но с индексом внизу (указывающим порядок момента).

Описание системы. Один прибор обслуживает вызовы N источников. Вызовы от источников после обслуживания возвращаются обратно в свои источники. В каждом источнике имеется ровно один вызов. Если в момент t в i -ом источнике есть вызов, то он в промежутке $(t, t+\Delta t)$ потребует обслуживания с вероятностью $a_i \Delta t + o(\Delta t)$ и остается в источнике с вероятностью $1 - a_i \Delta t + o(\Delta t)$, $a_i > 0$, $i=1, \dots, N$. Если в момент прихода вызова из i -го источника (i -вызова)

на обслуживание прибор занят обслуживанием j -вызова, то при $i < j$ обслуживание j -вызова прерывается и начинается обслуживание i -вызова; при $i > j$ i -вызов начнет обслуживаться сразу после того, как кончится обслуживание вызовов с номерами, меньшими чем i . Если перед началом обслуживания i -вызов ждал, то его обслуживание состоит из двух этапов с независимыми длительностями $\tau_1^{(i)}$ и $\tau_2^{(i)}$ с функциями распределения (ф. р.) $B_1^{(i)}(t)$ и $B_2^{(i)}(t)$ соответственно; если же вызов начнет обслуживаться сразу, то обслуживание длится всего один этап $\tau_2^{(i)}$, $i=1, \dots, N$. Время ожидания i -вызова не должно превышать случайную величину сл. в. ζ_i с распределением $P\{\zeta_i < t\} = 1 - e^{-\nu_i t}$, $\nu_i > 0$, в противном случае вызов теряется. Если прерывание вызова произошло на втором этапе обслуживания, то вызов возвращается обратно в источник без дообслуживания, а если на первом, то вызов ожидает начала нового полного двухэтапного обслуживания с новой реализацией времени ожидания (заново).

Одна вспомогательная система обслуживания.

А. Рассматриваемая здесь система обслуживания ненадежным прибором, одним источником и ограничением на время ожидания будет нужна при изучении основной системы.

Ненадежный прибор обслуживает один вызов (один источник). Времена „жизни“ и времена восстановлений прибора образуют альтернирующий процесс восстановления [8] и имеют ф.р. $1 - e^{-\sigma t}$, $\sigma > 0$ и $F(t)$ соответственно. Если вызов находится в источнике, то время до его поступления на прибор распределено по экспоненциальному закону с параметром $\alpha > 0$. Если в момент поступления вызова прибор неисправен, то вызов ждет до конца восстановления. Если время ожидания превосходит сл. в. ζ , где $P\{\zeta < t\} = 1 - e^{-\nu t}$, $\nu > 0$, то вызов теряется. В противном случае после восстановления прибор приступает сразу к обслуживанию вызова. Если до начала обслуживания вызов ждал, обслуживание состоит из двух независимых этапов с ф.р. $B_1(t)$ и $B_2(t)$ соответственно; если обслуживание началось сразу, то только из второго с ф.р. $B_2(t)$. При выходе прибора из строя на первом этапе обслуживания, время ожидания вызова и следующее за этим обслуживание начинаются заново; при прерывании же обслуживания на втором этапе вызов возвращается обратно в источник.

З а м е ч а н и е: Прибавление дополнительного этапа ко времени обслуживания после ожидания можно рассматривать как штраф за ожидание. Во многих системах надежности, обслуживания [станков и некоторых задачах теории управления запасами можно встретить эту схему как элемент более сложной схемы (см. также [7]).

Б. Промежуток времени с момента начала или восстановления прибора, или обслуживания вызова до первого момента, когда прибор свободен и исправен, назовем „периодом занятости“ системы и обо-

значим его через π . Через A обозначим событие: за период занятости вызов не потерян.

Пусть $\Pi(t)$ —вероятность того, что за период занятости не наблюдалась потеря вызова и длительность этого периода не превосходит t , т. е.

$$\Pi(t) = p \{ \pi < t, A \}.$$

Через π_2 обозначим период занятости, начавшийся с восстановления прибора, при условии, что вызов находится в источнике; через π_1 —период занятости, начавшийся с момента поступления вызова из источника, π_3 —период занятости, начавшийся с двухэтапного обслуживания. Положим

$$\Pi_i(t) = P \{ \pi_i < t, A \}, \quad \pi_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\Pi_i(t), \quad i=1, 2, 3.$$

В. Считаем, что независимо от функционирования системы наступают „катастрофы“, поток которых является пуассоновским с параметром $s > 0$. Тогда $\pi_1(s)$ —вероятность того, что период занятости начался с восстановления прибора, а за весь период вызов не был потерян и „катастрофы“ не наступали.

