ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 1, 1972 Математика

Л. А. ОГАНЕСЯН

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ТОМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Для решения уравнений Навье-Стокса в многоугольных областях, стороны которых параллельны осям координат, успешно применяется разностная схема Тома [1], [2]. В настоящей работе показано, что эта схема для уравнений, заданных в прямоугольнике, имеет точность $O(h^{2-\alpha})$, где h — шаг сетки по пространственным переменным, α — малая константа.

Обозначения. Переменные x, y, t — независимые переменные, x и y будем называть пространственными переменными, t — переменной по времени: $\square$ — прямоугольник $0<x<A=\text{const}$, $0<y<B=$ $=\text{const}$ в переменных x, y, Γ — его граница.

Нормы. Пусть $\psi(x, y, t)$ — функция в $\square$, зависящая от t при $0\leqslant t\leqslant T=\text{const}$ как от параметра, $\|\psi\|_{k,\eta}$ — норма в пространстве Соболева $W_2^k(\square)$ функции $\psi(x, y, t)$, рассматриваемой как функция только x и y при $t=\eta$, например

$$\|\psi\|^2_{1,\eta}=\iint\limits_{\square}dxdy\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y, \eta)\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y, \eta)\right)^2+\psi^2(x, y\ \eta)\right],$$

$$\|\psi\|_k=\max_t\|\psi\|_{k,t},\quad |||\psi|||^2_{k,\eta}=\int\limits_0^\eta dt\|\psi\|^2_{k,t}$$

(значок η в указателе нормы может опускаться).

Сетка. Примем ради простоты, что $M=\dfrac{A}{h}$ и $J=\dfrac{B}{h}$ — целые числа, (x_m, y_j) — точки сетки или узлы сетки, причем $x_m=mh$, $y_j=jh$, $m=-1, 0,\cdots, M+1$, $j=-1, 0,\cdots, J+1$, $\square_h$ — множество точек сетки $(x_m, y_j)\in\square$, Γ_h — множество $(x_m, y_j)\in\Gamma$, γ — множество всех граничных узлов, кроме вершин $\square$, ω — элементы γ, $t_n=n\tau$ — n-ый момент времени в сеточной задаче, $\tau=O(h^2)$ — шаг по времени, $N\tau=T$, $n=0, 1,\cdots, N$, ω_+ — ближайшая к ω точка из $\square_h$, то есть ближайшая к ω точка сетки внутри $\square$, ω_- — ближайшая к ω точка сетки, такая что $\omega_-\overline{\in}\square_h\cup\Gamma_h$, то есть ближайшая к ω точка сетки вне прямоугольника $\square$, $\Omega_h\equiv\square_h\cup\Gamma_h\cup(\bigcup\limits_{\gamma}\omega_-)$.

Константы. C, ε, α — положительные константы, не зависящие от шагов сетки и от оцениваемых функций, ε и α сколь угодно малы (отметим, что одной буквой могут обозначаться различные константы), $\mathrm{h}=h/2$, неравенство $a \ll b$ означает, что $a \leqslant Cb$.

Дифференциальные и разностные операторы. Осреднения.

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 u \equiv \Delta\,(\Delta u),$$

$u_x \equiv (u\,(x+h,\ y,\ t) - u\,(x,\ y,\ t))/h,\ u_{\bar{x}} \equiv (u\,(x,\ y,\ t) - u\,(x-h,\ y,\ t))/h,$

$u_{\hat{x}} = (u_x + u_{\bar{x}})/2$, аналогично определяются разностные отношения по y и t, а также отношения $u_{x\bar{x}}$, u_{xy} и др.

$$\Delta_h u = u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}}, \quad \Delta_h^2 u = \Delta_h\,(\Delta_h u),$$

$u^x\,(x,\ y,\ t) = h^{-1} \int\limits_{x-\mathrm{h}}^{x+\mathrm{h}} d\zeta\ u\,(\zeta,\ y,\ t)$, аналогично определяются u^y и u^t,

$u^{p|} \equiv (u^x)^y \equiv u^{xy}$, смысл u^{pp}, u^{pt} и др. очевиден;

$$\hat{u}\,(x,\ y,\ t) \equiv u\,(x,\ y,\ t+\tau),\ \overset{\tau}{u}\,(x,\ y,\ t) = u\left(x,\ y,\ t + \frac{\tau}{2}\right).$$

Скалярные произведения и сеточные нормы.

$$(u,\ v)^x = h \sum_{m=1}^{M-1} u\,(x_m,\ y_j,\ t_n)\, v\,(x_m,\ y_j,\ t_n) \equiv h \sum_{m=1}^{M-1} uv$$

(в последней сумме не отмечена зависимость от j и n)

$$[u,\ v)^x = h \sum_{m=0}^{M-1} uv;\ [u,\ v]^x = h \sum_{m=0}^{M} uv;\ \langle u,\ v)^x = \{[u,\ v)^x + (u,\ v)^x\}/2.$$

Таким образом, вид скобки определяет с каким коэффициентом входит в сумму значение uv в граничном узле (означает, что uv в левом граничном узле не входит в сумму, [означает, что uv в левом граничном узле входит с коэффициентом 1, < означает, что uv в левом граничном узле входит с коэффициентом 1/2. Аналогичный смысл имеют правые скобки; $[[u,\ v]^x]^y = h^2 \sum_{j=0}^{J} \sum_{m=0}^{M} uv$. По аналогии ясен смысл $([u,\ v\rangle^x]^y$, $[\langle u,\ v)^x]^y$ и др. Последние выражения суть скалярные произведения на сетке. Если значки x и y опущены, значит внутренние скобки указывают пределы суммирования по x, а внешние—по y; например, $[[u,\ v]] \equiv [[u,\ v]^x]^y$; $[[u]] \equiv ([[u,\ u]])^{1/2}$, аналогично определяются $](u\rangle)$, $(\langle u]]$ и др. Последние выражения суть нормы на некоторых сетках. В заключение отметим формулу суммирования по частям: $[u_x,\ v) = uv\Big|_0^M - (u,\ v_{\bar{x}}]$.

§ 1. Дифференциальное и разностное уравнения

Требуется решить уравнение в $\square$ при $0<t\leqslant T$

$$L\psi\equiv-\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta^2\psi+\frac{\partial}{\partial x}(a\Delta\psi)-\frac{\partial}{\partial y}(b\Delta\psi)=f, \tag{1.1}$$

где $\psi(x, y, t)$—искомая, а f—заданная функция, $a=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $b=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, при условиях

$$\psi\Big|_\Gamma=\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_\Gamma=0 \text{ при } 0<t\leqslant T \tag{1.2}$$

и
$$\psi|_{t=0}=0.$$

Ввиду наличия угловых точек у $\square$ нет основания ожидать, что ψ будет гладкой функцией x и y даже при сколь угодно гладких $f(x, y, t)$. Примем поэтому, что у ψ ограничена норма $[[\psi]]$, где

$$[[\psi]]=\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{7/_4}+\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\|+\|\psi\|_{4}. \tag{1.3}$$

Основания для этого допущения приведены в приложении. Примем, кроме того, что a и b—известные функции, т. е. будем решать линеаризованные уравнения Навье-Стокса.