$\pi_2(s)$ ($\pi_3(s)$) — вероятность того, что период занятости начался с момента поступления вызова из источника (с двухэтапного обслуживания), а за весь период занятости вызов не был потерян и „катастрофы“ не наступали. $\varphi(s+a)$ —вероятность того, что за время одного восстановления прибора вызов не наступал и не наступали „катастрофы“.

$$\frac{\alpha}{\alpha - \nu} [\varphi(s+\nu) - \varphi(s+a)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) \int_0^x e^{-(x-u)\nu} d[1 - e^{-au}]$$

—вероятность того, что за время одного восстановления прибора „катастрофа“ не наступила, поступил вызов, но не был потерян.

$\varphi(s+\nu)$ —вероятность того, что за время одного восстановления прибора не будет потеряна вызов и не наступят „катастрофы“, при условии, что в момент начала восстановления вызов ожидал обслуживания.

$\beta_i(s+\sigma)$ —вероятность того, что на i -ом этапе обслуживания прибор не выйдет из строя и не наступят „катастрофы“.

$\frac{\sigma}{s+\sigma} [1 - \beta_i(s+\sigma)]$ —вероятность того, что за i -ый этап обслуживания прибор вышел из строя, а до выхода прибора из строя „катастрофа“ не наступала.

По формуле полной вероятности выписываются уравнения, связывающие функции $\pi_i(s)$.

$$\left. \begin{aligned} \pi_1(s) &= \varphi(s+a) + \frac{a}{a-v} [\varphi(s+v) - \varphi(s+a)] \pi_3(s), \\ \pi_2(s) &= \beta_2(s+\sigma) + \frac{\sigma}{s+\sigma} [1 - \beta_2(s+\sigma)] \pi_1(s), \\ \pi_3(s) &= \beta_1(s+\sigma) \pi_2(s) + \frac{\sigma}{s+\sigma} [1 - \beta_1(s+\sigma)] \varphi(s+v) \pi_3(s) \end{aligned} \right\} (1)$$

Разрешив систему уравнений (1), получаем

$$\pi_1(s) = \frac{\varphi(s+a) \left[1 - \frac{\sigma}{s+\sigma} (1 - \beta_1(s+\sigma)) \varphi(s+v) \right] +}{1 - \frac{\sigma}{s+\sigma} \cdot \frac{a}{a-v} [\varphi(s+v) - \varphi(s+a)] \beta_1(s+\sigma) [1 - \beta_2(s+\sigma)] -} + \frac{\frac{a}{a-v} [\varphi(s+v) - \varphi(s+a)] \beta_1(s+\sigma) \beta_2(s+\sigma)}{- \frac{\sigma}{s+\sigma} \varphi(s+v) [1 - \beta_1(s+\sigma)]}, \quad (2)$$

$$\pi_2(s) = \frac{\left[\beta_2(s+\sigma) + \frac{\sigma}{s+\sigma} (1 - \beta_2(s+\sigma)) \varphi(s+a) \right] \times}{1 - \frac{\sigma}{s+\sigma} \cdot \frac{a}{a-v} [\varphi(s+v) - \varphi(s+a)] \beta_1(s+\sigma) [1 - \beta_2(s+\sigma)] -} \times \frac{\left[1 - \frac{\sigma}{s+\sigma} (1 - \beta_1(s+\sigma)) \varphi(s+v) \right]}{- \frac{\sigma}{s+\sigma} \varphi(s+v) [1 - \beta_1(s+\sigma)]}. \quad (3)$$

Замечание 2. В формулах (1)–(3) считаем $a \neq v$. Если $a = v$, то вместо $\frac{a}{a-v} [\varphi(s+v) - \varphi(s+a)]$ нужно брать $a \cdot (-\varphi'(s+a))$.

Всюду в дальнейшем мы будем выписывать результаты для случая $a \neq v$, но будем иметь ввиду замечание 2, не указывая соответствующий результат для случая $a = v$.

Г. С вероятностью $\frac{\sigma}{\sigma+a}$ период занятости равен π_1 и с вероятностью $\frac{a}{\sigma+a}$ — равен π_2 . Поэтому

$$\pi = \frac{\sigma}{\sigma+a} \pi_1 + \frac{a}{\sigma+a} \pi_2. \quad (4)$$

Ясно, что ф.р. $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(t)$, $\Pi(t)$ — несобственные (т. е. при $t \rightarrow \infty$ не стремятся к 1) и

$$P(A) = \Pi(\infty) = \pi(0) = \frac{\sigma}{\sigma + a} \pi_1(0) + \frac{a}{\sigma + a} \pi_2(0) < 1. \quad (5)$$

На основании (2), (3)

$$\pi_1(0) = \frac{\varphi(a)[1 - (1 - \beta_1(\sigma))\varphi(v)] + \frac{a}{a - v} [\varphi(v) - \varphi(a)] \beta_1(\sigma) \beta_2(\sigma)}{1 - \frac{a}{a - v} [\varphi(v) - \varphi(a)] \beta_1(\sigma) [1 - \beta_2(\sigma)] - \varphi(v) [1 - \beta_1(\sigma)]}, \quad (6)$$

$$\pi_2(0) = \frac{[\beta_2(\sigma) + (1 - \beta_2(\sigma))\varphi(a)][1 - (1 - \beta_1(\sigma))\varphi(v)]}{1 - \frac{a}{a - v} [\varphi(v) - \varphi(a)] \beta_1(\sigma) [1 - \beta_2(\sigma)] - \varphi(v) [1 - \beta_1(\sigma)]}. \quad (7)$$

Следовательно

$$P(A) = \frac{[\sigma\varphi(a) + a(1 - \beta_2(\sigma))\varphi(a) + a\beta_2(\sigma)][1 - (1 - \beta_1(\sigma))\varphi(v)] + (\sigma + a) \left\{ 1 - \frac{a}{a - v} [\varphi(v) - \varphi(a)] \beta_1(\sigma) [1 - \beta_2(\sigma)] - \frac{a\sigma}{a - v} [\varphi(v) - \varphi(a)] \beta_1(\sigma) \cdot \beta_2(\sigma) - \varphi(v) [1 - \beta_1(\sigma)] \right\}}{\quad}. \quad (8)$$

Обозначим через $\hat{\Pi}(t)$ условную ф.р. периода занятости при условии, что не произошла потеря вызова. Имеет место

Теорема 1. Ф. р. $\hat{\Pi}(t)$ дается своим преобразованием Лапласа-Стилтьеса

$$\hat{\pi}(s) = \frac{\sigma}{\sigma + a} \frac{\pi_1(s)}{\pi_1(0)} + \frac{a}{\sigma + a} \frac{\pi_2(s)}{\pi_2(0)}, \quad (9)$$

где $\pi_i(s)$, $\pi_i(0)$, $i=1, 2$, определяются по формулам (2), (3), (6), (7).

Д. Периодом регенерации процесса обслуживания назовем промежуток времени между двумя соседними моментами времени, когда прибор переходит в свободное и исправное состояние, причем за этот промежуток времени не наблюдалась потеря вызова.

Пусть $G(t)$ —ф. р. длительности периода регенерации. Очевидно, что

$$G(t) = [1 - e^{-(\sigma+a)t}] * \Pi(t) \text{ и } P(A) = G(\infty).$$

$P(A)$ есть также вероятность того, что за один период занятости вызов не потерян.

Тогда $[P(A)]^n [1 - P(A)]$ —вероятность того, что вызов будет потерян на $(n+1)$ -ом периоде регенерации ($n=0, 1, \dots$).

Если λ —число шагов (периодов регенерации) до потери вызова, то

$$M\lambda = \sum_{n>1} nP\{\lambda=n\} = \sum_{n>1} n[P(A)]^{n-1} [1 - P(A)] = \frac{1}{1 - P(A)}. \quad (10)$$

Е. Обозначим через $\hat{G}(t)$ ф.р. периода регенерации при условии, что за этот период не произошла потеря вызова. Очевидно, что

$$\hat{G}(t) = [1 - e^{-(\sigma+a)t}] * \hat{\Pi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(\hat{a} < t) \quad (11)$$

и

$$M\hat{a} = \frac{1}{\sigma+a} + \hat{\pi}_1. \quad (12)$$

Если τ — суммарная длительность периодов регенерации до первой потери вызова (включается и период регенерации, за который вызов был потерян), то

$$\tau = \hat{a}_1 + \dots + \hat{a}_\lambda,$$

где $\hat{a}_i (i=1, 2, \dots)$ — независимые, одинаково распределенные сл. в. с ф.р. $\hat{G}(t)$. По формуле Вальда

$$M\tau = M\hat{a} \cdot M\lambda = \frac{\frac{1}{\sigma+a} + \hat{\pi}_1}{1 - P(A)}. \quad (13)$$

Истинное значение времени θ до потери вызова заключено между суммами

$$\hat{a}_1 + \dots + \hat{a}_{\lambda-1} \leq \theta \leq \hat{a}_1 + \dots + \hat{a}_\lambda = \tau. \quad (14)$$