Для решения задачи (1.1)—(1.2) Том [1] предложил следующую разностную схему. Найти $v(x_m, y_l, t_n)$, удовлетворяющее

а) алгебраической системе в $\square_h$ при t_n, соответствующих $n=0, 1,\cdots, N-1$:

$$L_h v\equiv-\Delta_h v_t+\Delta_h^2 v+(a\Delta_h v)_{\hat{x}}-(b\Delta_h v)_{\hat{y}}=f^{\text{ppt}}, \tag{1.1'}$$

б) „граничным условиям“

$$v\Big|_{\Gamma_h}=0,\quad \frac{v(\omega_+)-v(\omega_-)}{2h}\Big|_{\gamma}=0 \tag{1.2'}$$

при t_n, соответствующих $n=1, 2,\cdots, N$,

в) условию $v|_{t_0}=0$ в Ω_h. (Отметим, что приведенная схема несущественно отличается от схемы в [1]).

Из приведенной системы определяются v для последовательных значений t_n. Действительно, начальное значение $v|_{t_0}=0$ в Ω_h известно. Пусть теперь нам известно v при t_n и всех $(x_m, y_l)\in\Omega_h$. Тогда в (1.1′) определены операторы $\Delta_h^2 v$, $(a\Delta_h v)_{\hat{x}}$, $(b\Delta_h v)_{\hat{y}}$, так как они используют лишь значения v в точках Ω_h. Из (1.1′) определяется $\Delta_h v_t\equiv\tau^{-1}(\Delta_h\hat{v}-\Delta_h v)$ в $\square_h$ и, так как второе слагаемое известно, то определяется и $\Delta_h\hat{v}$. Используя „граничное условие“ $\hat{v}|_{\Gamma_h}=0$, мы можем обратить оператор $\Delta_h\hat{v}$ и найти $\hat{v}$ в $\square_h\cup\Gamma_h$. Из второго „граничного условия“ найдется $\hat{v}(\omega_-)$, т. е. мы найдем $\hat{v}$ во всем Ω_h.

Для простоты изложения, положим пока $a=0$, $b=0$. В § 8 мы изучим влияние отброшенных членов.

§ 2. Уравнение для невязки

При доказательстве сходимости разностной схемы обычно пользуются тем, что решение ψ уравнения (1.1) приближенно удовлетворяет разностным уравнениям. Мы также покажем нечто подобное. Продолжим ψ по x, y и t с сохранением нормы (1.3) на все значения x, y и t. Осредним (1.1) два раза по ρ и раз по t в узлах $\square_h$. Используем известные легко проверяемые соотношения:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^{xx} = \psi_{x\bar x} = \frac{\partial^2\psi^{xx}}{\partial x^2}\,;\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^{t}\Bigg|_{t=t_n+\frac{\tau}{2}} = \psi_t\big|_{t=t_n}. \tag{2.1}$$

Из (1.1) получим равенство

$$-(\psi^{yy}_{x\bar x t}+\psi^{xx}_{y\bar y t})+\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt}_{x\bar x}+\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{xxt}_{y\bar y}=\overset{\tau}{f}{}^{\rho\rho t}\ \text{в}\ \square_h,$$

которое за счет прибавления и вычитания соответствующих разностных отношений от $\psi^{\rho\rho t}$ можно привести к виду

$$-(\psi^{\rho\rho t}_{x\bar x t}+\psi^{\rho\rho t}_{y\bar y t})+\Delta_h\overset{\tau}{\psi}{}^{\rho\rho t}_{x\bar x}+\Delta_h\psi^{\rho\rho t}_{y\bar y}\equiv-\Delta_h\psi^{\rho\rho t}_t+\Delta_h^2\psi^{\rho\rho t}=\overset{\tau}{f}{}^{\rho\rho t}-H,$$

где невязка H равна

$$H=(\psi^{\rho\rho t}-\psi^{yy})_{x\bar x t}+(\psi^{\rho\rho t}-\psi^{xx})_{y\bar y t}+$$

$$+(\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt}_{x\bar x}-\Delta_h\psi^{\rho\rho t}_{x\bar x})+(\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{xxt}_{y\bar y}-\Delta_h\psi^{\rho\rho t}_{y\bar y}). \tag{2.2}$$

Теперь видно, что $\psi^{\rho\rho t}$ почти удовлетворяет (1.1′), так как все члены H малы. Составим уравнение для $\theta\equiv v(x_m, y_j, t_n)-\psi^{\rho\rho t}\big|_{x=x_m,\,y=y_j,\,t=t_n}$

$$-\Delta_h\theta_t+\Delta_h^2\theta=H\ \text{в}\ \square_h\ \text{и для}\ t_n\ \text{при}\ n=0, 1,\cdots, N-1. \tag{2.3}$$

Хочется воспользоваться обычной техникой доказательства сходимости схем для параболических уравнений [3], стр. 263: умножить (2.3) на θ, просуммировать такие произведения по x, y, t и далее „интегрированием“ (точнее суммированием) по частям получить слева квадрат некоторой нормы θ. Однако вследствие правила продолжения ψ с сохранением нормы $\|\ \|_{\cdot}$ $\psi^{\rho\rho t}$, а тем самым и θ, будет удовлетворять граничным условиям (1.2) лишь приближенно. Это не дает возможности при суммировании по частям избавиться от членов, вылезающих на границе. Поэтому постараемся построить функцию Φ, которая была бы мала и чтобы $\theta+\Phi\equiv w$ уже удовлетворяла бы граничным условиям. Для этого Φ должна удовлетворять условиям

$$\Phi\Big|_{\Gamma_h}=\psi^{\rho\rho t}\Big|_{\Gamma_h},\quad \frac{\Phi(\omega_+)-\Phi(\omega_-)}{2h}\Bigg|_{\gamma}=\frac{\psi^{\rho\rho t}(\omega_+)-\psi^{\rho\rho t}(\omega_-)}{2h}\Bigg|_{\gamma}. \tag{2.4}$$

Прибавив к обеим частям (2.3) выражение $-\Delta_h\Phi_t+\Delta_h^2\Phi$, получим уравнение для w в F:

$$L_h w \equiv -\Delta_h w_t + \Delta_h^2 w = F, \tag{2.5}$$

где $F=F_1+F_2+F_3+F_4$,

$$F_1=(\psi^{\rho\rho t}-\psi^{yy}-\Phi)_{\bar{x}xt},\quad F_2=(\psi^{\rho\rho t}-\psi^{xx}-\Phi)_{y\bar{y}t},$$

$$F_3=(\Delta\overset{*}{\psi}{}^{yyt}-\Delta_h\psi^{\rho\rho t}+\Delta_h\Phi)_{x\bar{x}},\quad F_4=(\Delta\overset{*}{\psi}{}^{xxt}-\Delta_h\psi^{\rho\rho t}+\Delta_h\Phi)_{y\bar{y}}.$$

С помощью этого уравнения в последующем получим нужные оценки. Как выяснится в следующих параграфах, нам не удается построить описанную функцию Φ, удовлетворяющую (2.4), однако мы построим Φ, удовлетворяющую (2.4) везде, кроме 4-х точек. Это оказывается достаточным для оценок.