Ж. На основании (14) можно выяснить асимптотическое поведение длительности работы системы до потери вызова при быстром ремонте (ремонт считается быстрым, когда φ_1 мало). Из неравенства $1 - e^{-sx} \leq sx (s > 0, x > 0)$ следует $1 - \varphi(s) \leq s\varphi_1$. Поэтому, при $\varphi_1 \rightarrow 0$ равномерно по s в любом конечном интервале изменения $s \varphi(s) \rightarrow 1$. Более того, $\varphi^2(s) \rightarrow 0$ равномерно по s . Тогда из (8) вытекает, что $P(A) \rightarrow 1$, а из (10) находим $M\lambda \rightarrow \infty$ при $\varphi_1 \rightarrow 0$. По теореме Пуассона ([9], стр. 99) имеем

$$P\left\{\frac{\lambda}{M\lambda} > x\right\}_{\varphi_1 \rightarrow 0} \rightarrow e^{-x}. \quad (15)$$

Из (2), (3), (6), (7) и (9) легко получить

$$\hat{\pi}(s) \rightarrow_{\varphi_1 \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sigma+a} + \frac{a}{\sigma+a} \left\{ \beta_2(\sigma) + \frac{\sigma}{s+\sigma} [1 - \beta_2(s+\sigma)] \right\},$$

откуда вычисляется $g(s) = M e^{-s\hat{a}}$ при $\varphi_1 \rightarrow 0$.

$$\hat{g}(s) \rightarrow_{\varphi_1 \rightarrow 0} \frac{1}{s+\sigma+a} \left\{ \sigma+a \left[\frac{\sigma}{s+\sigma} + \beta_2(\sigma) \frac{s}{s+\sigma} \right] \right\}. \quad (16)$$

Из (16) находим, что при $\varphi_1 \rightarrow 0$

$$M\hat{a}_i \rightarrow \frac{1}{\sigma+a} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{a}{\sigma+a} [1 - \beta_2(\sigma)]. \quad (17)$$

Последовательность сл. в. $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\overset{\wedge}{\alpha}_1 + \dots + \overset{\wedge}{\alpha}_N}{N \cdot M\overset{\wedge}{\alpha}_1} = 1 \text{ с вероятностью } 1. \quad (18)$$

Неравенство (14) позволяет выписать для вероятностей следующие соотношения:

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{\overset{\wedge}{\alpha}_1 + \dots + \overset{\wedge}{\alpha}_{\lambda-1}}{(\lambda-1) \cdot M\overset{\wedge}{\alpha}_1} \cdot \frac{\lambda-1}{M\lambda-1} > x \right\} &\ll P \left\{ \frac{\theta}{M\overset{\wedge}{\alpha}_1 \cdot M\lambda} > x \right\} \ll \\ &\ll P \left\{ \frac{\overset{\wedge}{\alpha}_1 + \dots + \overset{\wedge}{\alpha}_\lambda}{M\overset{\wedge}{\alpha}_1 \cdot \lambda} \cdot \frac{\lambda}{M\lambda} > x \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20) и из дополнений выводится

Теорема 2. При быстром восстановлении прибора справедливо соотношение

$$\lim_{\varphi_1 \rightarrow 0} P \left\{ \frac{\theta}{M\overset{\wedge}{\alpha}_1 \cdot M\lambda} > x \right\} = e^{-x}, \quad (21)$$

или в более удобной для применений форме

$$P \{0 \leq x\} \sim 1 - e^{-\frac{1-P(A)}{M\overset{\wedge}{\alpha}_1} x}. \quad (22)$$

Здесь $P(A)$, $M\overset{\wedge}{\alpha}_1$ и $M\lambda$ определяются по формулам (8), (12) и (10) соответственно. Знак $\sim$ означает асимптотическую эквивалентность при $\varphi_1 \rightarrow 0$.

Из (13), (14) также следует, что

$$M\theta \sim \frac{1}{1-P(A)} + \overset{\wedge}{\pi}_1 \quad \text{при } \varphi_1 \rightarrow 0. \quad (23)$$

Если мы умеем управлять средним временем восстановления прибора φ_1 и требуется определить такое $\varphi_{10 \text{ лг}}$, чтобы вероятность за время T „вызов не будет потерян“ была не меньше заданного числа p_0 , то область значений $\varphi_{10 \text{ лг}}$ можно определить из асимптотического соотношения

$$e^{-\frac{1-P(A)}{M\overset{\wedge}{\alpha}_1} T} \geq p_0, \text{ или } \frac{1-P(A)}{M\overset{\wedge}{\alpha}_1} \leq -\frac{1}{T} \log p_0.$$

Обслуживание N источников. Через $\overset{\wedge}{\pi}_{i-1}$ обозначим интервал времени, начинающийся с момента начала восстановления или (первого) обслуживания вызова какого-нибудь источника с номером $1, \dots, i-1$ до первого следующего момента, когда прибор становится