§ 3. Вспомогательные неравенства

Прежде чем приступить к построению Φ, приведем ряд неравенств, широко используемых в последующем.

1. Неравенства, связанные с осреднениями. Нам понадобится оценивать скорость стремления осредненных функций к исходной. Впредь будем считать, что функции распространены финитным образом на всю плоскость с сохранением нужных норм и под $\|\ \|_k$, если не оговорено противное, будем понимать норму по всей плоскости x, y.

а) Рассмотрим функцию $u(x)$ одной переменной. Интуитивно ясно, что осредненная функция u^x будет стремиться к u при $h\to 0$ со скоростью $O(h^2)$. Докажем этот факт. Проведем характерную для последующего выкладку. Составим разность

$$u^x(x)-u(x)=h^{-1}\int_{-h}^{h}d\zeta\,[u(x+\zeta)-u(x)]=h^{-1}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_0^{\zeta}\frac{\partial u}{\partial\eta}(x+\eta)\,d\eta. \tag{3.1}$$

Заметим, что если бы подынтегральная функция в последнем интеграле была постоянной, то интеграл равнялся бы нулю. Значит к подынтегральной функции можно прибавить любую функцию, не зависящую от η и ζ. Тогда

$$u^x(x)-u(x)=h^{-1}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_0^{\zeta}d\eta\left[\frac{\partial u}{\partial\eta}(x+\eta)-\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right]$$ и отсюда получим

$$u^x(x)-u(x)=h^{-1}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_0^{\zeta}d\eta\int_0^{\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x+t)\,dt. \tag{3.2}$$

Легко заметить, что аргумент функции $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x+t)$ не выходит за пределы $(x-\mathrm{h},\ x+\mathrm{h})$. Расширим пределы внутреннего интеграла до $-\mathrm{h}$, h, получим оценку:

$$|u^x-u|\ll\frac{h^2}{h}\int_{-\mathrm{h}}^{\mathrm{h}}\left|\frac{\partial^2u\,(x+t)}{\partial t^2}\right|dt.$$

Отсюда следует

$$|u^x-u|^2\ll h^3\int_{-\mathrm{h}}^{\mathrm{h}}dt\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}(x+t)\right)^2. \tag{3.3}$$

Складывая такие неравенства, написанные для всех x_m, получим

$$h\sum_{m=0}^{M}|u^x-u|^2\ll h^4\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2dx. \tag{3.3'}$$

Прием получения тождества типа (3.2) и неравенств типа (3.3) и (3.3′) из (3.2) будет применяться без подробного объяснения, однако тождества типа (3.2) всегда будут выписаны, и их легко проверить, вычислив интегралы в правой части равенства.

Следствием (3.3′) является неравенство для $z\,(x,\ y)$, заданного при $|x|,\ |y|<\infty$

$$[[(z^y)^x-(z^y)]]^2\ll h^5\sum_{j=0}^{J}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(\frac{\partial^2z^y}{\partial x^2}\,(x,\ y_j)\right)^2\ll h^4\|z\|_2^2. \tag{3.4}$$

Элементарно получается отсюда неравенство

$$[[(z^y)^{xx}-(z^y)]]\ll[[(z^x)^{yx}-(z^x)^y]]+[[z^{yx}-z^y]]\ll$$
$$\ll h^2\|z^x\|_2+h^2\|z\|_2\ll h^2\|z\|_2. \tag{3.4'}$$

Как следствие последнего неравенства при $z=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$, помня, что $z^{xx}=$ $=u_{x\bar{x}}$, получим $\left[\left[u^y_{x\bar{x}}-\dfrac{\partial^2u^y}{\partial x^2}\right]\right]\ll h^2\|u\|_4$ и

$$[[\Delta_hu^p-\Delta u^p]]\ll h^2\|u\|_4. \tag{3.5}$$

II. Неравенства, связанные с оператором $\Delta_h u$. а) Во-первых, отметим аналог теоремы об эквивалентности норм $\|\Delta u\|_{L_2^0}$ и $\|u\|_{L_2^2}$. Если $u|_{\Gamma_h}=0$, то имеет место эквивалентность

$$((\Delta_h u))^2\sim((u_{x\bar{x}}))^2+((u_{y\bar{y}}))^2+2\,[[u_{xy}))^2. \tag{3.6}$$

б) Пусть $\Delta_h^{-1}q$ обозначает решение p уравнения $\Delta_hp=q$ в $\square_h$, $p|_{\Gamma_h}=0$. Тогда при произвольном u и F имеет место неравенство $|((u_{x\bar{x}},\ \Delta_h^{-1}F_{\bar{x}}))|\ll h^{-2}\,([u])^2+([F))^2$. Действительно, обозначим $\Delta_h^{-1}F_{\bar{x}}=$ $=\nu$, тогда $\Delta_h\nu=F_{\bar{x}}$ в $\square_h$. Умножив последнее равенство на ν и суммируя по частям, получим неравенство: $([v_x))^2+[(v_y))^2 \ll ([F))^2$. Отсюда следует, что $|((u_{x\bar{x}}, v))|=|([u_x, v_x))| \ll h^{-2}([u])^2+([F))^2$. Так же оценится $((u_{y\bar{y}}, v))$, значит имеет место неравенство

$$|((u_{y\bar{y}}, \Delta_h^{-1} F_{\bar{x}}))| + |((u_{x\bar{x}}, \Delta_h^{-1} F_{\bar{x}}))| \ll h^{-2} \{[(u)]^2+([u])^2\}+([F))^2. \tag{3.8}$$

III. Неравенства, связывающие свойства периодических функций и коэффициентов их рядов Фурье.

Пусть дана функция дискретного аргумента x_m и непрерывного — y, равная нулю при $|y|>\pi$ и периодическая по x с периодом 2π. Обозначим ее $u(x_m, y)$, и будем считать для простоты, что π/h есть целое число K. Обозначим $S(u)=h\sum_m \int_{-\pi}^{\pi} u^2(x_m, y)\,dy$. Здесь сумма по m берется по x_m в пределах одного периода. Представим $u(x_m, y)$ в виде тригонометрического полинома: $u(x_m, y)=\sum_k e^{ikx_m} a_k(y)$ (в таких разложениях целое число k всегда меняется в пределах $-K<k\leqslant K$). Пусть $u=z^{xx}$. Тогда имеют место неравенства

$$\sum_k k^4 \int_{-\pi}^{\pi} |a_k^2(y)|\,dy \ll \|z\|_2^2, \tag{3.9}$$

$$\sum_k k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial a_k}{\partial y}\right|^2 dy \ll \|z\|_2^2, \tag{3.10}$$

$$\sum_k \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial^2 a_k}{\partial y^2}\right|^2 dy \ll \|z\|_2^2. \tag{3.11}$$

Действительно, $u_{x\bar{x}}=-\sum e^{ikx} S_k^2 a_k(y)$ $\left(\text{где впредь } S_k=\dfrac{\sin kh/2}{h/2}\right)$, а $u_x=i\sum_k e^{ikx} e^{ikh/2} S_k a_k(y)$. Из равенства Бесселя следует:

$$\|z\|_2^2 \gg S(u_{x\bar{x}}) \sim \sum_k S_k^4 \int_{-\pi}^{\pi} |a_k^2|\,dy \sim \sum_k k^4 \int_{-\pi}^{\pi} |a_k^2|\,dy, \text{ т. е. (3.9)},$$

$$\|z\|_2^2 \gg S\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \sim \sum_k S_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial a_k}{\partial y}\right|^2 \sim \sum_k k^2 \int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial a_k}{\partial y}\right|^2, \text{ т. е. (3.10)}.$$

Неравенство (3.11) очевидно.

IV. Дискретные неравенства типа теорем вложения. а) Часто будет использоваться сеточное неравенство [4]:

$$u^2|_{m=0,\, j=0} \ll \ln h^{-1} \{[[u_x))^2+[[u_y))^2+[[u))^2\}. \tag{3.11'}$$

б) Отметим дискретные аналоги неравенств ([5], стр. 243)

$$\iint u^2 r dr d\varphi / r^{4-\alpha} \ll \iint (\nabla u)^2 r dr d\varphi / r^{2-\alpha} \ll \|u\|_2^2 \tag{3.12}$$

для финитных функций, равных нулю на некотором луче $\varphi=\mathrm{const}$, где φ и r—полярные координаты.

Пусть сеточная функция равна нулю при $x_0=0$. Тогда

$$h^2 \sum_{m=0} \sum_{j=m} \frac{u^2(x_m, y_j)}{(r+h)^{4-\alpha}} \ll h^2 \left\{ \sum_{m=1} \sum_{j=m} u_{\bar{x}}^2/(r+h)^{2-\alpha} + \sum_{m=0} \sum_{j=m} u_y^2/(r+h)^{2-\alpha} \ll \right.$$

$$\ll h^2 \left\{ \sum_{m=1} \sum_{j=m} u_{\bar{x}y}^2 + \sum_{m=1} \sum_{j=m+1} u_{x\bar{x}}^2 + \sum_{m=0} \sum_{j=m+1} u_{y\bar{y}}^2 + \sum_{m=0} \sum_{j=m} u^2 \right\}. \tag{3.13}$$

Верхние пределы в суммах здесь по индексу m до M, по j—до J. Первое неравенство из (3.13) доказывается с помощью линейного в треугольниках и непрерывного восполнения u (см. [6]) и применения к нему первого из неравенств (3.12). При этом интегралы в (3.12) $\iint \frac{u_x^2+u_y^2}{r^{2-\alpha}} d\theta r dr$ вычислятся, и это даст первый знак неравенства в (3.13). К полученному члену снова нужно применить изложенный прием и использовать правую часть неравенства (3.12). При этом получим правую часть (3.13).

V. Неравенства для норм по малым областям. Будут использоваться неравенства:

$$\text{а)} \int_0^h u^2(x)\, dx \ll h^{1-\alpha} \|u\|_{1/2}^2, \tag{3.14}$$

являющееся следствием неравенства (1), см. [7], стр. 41;

$$\text{б)} \int \left(\int_0^h r dr u^2 \right) d\varphi \ll h^2 \ln h^{-1} \|u\|_1^2 \ll h^{2-\alpha} \|u\|_1^2, \tag{3.15}$$

которое получается из неравенства

$$u^2(r, \varphi) \ll \ln \frac{1}{r} \int_r^1 \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho d\rho + \int_0^1 u^2 d\rho.$$

§ 4. Снятие граничных условий с прямой линии

Сначала научимся строить функцию, снимающую граничные условия с прямой линии. Построенная функция будет использована в дальнейшем для конструирования функции Ф.

Пусть дана функция $\vartheta(x, y)$, периодическая по x с периодом 2π и равная нулю при $|y| \geqslant \pi$. Пусть

$$\vartheta(x, 0) = \frac{\partial \vartheta(x, 0)}{\partial y} = 0. \tag{4.1}$$

Построим функцию $\chi(x_m, y_j)$ такую, что

$$\chi(x_m, 0) = \vartheta^{pp}(x_m, 0), \frac{\chi(x_m, h) - \chi(x_m, -h)}{2h} = \frac{\vartheta^{pp}(x_m, h) - \vartheta^{pp}(x_m, -h)}{2h} \tag{4.2}$$

и чтобы ее норма была мала. Для этой цели подчиним χ условию, чтобы она была ограничена при $j=1, 2, \cdots, \infty$ при всех x_m, и чтобы $\Delta_h^2 \chi = 0$. Ищем решение последнего уравнения в виде $\chi = \sum_k p^{(k)}(y_j)\, e^{ikx_m}$ и для $p^{(k)}(y_j) \equiv p^{(k)}$ получаем уравнение

$$p^{(k)}_{\bar y y \bar y y} - 2S_k^2 p^{(k)}_{\bar y y} + S_k^4 p^{(k)} = 0.$$

Возьмем решение $p_j^{(k)} = (C_k + E_k y_j)\, q_k^j$ при $j = -1, 0, \cdots, \infty$, $q_k = 1 + \frac{\mu_k^2}{2} - \sqrt{\left(1 + \frac{\mu_k^2}{2}\right)^2 - 1}$, а $\mu_k = 2 \sin \frac{kh}{2}$. Константы C_k и E_k определяются из граничных условий

$$\sum_k C_k e^{ikx_m} = \vartheta^{pp}(x_m, 0); \sum_k \{C_k(q_k - q_k^{-1}) + E_k h (q_k + q_k^{-1})\} \frac{e^{ikx_m}}{h} =$$

$$= \vartheta^{pp}_{\overset{\circ}{y}}(x_m, 0). \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *При $A = 2\pi$, $B = \pi$ имеет место оценка* $[[\chi_{x\bar x}]] \ll \ll h^2 \|\vartheta\|_4$.