доступным для обслуживания вызовов с номерами $i, i+1, \dots, N$, при условии, что за этот период не наблюдалось потери вызовов $1, \dots, i-1$. Обозначим

$$\hat{\pi}_{i-1}(t) = P\{\hat{\pi}_{i-1} < t\}; \hat{\pi}_{i-1}(s) = Me^{-s\hat{\pi}_{i-1}}.$$

Предположим, что прибор ненадежен и время его безотказной работы распределено по показательному закону с параметром $\sigma > 0$, время ремонта — с ф. р. $F(x)$. Ремонт полностью восстанавливает свойства обслуживающего прибора. Результаты для вспомогательной модели дают возможность определить период занятости системы из N источников, вероятность безотказной работы за время T и получить интересные асимптотические результаты.

Положим

$$\hat{\pi}_0(s) = \varphi(s), \sigma_0 = \sigma, \sigma_i = \sigma + \alpha_1 + \dots + \alpha_i, \quad (24)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Если рассматривать процесс обслуживания i -го источника, то ввиду абсолютного приоритета присутствие источников $i+1, \dots, N$ не влияет на его характеристики. Выходом прибора из строя можно считать как отказ прибора, так и приход вызова с номером, меньшим чем i , поэтому интервал доступности прибора для i -вызова распределен по показательному закону с параметром σ_{i-1} , а интервал недоступности длится случайное время $\hat{\pi}_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Таким образом, мы получили вспомогательную систему, вписываемую внутрь общей системы.

Теорема 3. *Функции $\hat{\pi}_i(s)$ могут быть получены последовательно по формулам*

$$\hat{\pi}_i(s) = \frac{\sigma_{i-1} \hat{\pi}_{i1}(s)}{\sigma_i \hat{\pi}_{i1}(0)} + \frac{\alpha_i \hat{\pi}_{i2}(s)}{\sigma_i \hat{\pi}_{i2}(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (25)$$

где $\hat{\pi}_{i1}(s)$ и $\hat{\pi}_{i2}(s)$ задаются выражениями (2), (3) при замене $\varphi(s)$, α , σ , ν , $\beta_j(s)$ ($j = 1, 2$) на $\hat{\pi}_{i-1}(s)$, α_i , ν_i , σ_{i-1} , $\beta_j^{(i)}(s)$ соответственно, т. е.

$$\hat{\pi}_{i1}(s) = \frac{\hat{\pi}_{i-1}(s + \alpha_i) \left[1 - \frac{\sigma_{i-1}}{s + \sigma_{i-1}} (1 - \beta_1^{(i)}(s + \sigma_{i-1})) \hat{\pi}_{i-1}(s + \nu_i) \right] + \frac{\alpha_i}{\sigma_{i-1}} \cdot \frac{\alpha_i}{\alpha_i - \nu_i} [\hat{\pi}_{i-1}(s + \nu_i) - \hat{\pi}_{i-1}(s + \alpha_i)] \beta_1^{(i)}(s + \sigma_{i-1}) \times + \frac{\alpha_i}{\alpha_i - \nu_i} [\hat{\pi}_{i-1}(s + \nu_i) - \hat{\pi}_{i-1}(s + \alpha_i)] \cdot \beta_1^{(i)}(s + \sigma_{i-1}) \cdot \beta_2^{(i)}(s + \sigma_{i-1})}{\times [1 - \beta_2^{(i)}(s + \sigma_{i+1})] - \frac{\sigma_{i-1}}{s + \sigma_{i-1}} [1 - \beta_1^{(i)}(s + \sigma_{i-1})] \hat{\pi}_{i-1}(s + \nu_i) + \frac{\beta_2^{(i)}(s + \sigma_{i-1}) + \frac{\sigma_{i-1}}{s + \sigma_{i-1}} (1 - \beta_2^{(i)}(s + \sigma_{i-1})) \hat{\pi}_{i-1}(s + \alpha_i)] \times 1 - \frac{\sigma_{i-1}}{s + \sigma_{i-1}} \cdot \frac{\alpha_i}{\alpha_i - \nu_i} [\hat{\pi}_{i-1}(s + \nu_i) - \hat{\pi}_{i-1}(s + \alpha_i)] \beta_1^{(i)}(s + \sigma_{i-1}) \times}$$

$$\hat{\pi}_{i2}(s) = \frac{\hat{\pi}_{i-1}(s + \nu_i) - \hat{\pi}_{i-1}(s + \alpha_i)}{1 - \frac{\sigma_{i-1}}{s + \sigma_{i-1}} \cdot \frac{\alpha_i}{\alpha_i - \nu_i} [\hat{\pi}_{i-1}(s + \nu_i) - \hat{\pi}_{i-1}(s + \alpha_i)] \beta_1^{(i)}(s + \sigma_{i-1}) \times}$$