Доказательство. Из равенства Бесселя следует

$$[[\chi_{x\bar x}]]^2 \ll \sum_k S_k^4 \left(h \sum_{j=0}^{\infty} |p_j^{(k)}|^2 \right) \ll \sum_k k^4 \left\{ |C_k|^2 \left(h \sum_{j=0}^{\infty} (q_k^j)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + |E_k|^2 \left(h \sum_{j=0}^{\infty} (jh)^2 q_k^{2j} \right) \right) \right\} \ll \sum_k |C_k|^2 (|k|^3 + 1) + |E_k|^2 (|k| + 1).$$

При получении последнего знака неравенства использовались оценки: $h \sum_{j=0}^{\infty} q_k^{2j} \ll \frac{h}{1 - q_k^2} \sim \frac{1}{|k| + 1}$ (последнее следует из определения q_k) и

$$h^3 \sum_{j=0}^{\infty} j^2 q_k^{2j} \sim h^3 q_k^2 \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)\, q_k^{2(j-1)} \ll \frac{h^3}{(1 - q_k)^3} \ll \frac{1}{|k|^3 + 1}.$$

Оценим теперь $\sum_k |C_k|^2 (|k|^3 + 1)$, помня, что C_k — коэффициенты Фурье $\vartheta^{pp}(x, 0)$. Пусть $\vartheta^{xx} = \sum_k b_k(y)\, e^{ikx}$. Так как $b_k(0) = \frac{\partial b_k(0)}{\partial y} = 0$ по (4.1), то

$$C_k = h^{-2} \int\limits_{-h}^{h} d\zeta \int\limits_{-h}^{h} d\eta \int\limits_{0}^{\zeta+\eta} dp \int\limits_{0}^{p} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}\, dt.$$

Отсюда следует, что

$$|C_k|^2 \ll h^4 \max_{|y|<2h} \left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 \ll h^4 \int\limits_{y^*}^{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 dy \ll h^4 \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 dy \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

где y^*—значение, при котором реализуется упомянутый максимум.

Следовательно

$$\sum_k |C_k|^2 (|k|^2+1) \ll \left(\sum_k (|k|^2+1) \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_k (k^4+1) \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 \right) \ll h^4 \|\theta\|_4^2$$

$\left(\text{сравни с (3.9) и (3.10) при } a_k = \dfrac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right)$. Теперь оценим $\sum\limits_k | E_k|^2 (|k|+1)$. Из (4.3) следует, что $|E_k|^2 \ll |C_k|^2 k^2 + |(b_k^{yy}(h) - b_k^{yy}(-h))/2h|^2$ (здесь использована эквивалентность $q_k - q_k^{-1} \sim \mu_k$). Из представления

$$G_k = \frac{b_k^{yy}(h) - b_k^{yy}(-h)}{2h} = \frac{h^{-3}}{2} \int\limits_{-h}^{h} d\zeta \int\limits_{-h}^{h} d\eta \int\limits_{-h}^{h} dp \int\limits_{0}^{p+\zeta+\eta} dt \int\limits_{0}^{t} \frac{\partial^3 b_k(\nu)}{\partial \nu^3}\, d\nu \tag{4.4}$$

следует, что

$$|G_k|^2 \ll h^4 \max_{|y|<2h} \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 \ll h^4 \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial^4 b_k}{\partial y^4}\right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$\sum_k |E_k|^2 (|k|+1) \ll \sum_k |C_k|^2 (|k|^2+1) +$$

$$+ h^4 \sum_k \left((k^2+1) \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 + \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^4 b_k}{\partial y^4}\right|^2 \right) \ll h^4 \|\theta\|^2.$$

Лемма доказана. Оценки $[\![\chi_{y\bar{y}}]\!]$ и $[\![\chi_{xy}))$ сводятся к оценкам тех же $\sum\limits_k |C_k|^2 (|k|^2+1)$ и $\sum\limits_k |E_k|^2 (|k|+1)$, поэтому имеет место неравенство

$$[\![\chi_{x\bar{x}}]\!] + [\![\chi_{y\bar{y}}]\!] + [\![\chi_{xy})) \ll h^2 \|\theta\|_4 \tag{4.5}$$

Отметим еще оценку, получающуюся аналогичным образом:

$$[\![\chi, \chi]\!] \ll \sum_k \frac{|C_k|^2}{|k|+1} + \frac{|E_k|^2}{|k|^2+1} \ll \sum_k |C_k|^2 + |G_k|^2 \ll h^{4-\alpha} \|\theta\|_{7/2}^2. \tag{4.6}$$

Последнее неравенство получается использованием неравенства

$$\sum_k |G_k|^2 \ll h^2 \sum_k \int_{-2h}^{2h} dy \left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 \ll h^4 \sum_m \int_{-2h}^{2h} dy \left|\frac{\partial^2 \vartheta^{xx}(x_m, y)}{\partial y^2}\right|^2 \ll h^{4-\alpha} \|\vartheta\|^2_{\varPhi_2},$$

где последний знак неравенства получен с помощью (3.14), а предпоследний—с помощью равенства Парсеваля.

На первый взгляд неравенство (4.6) получено за счет большого огрубления. Однако мы не знаем, как использовать наличие $|k|$ в знаменателе.

§ 5. Снятие граничных условий со сторон прямоугольника

Построим функцию Φ, снимающую граничные условия со сторон прямого угла $x>0$, $y>0$. Пусть дана функция ϑ^{pp}, равная нулю вне круга $x^2+y^2 \geqslant \varepsilon^2$. Возьмем χ, построенную в предыдущем параграфе (ϑ^{pp} удовлетворяет требованиям периодичности, так как она может быть периодически продолжена по x).

Возьмем еще χ', которая снимает граничные условия у ϑ^{pp} на линии $x=0$. Рассмотрим функцию $\Phi=(1-\zeta)\chi+\zeta\chi'$, где $\zeta(y/x)$ в первом квадранте такая, что $\zeta(y/x)=0$ при $y/x \leqslant 1$ и при $x=y=0$, $\zeta(y/x)=1$ при $y/x>2$, и ζ—гладкая функция своего аргумента, Во втором квадранте $\zeta=1$, а в четвертом — $\zeta=0$.

Лемма. 5.1. *Имеет место оценка* $[[\Phi_{x\bar{x}}]] \ll h^{2-\alpha}\|\vartheta\|_4$.