$$\begin{aligned} & \times [1 - \frac{\sigma_{i-1}}{s + \sigma_{i-1}} (1 - \beta_1^{(i)}(s + \sigma_{i-1})) \hat{\pi}_{i-1}(s + \nu_i)] \\ & \times [1 - \beta_2^{(i)}(s + \sigma_{i-1})] - \frac{\sigma_{i-1}}{s + \sigma_{i-1}} [1 - \beta_1^{(i)}(s + \sigma_{i-1})] \hat{\pi}_{i-1}(s + \nu_i) \end{aligned} \quad (27)$$

Если где-нибудь $a_i = \nu_i$, учитывается замечание 1.

Тем самым определен период занятости $\hat{\pi}_i$ системы обслуживанием первых i вызовов при условии, что не наблюдалось потерь вызовов с номерами $1, \dots, i$. Через A_i обозначим следующее событие: на одном периоде занятости $\hat{\pi}_i$ не потеряя i -вызов, при условии, что за это время не потеряя ни один из вызовов с номерами $1, \dots, i-1$. Тогда $P(A_i)$ задается формулой (8) с указанными выше заменами параметров σ , α , ν и функций $\varphi(s)$, $\beta_1(s)$, $\beta_2(s)$.

Через θ_i обозначим промежуток времени с момента $t=0$ до первой потери i -вызова при условии, что до этого не потеряя ни один вызов с номерами $1, \dots, i-1$. Определение θ_i производится как во вспомогательной системе обслуживания. Если определить величину τ_i как суммарную длительность периодов регенераций до потери i -вызова при условии, что до того не терялись вызовы $1, \dots, i-1$ и λ_i — как число этих периодов регенераций, то

$$\tau_i = \hat{\alpha}_1^{(i)} + \dots + \hat{\alpha}_{\lambda_i}^{(i)},$$

где $P[\hat{\alpha}_i^{(i)} < t] = [1 - e^{-\sigma t}] * \hat{\Pi}_i(t)$. При этом

$$\hat{\alpha}_1^{(i)} + \dots + \hat{\alpha}_{\lambda_i}^{(i)} \leq \theta_i \leq \hat{\alpha}_1^{(i)} + \dots + \hat{\alpha}_{\lambda_i}^{(i)}, \quad (28)$$

и асимптотические свойства θ_i могут быть установлены с помощью (28).

Предположим, что параметры σ , α_i , ν_i , $\beta_1^{(i)}$ — фиксированы и конечны, однако φ_1 и $\beta_2^{(i)}$ можно менять. Пусть $\varphi_1 \rightarrow 0$, $\beta_2^{(i)} \rightarrow 0$, $i=1, \dots, N$. Будем говорить в таком случае, что обслуживания — быстрые. Тогда легко заметить, что если $\varphi_1 \rightarrow 0$ и $\beta_2^{(i)} \rightarrow 0$, то $[\hat{\pi}_{11} \rightarrow 0$. Индуктивно получим, что все $\hat{\pi}_{i1} \rightarrow 0$ при быстрых обслуживаниях. Также нетрудно видеть, что если обслуживания — быстрые, то $P(A_i) \rightarrow 1$, т. е. $\theta_i \xrightarrow{P} \infty$. Как и во вспомогательной системе получим, что в таком случае справедливы асимптотические соотношения

$$P(\theta_i > x) \sim e^{-\frac{1-P(A_i)}{M \hat{\alpha}_i^{(i)}} x}, \quad i=1, \dots, N. \quad (29)$$

Пусть в момент 0 все вызовы находятся в своих источниках. Через θ обозначим время до первой потери какого-нибудь вызова. Пусть $T > 0$ — некоторый момент времени и $B_i(T)$ означает событие, заключающееся в том, что до момента T i -вызов не потеряя, $i=1, \dots, N$. Тогда, очевидно

$$P(\theta > T) = P\left\{\bigcap_{i=1}^N B_i(T)\right\}. \quad (30)$$

Применив несколько раз формулу

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A),$$

получим

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^N B_i(T)\right\} = \prod_{i=1}^N P\left\{B_i(T) \left| \bigcap_{j=1}^{i-1} B_j(T) \right.\right\}. \quad (31)$$

Заметим, что здесь

$$P\left\{B_i(T) \left| \bigcap_{j=1}^{i-1} B_j(T) \right.\right\} = P(\theta_i > T), \quad i=1, \dots, N. \quad (32)$$