Доказательство. Будем исходить из равенства

$$\Phi_{x\bar{x}} = \zeta\chi'_{x\bar{x}}+(1-\zeta)\chi_{x\bar{x}}+\zeta_x(\chi'-\chi)_x+\zeta_{\bar{x}}(\chi'-\chi)_{\bar{x}}+(\chi'-\chi)\zeta_{x\bar{x}}$$

и из легко проверяемых оценок

$$|\zeta_{\bar{x}}| \ll \frac{1}{r+h},\ |\zeta_{x\bar{x}}| \ll \frac{1}{(r+h)^2},\ \text{где } r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Тогда

$$\sum_{m=0}\sum_{l=m}(\chi'-\chi)^2|\zeta_{x\bar{x}}|^2 \ll \frac{1}{h^\alpha}\sum_{m=0}\sum_{l=m}(\chi'-\chi)^2/(r+h)^{4-\alpha} \ll$$

$$\ll \frac{1}{h^\alpha}\{[[(\chi'-\chi)_{x\bar{x}}]]^2+[[(\chi'-\chi)_{xy})^2+[[(\chi'-\chi)_{y\bar{y}}]]^2+[[\chi'-\chi]]^2\} \ll h^{4-\alpha}\|\vartheta\|^2_4.$$

Аналогично оцениваются остальные члены. Лемма доказана. Так же как в лемме 5.1 устанавливаются оценки $[[\Phi_{y\bar{y}}]]$ и $[[\Phi_{xy}))$.

Теперь, используя разложение единицы, можно представить $\psi^{pp'}$ как сумму функций типа ϑ^{pp}, не равных нулю лишь в окрестности каждого угла или на частях сторон прямоугольника, не включающих углы. Для каждой такой функции мы доказали возможность снятия граничных условий. В результате мы построим функцию Φ, удовлетворяющую неравенствам

$$[[\Phi_{x\bar{x}}]]^2+[[\Phi_{y\bar{y}}]]^2+[[\Phi_{xy}]]^2+[[\Phi]]^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi^t\|_4^2;\ [[\Phi]]^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi^t\|_{7/2}^2 \tag{5.1}$$

и неравенству, являющемуся следствием определения функции и второго неравенства (5.1)

$$[[\Phi_{t_1}]]^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|^2_{7/2,\,t}. \tag{5.2}$$

Однако построенная таким образом функция Φ не удовлетворяет граничному условию (2.4) б) при $m=0$, $j=1$ и в соответственно расположенных точках прямоугольника. Действительно, используя значения ζ получим

$$\frac{[\Phi(h,h)-\Phi(-h,h)]-[\psi^{ppt}(h,h)-\psi^{ppt}(-h,h)]}{2h}=\frac{\chi(h,h)-\chi'(h,h)}{2h}.$$

Интересно оценить, с какой же точностью выполняется граничное условие в этих 4-х точках, впредь именуемых особыми? Оценим $w_{\hat{x}}\big|_{m=0,\,j=1}$

$$w_{\hat{x}}=\frac{\chi(h,h)-\chi'(h,h)}{2h}=\frac{1}{2}\chi_y(h,0)-\frac{1}{2}\chi'_x(0,h)+$$

$$+\frac{\psi^{ppt}(h,0)-\psi^{ppt}(0,h)}{2h}.$$

Для $\frac{1}{2h}\psi^{ppt}(h,0)$, при использовании очевидного равенства $\psi^{yyt}(0,0)=0$, имеем

$$\frac{1}{2h}\psi^{ppt}(h,0)=\frac{1}{2h}(\psi^{ppt}(h,0)-\psi^{yyt}(h,0))+\frac{1}{2}\psi^{yyt}_x(0,0)=$$

$$=\frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_{-h}^{h}d\eta\int_{0}^{\zeta+\eta}dt\int_{0}^{t}d\nu\left(\frac{\partial^2\psi^{xxt}(h,\nu)}{\partial\nu^2}-\frac{\partial^2\psi^t(h,\nu)}{\partial\nu^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_{-h}^{h}d\eta\int_{0}^{\zeta+\eta}dt\int_{0}^{t}\frac{\partial^2\psi^t_x(0,\nu)}{\partial\nu^2}\,d\nu.$$

Из этого равенства следует, что

$$\left[\frac{\psi^{ppt}(h,0)}{2h}\right]^2 \ll h\int_{-h}^{h}\left|\frac{\partial^2\psi^{xxt}}{\partial\nu^2}(h,\nu)-\frac{\partial^2\psi^t}{\partial\nu^2}(h,\nu)\right|^2d\nu+h^3\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2\psi^t_x}{\partial\nu^2}(0,\nu)\right)^2d\nu \ll$$

$$\ll h^3\int_{-h}^{h}dy\int_{-h}^{h}d\zeta\left|\frac{\partial^3\psi^t(h+\zeta,y)}{\partial y^2\,\partial\zeta}\right|^2+h^3\int_{0}^{h}dx\int_{-h}^{h}dy\left(\frac{\partial^3\psi^t}{\partial y^2\partial x}\right)^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|_4^2$$

(здесь использовано неравенство (3.15)).

Аналогично оценивается $\frac{1}{2h}\psi^{ppt}(0,h)$. Используя еще (3.11′), получим оценку $\chi_y(h,0)$:

$$|\chi_y(h, 0)| \ll \ln h^{-1} \{[(\chi_{xy})]^2 + [(\chi_{y\bar{y}})]^2 + [(\chi_y)]^2\} \ll h^{4-\alpha} \|\psi\|_4^2,$$

и такую же оценку для $\chi_x(0, h)$. Следовательно, имеет место оценка

$$|w_{\hat{x}}|^2 \ll h^{4-\alpha} \|\psi\|_4^2. \tag{5.3}$$

§ 6. Оценка квадратичной формы $((L_h w, \hat{w}))$

Будем доказывать сходимость схемы при обычном предположении, что $\tau = \varepsilon h^2$. Умножим (2.5) на $\hat{w}$ и просуммируем по всей области $\square_h$. Оценим левую часть снизу, а правую сверху. Займемся оценкой $((L_h w, \hat{w}))$ снизу. Исходим из равенства $((L_h w, \hat{w})) = ((-\Delta_h w_t, \hat{w})) + ((\Delta_h^2 w, \hat{w}))$. Вначале оценим $((\Delta_h w_t, \hat{w}))$.