Из соотношений (30)—(32) выводится

Теорема 4.1. *Время θ до первой потери вызова удовлетворяет соотношению*

$$P\{\theta > T\} = \prod_{i=1}^N P\{\theta_i > T\}. \quad (33)$$

2. При быстрых обслуживаниях справедливо асимптотическое соотношение

$$P\{\theta > T\} \sim \exp\left\{-\sum_{i=1}^N \frac{1 - P(A_i)}{M \hat{a}_i^{(i)}} T\right\}. \quad (34)$$

Формулой (34) можно пользоваться при не очень больших значениях N , при которых $\hat{\pi}_{N1}$ все еще малы по сравнению с параметрами $\frac{1}{\sigma_i}$, $\frac{1}{a_i}$, $\frac{1}{v_i}$.

Дополнения. При получении (21) из (20) мы пользовались утверждением

$$\lim_{\gamma_i \rightarrow 0} P\left\{\frac{\hat{a}_1 + \dots + \hat{a}_N}{\lambda \cdot M \hat{a}_1} \cdot \frac{\lambda}{M\lambda} > x\right\} = e^{-x}, \quad (35)$$

которое получается из доказываемых ниже лемм.

Лемма 1. Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ и

$$P\{\xi < \infty\} = P\{\eta < \infty\} = 1,$$

то

$$\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} \xi \cdot \eta. \quad (36)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ — любые числа. Справедливы неравенства

$$P\{|\xi_n \eta_n - \xi \eta| \geq \varepsilon\} \leq P\left\{|\xi_n - \xi| \cdot |\eta_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|\xi| \cdot |\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \quad (37)$$

Однако последовательность η_n стохастически ограничена, т. е. существует число M такое, что

$$P \{ |\eta_n| > M \text{ для всех } n \} < \frac{\delta}{4}.$$

Можно выбрать M еще таким образом, чтобы

$$P \{ |\xi| > M \} < \frac{\delta}{4}.$$

Существует такое n_0 , что при всех $n > n_0$

$$P \left\{ |\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2M} \right\} < \frac{\delta}{4}, \quad P \left\{ |\eta_n - \eta| > \frac{\varepsilon}{2M} \right\} < \frac{\delta}{4}.$$

Повтому получим

$$P \left\{ |\xi_n - \xi| \cdot |\eta_n| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} < P \{ |\eta_n| > M \} + P \left\{ |\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2M} \right\} < \frac{\delta}{2},$$

а также

$$P \left\{ |\xi| \cdot |\eta_n - \eta| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} < \frac{\delta}{2}.$$

Последние два неравенства и (37) дают

$$P \{ |\xi_n \eta_n - \xi \eta| \geq \varepsilon \} < \delta,$$

что и утверждается в (36). Лемма 1 доказана.

Пусть $\{a_i^{(n)}\}_{i>1}$ ($n=1, 2, \dots$) — последовательность независимых при каждом n , одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, и пусть при $n \rightarrow \infty$

$$a_i^{(n)} \xrightarrow{P} a_i, \quad M a_i^{(n)} \rightarrow M a_i \neq 0. \quad (38)$$

При этих условиях верна

Лемма 2. Для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует такое N , что при всех n и $k > N$

$$P \left\{ \left| \frac{\alpha_1^{(n)} + \dots + \alpha_k^{(n)}}{k M \alpha_1^{(n)}} - 1 \right| > \varepsilon \right\} < \delta. \quad (39)$$

Доказательство. Положим $\xi_{ni} = \frac{\alpha_i^{(n)}}{n M \alpha_1^{(n)}}$ и покажем, что последовательность серий $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$ подчиняется закону больших чисел, т. е. последовательность сумм $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ является относительно устойчивой (ср. [10], стр. 142). Для этого необходимо и достаточно, чтобы при $n \rightarrow \infty$

$$n \int_1^{\infty} dF_n(n M \alpha_1^{(n)} x + M \alpha_1^{(n)}) \rightarrow 0, \quad (40)$$

где $F_n(x) = P \{ \alpha_1^{(n)} < x \}$.