I) Оценка $((\Delta_h w_t, \hat{w}))$. Просуммировав по частям, получим

$$((\Delta_h w_t, \hat{w})) = -\frac{((\Delta_h \hat{w}, \hat{w})) - ((\Delta_h w, \hat{w}))}{\tau} \geqslant \{([\hat{w}_x))^2 + [(\hat{w}_y))^2 -$$

$$-([w_x))^2 - [(w_y))^2\}/2\tau.$$

Здесь использованы соотношения типа

$$((w_{x\bar{x}}, \hat{w})) = ([w_x, \hat{w}_x)) \leqslant \{([\hat{w}_x))^2 + ([w_x))^2\}/2.$$

II) Оценка $((\Delta_h^2 w, \hat{w}))$. Будем исходить из равенства $\hat{w} = w + \tau\Delta_h^{-1}\Delta_h^2 w - \tau\Delta_h^{-1} F$. Тогда

$$((\Delta_h^2 w, \hat{w})) = ((\Delta_h^2 w, w)) + \tau((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1}\Delta_h^2 w)) - \tau((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1} F)).$$

Таким образом нужно оценить три члена, учитывая что $\tau = \varepsilon h^2$.

а) оценим $((\Delta_h^2 w, w))$, состоящий из двух слагаемых $((\Delta_h w_{x\bar{x}}, w))$ и $((\Delta_h w_{y\bar{y}}, w))$. Займемся более трудным—первым. Для любой функции Q (принимая во внимание условие $w|_{\Gamma_h} = 0$ и формулу суммирования по частям) имеем

$$((Q_{x\bar{x}}, w)) = -([Q_x, w_x)) = ((Q, w_{x\bar{x}}]) - (w_x, Q)^y|_{m=M} + (w_x, Q)^y|_{m=0}. \tag{6.1}$$

Учитывая, что везде при $m=0$ и M, кроме особых точек $w_x|_{m=0, M} = w_{\bar{x}}|_{m=0, M}$, т. е. $w_x|_{m=0, M} = \frac{h}{2} w_{x\bar{x}}|_{m=0, M}$, получим

$$((Q_{x\bar{x}}, w)) = (\langle Q, w_{x\bar{x}} \rangle) + R + \left(hw_x - \frac{h^2}{2} w_{x\bar{x}}\right) Q|_{l=1, m=0}, \tag{6.2}$$

где R—сумма таких же слагаемых, как последнее, но для прочих особых точек. На основании (5.3) получаем оценку при $Q = \Delta_h w$:

$$\left|\left(hw_x - \frac{h^2}{2} w_{x\bar{x}}\right) Q\right|_{m=0, l=1} \equiv |w_{\hat{x}} \cdot h \cdot \Delta_h w|_{m=0, j=1} \ll$$

$$\ll \varepsilon h^2 |\Delta_h w|^2_{m-0,\, j-1} + |w_{\hat{x}}|^2 \ll \varepsilon ([\Delta_h w))^2 + h^{4-\alpha} \|\psi\|^2_4 \tag{6.2'}$$

и аналогичную оценку для R.

Таким же приемом, однако учитывая, что здесь особых точек нет, получится

$$((Q_{y\bar{y}}, w)) = \langle (Q, w_{y\bar{y}}) \rangle. \tag{6.3}$$

Теперь примем во внимание, что $w_{y\bar{y}}$ — нуль при $m=0$ и $m=M$ для $w \in \gamma$. Это позволяет прибавить к правой части (6.3) выражение $h(Q, w_{y\bar{y}})^y|_{m=0} + h(Q, w_{y\bar{y}})^y|_{m=M}$, а к правой части (6.2)—выражение $h(Q, w_{x\bar{x}})^x|_{j=0} + h(Q, w_{x\bar{x}})^x|_{j=J}$. Складывая после этого (6.2) и (6.3), получим с учетом (6.2')

$$((\Delta_h Q, w)) \gg \frac{1}{4}([Q])^2 + \frac{1}{4}[(Q)]^2 - Ch^{4-\alpha} \|\psi\|^2_4, \text{ где } Q = \Delta_h w;$$

б) оценим

$$\tau((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1} \Delta_h^2 w)) = \tau((\Delta_h Q, \Delta_h^{-1} Q_{x\bar{x}})) + \tau((\Delta_h Q, \Delta_h^{-1} Q_{y\bar{y}})), \tag{6.4}$$

используя (3.8) и условие $\tau = \varepsilon h^2$:

$$\tau((\Delta_h Q, (\Delta_h^{-1} Q_x)_{\bar{x}})) \ll \varepsilon \{[(Q)]^2 + ([Q])^2 + h^2([Q_x))^2\} \ll$$

$$\ll \varepsilon \{[(Q)]^2 + ([Q])^2\}, \text{ где } Q = \Delta_h w.$$

Точно также оценивается второе слагаемое правой части (6.4);

в) оценим, наконец, $((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1} F))$. Проведем эту оценку лишь для слагаемых F_1 и F_3, так как для F_2 и F_4 она проводится также. Используя (3.8), получим как в предыдущем пункте:

$$\tau((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1} F_1))| \ll \varepsilon \{[(Q)]^2 + ([Q])^2\} + \varepsilon([\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{yy} - \Phi_t])^2 \ll$$

$$\ll \varepsilon \{[(Q)]^2 + ([Q])^2\} + h^{4-\alpha}\left(\|\psi_t\|^2_{2/_{3},\, t} + \left\|\frac{\partial \psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,\, t} + \|\psi\|^2\right).$$

Здесь использованы неравенства

$$([\Phi_t])^2 \ll h^{4-\alpha} \|\psi_t\|^2_{2/_{3},\, t} \text{ и } ([\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{yy}])^2 \ll ([\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{\rho\rho}])^2 +$$

$$+ ([\psi_t^{\rho\rho} - \psi_t^{yy}])^2 \ll \tau^2 \left\|\frac{\partial \psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,\, t} + h^4 \|\psi_t\|^2_{2,\, t} \ll h^4 \left(\left\|\frac{\partial \psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,\, t} + \|\psi\|^2\right),$$

см. (5.2). Таким же образом

$$\tau((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1} F_3)) \ll \varepsilon \{[(Q)]^2 + ([Q])^2\} + \varepsilon([\Delta \psi^{yyt} - \Delta_h \psi^{\rho\rho t} + \Delta_h \Phi])^2,$$

где последнее слагаемое оценится через

$$C\{([\Delta(\psi^{yyt} - \psi^{yyt})])^2 + ([\Delta\psi^{yyt} - \Delta\psi^{\rho\rho t}])^2 + ([\Delta\psi^{\rho\rho t} - \Delta_h \psi^{\rho\rho t}])^2 +$$

$$+ ([\Delta_h \Phi])^2\} \ll \tau^2 \left\|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\|^2_2 + h^4 \|\psi\|^2_4 + h^{4-\alpha} \|\psi\|^2_4 \ll h^{4-\alpha} \|\psi\|^2 \tag{6.5}$$

(второе слагаемое в правой части получено на основании (3.4), примененного к функции $\Delta\psi^{yt}$, третье слагаемое—на основании (3.5) и последнее—на основании (5.1)).