В силу (38) имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{M \alpha_1^{(n)}} = \frac{1}{M a_1} \neq 0$ и

$$n \cdot \int_1^{\infty} dF_n(nM\alpha_1^{(n)}x + M\alpha_1^{(n)}) \leq \frac{1}{M\alpha_1^{(n)}} \int_{m \cdot M\alpha_1^{(n)}}^{\infty} y dF_n(y + M\alpha_1^{(n)}).$$

Таким образом, для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует такое n_0 , что при всех $n > n_0$

$$P\{|S_n - 1| \geq \varepsilon\} < \delta/2. \quad (41)$$

С другой стороны, последовательность $\{\alpha_i^{(n)}\}_{i>1}$, $m=1, \dots, n_0$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, т. е. для $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существуют такие числа N_m , что при всех $k > N_m$

$$P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(m)} + \dots + \alpha_k^{(m)}}{kM\alpha_1^{(m)}} - 1\right| > \varepsilon\right\} < \delta/2, \quad m=1, \dots, n_0. \quad (42)$$

Теперь (39) следует из (41) и (42), если мы выберем

$$N = \max\{N_1, \dots, N_{n_0}, n_0\}.$$

Лемма 3. Если последовательность $\{\alpha_i^{(n)}\}$ удовлетворяет условиям леммы 2 и целочисленные сл. в. $\lambda_n > 0$ таковы, что $\lambda_n \xrightarrow{p} \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{\alpha_1^{(n)} + \dots + \alpha_{\lambda_n}^{(n)}}{\lambda_n \cdot M\alpha_1^{(n)}} \xrightarrow{p} 1. \quad (43)$$

Доказательство. Пусть N — достаточно большое число, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Существует такое n_0 , что при всех $n > n_0$

$$P\{\lambda_n > N\} > 1 - \delta.$$

Выберем для N то значение, при котором выполняется соотношение (39) для всех $k > N$. При всех $n > n_0$

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(n)} + \dots + \alpha_{\lambda_n}^{(n)}}{\lambda_n \cdot M\alpha_1^{(n)}} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} &= P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(n)} + \dots + \alpha_{\lambda_n}^{(n)}}{\lambda_n \cdot M\alpha_1^{(n)}} - 1\right| > \varepsilon \cap \{\lambda_n \leq N\}\right\} + \\ &+ P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(n)} + \dots + \alpha_{\lambda_n}^{(n)}}{\lambda_n \cdot M\alpha_1^{(n)}} - 1\right| > \varepsilon \cap \{\lambda_n > N\}\right\} \leq \\ &\leq P\{\lambda_n \leq N\} + P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(n)} + \dots + \alpha_k^{(n)}}{k \cdot M\alpha_1^{(n)}} - 1\right| > \varepsilon \text{ для всех } k > N\right\} < 2\delta, \end{aligned}$$

и лемма 3 доказана.

Соотношение (35) следует из леммы 1 с учетом (15) и (43).

է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Բ. Ն. ԴԻՄԻՏՐՈՎ. Վերջավոր թվով աղբյուրներ և սպասողության ժամանակի վրա դրված սահմանափակումներ ունեցող ետխապատվություններով մի սխեմա (ամփոփում)

Դիտարկվում է նախապատվություններ սպասողության վերջավոր թվով աղբյուրներ ունեցող սպասարկման սխեմաներ: Ստացված են սեկուրիտետ առկայություններ զրադվածության տեղադրության և պահանջի սխեմանում մնալու ժամանակաշրջանի համար:

Ենթադրելով, որ սպասարկման ժամանակները փոքր են, ուսումնասիրվում է պահանջի առաջին կորուստի մոմենտի ասիմպտոտիկ վարքը:

E. A. DANIELIAN, B. N. DIMITROV. *On a priority finitesource system with bounded waiting time (summary)*

Finite-source single server queuing system with preemptive priority discipline and some other special features is considered.

Recurrent relations for the busy period and for the time spent by a customer in the queue are derived. The asymptotic behaviour of the time before the first loss of a customer is studied in the case when the service times are small.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. K. Jaiswal. Priority Queues, Academic Press, New York and London, vol. 50s 1968.
2. В. Ф. Матвеев. Однолинейная система обслуживания с приоритетом, Изд-во МГУ, сб. «Матем. вопр. управл. произв.», вып. 2, 1970.
3. О. И. Бронштейн. Об управляемой системе многоэтапного обслуживания «Техн. киберн.», № 2, 1969.
4. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. Введение в теорию массового обслуживания, М., «Наука», 1966.
5. Л. Г. Афанасьева. О некоторых задачах массового обслуживания с ограниченным временем ожидания, «Техн. киберн.», № 6, 1964.
6. И. Н. Коваленко. Некоторые задачи массового обслуживания с ограничением Теор. вер. и ее прил., VI, вып. 2, 1961.
7. Э. А. Даниелян, Б. Н. Димитров, Б. Н. Пискунов. Об одной системе управления с конечным числом объектов и приоритетом, Сб. ОКБА «Автоматизация химических производств», НИИТЭХИМ, М., 4, 1971.
8. Д. Кокс, В. Смит. Теория восстановления, М., «Советское Радио», 1967.
9. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей, М., «Наука», 1969.
10. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.