Таким образом, получена оценка

$$((L_h w, \hat{w})) \geqslant \frac{([\hat{w}_x))^2 + [(\hat{w}_y))^2}{2} + \frac{1-\varepsilon}{4}([w_{x\bar{x}}])^2 +$$

$$+ \frac{1-\varepsilon}{4}[(w_{y\bar{y}})]^2 - C h^{4-\alpha}\left(\|\psi\|^2 + \left\|\frac{\partial\psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,t} + \|\psi_t^t\|^2_{F_{/s},t}\right).$$

§ 7. Оценка формы $((F, \hat{w}))$

Вспомним, что мы получаем оценки скорости сходимости, исходя из равенства

$$((L_h w, \hat{w})) \equiv ((-\Delta_h w_t + \Delta_h^2 w, \hat{w})) = ((F, \hat{w})).$$

Левую часть его мы оценили. Теперь оценим правую. Используем представление

$$((F, \hat{w})) = ((F, w)) + \tau((F, \Delta_h^{-1}\Delta_h^2 w)) - \tau((F, \Delta_h^{-1}F))$$

и оценим отдельные его слагаемые.

а) Оценим $((F, w))$, помня, что $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$$((F_1, w)) = ((\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{yy} - \Phi_t, w_{x\bar{x}})),$$

так как при суммировании по частям или w, или $\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{yy} - \Phi_t$ равны нулю на границе. Отсюда

$$((F_1, w)) \ll \varepsilon((w_{x\bar{x}}))^2 + h^{4-\alpha}\left(\|\psi\|^2 + \|\psi_t^t\|^2_{F_{/s},t} + \left\|\frac{\partial\psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,t}\right)$$

(см. пункт в) в § 6).

Далее, на основании (6.2) получим оценку

$$|((F_3, w))| \ll (<\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h\psi^{\rho\rho t} + \Delta_h\Phi>)^2 + \overline{R} + \varepsilon(<w_{x\bar{x}}>)^2 +$$

$$+ (|w_{\hat{x}}|^2 + h^2|\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h\psi^{\rho\rho t} + \Delta_h\Phi|^2_{m=0,\, l=1}),$$

где $\overline{R}$—сумма таких же слагаемых, как последнее, но относящихся к остальным особым точкам. Используя теперь очевидное неравенство

$$h^2|\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h\psi^{\rho\rho t} + \Delta_h\Phi|^2 \ll ([\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h\psi^{\rho\rho t} + \Delta_h\Phi]),$$

получаем на основании (6.5) и (5.2)

$$|((F_3, w))| \ll \varepsilon(<w_{x\bar{x}}>)^2 + h^{4-\alpha}\|\psi\|^2.$$

Остальные слагаемые $((F, w))$ оцениваются также.

б) Оценим характерный член $\tau((F, \Delta_h^{-1}\Delta_h^2 w))$, используя (3.8)

$$|\tau((F_3, \Delta_h^{-1}\ \Delta_h^2 w))| = |\tau((F_3, \Delta_h^{-1}(\Delta_h w_x)_{\bar{x}})) + \tau((F_3, \Delta_h^{-1}(\Delta_h w_y)_{\bar{y}}))| \ll$$

$$\ll \varepsilon([\Delta \overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h \psi^{ppt} + \Delta_h \Phi])^2 + \varepsilon[(\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h \psi^{ppt} + \Delta_h \Phi)]^2 +$$
$$+ \varepsilon\{([\Delta_h w])^2 + [(\Delta_h w)]^2\}$$

(последнее слагаемое возникло при оценке $\tau([\Delta_h w_x))^2 + \tau[(\Delta_h w_y))^2$. Отсюда $|((F_3, \Delta_h^{-1}\ \Delta_h^2 w))| \ll \varepsilon[(\Delta_h w)]^2 + \varepsilon([\Delta_h w])^2 + h^{4-\alpha}\|\psi\|^2$.

в) Покажем, как оценивать $((F, \Delta_h^{-1} F))$ для одного из наборов F_k, $k = 1, 2, 3, 4$. Используя (3.8), получим

$$\tau((F_3, \Delta_h^{-1} F_3)) \ll \varepsilon([\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h \psi^{ppt} + \Delta_h \Phi])^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|^2.$$

Собирая оценки § 6 и § 7, получаем неравенство

$$\frac{1}{2\tau}\left\{([\hat{w}_x))^2 + [(\hat{w}_y))^2 - ([w_x))^2 - [(w_y))^2\right\} + \frac{1-\varepsilon}{4}\{([\Delta_h w])^2 + [(\Delta_h w)]^2\} \ll$$

$$\ll \varepsilon\{([w_{x\bar{x}}])^2 + [(w_{y\bar{y}})]^2\} + C\|\psi\|^2 h^{4-\alpha} + C\|\psi_t\|^2_{\,^{7}/_{2},\,t} + \left\|\frac{\partial\psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,\,t}. \tag{7.1}$$

Складывая такие неравенства по n, получим

$$\max_h \{([w_x))^2 + [(w_y))^2\} \leqslant C h^{4-\alpha} T\|\psi\|^2 + C h^{4-\alpha}\cdot\tau\sum_{n=1}^{N}\left(\|\psi_t\|^2_{\,^{7}/_{2},\,t} + \left\|\frac{\partial\psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,\,t}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C h^{4-\alpha} T\|\psi\|^2 + C h^{4-\alpha}\left(\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{\,^{7}/_{2}} + \left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\|_2\right)^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|^2,$$

и точно так же

$$\tau\sum_{n=1}^{N}([\Delta_h w])^2 + [(\Delta_h w)]^2 \sim \tau\sum_{n=1}^{N}([w_{x\bar{x}}])^2 + [(w_{y\bar{y}})]^2 + [[w_{xy}))^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|^2$$

(здесь знак эквивалентности получен на основании (3.6)).

Итак, доказана требуемая сходимость.

§ 8. Влияние отброшенных членов

Пусть теперь $a \neq 0$, а $b = 0$ в (1.1′) (случай, когда и $a \neq 0$, и $b \neq 0$ рассматривается точно так же). Основная трудность оценок в том, что мы должны считать $a = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ обладающим лишь теми свойствами, которые следуют из ограниченности $\|\psi\|$, т. е. мы можем считать, что

$$\|a\|_3 + \left\|\frac{\partial a}{\partial t}\right\|_{\,^{5}/_{2}} + \left\|\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\right\|_1 \leqslant E. \tag{8.1}$$

Вторая трудность оценок состоит в том, что если раньше мы пользовались перестановочностью операторов осреднения и дифференцирования, то при наличии переменных коэффициентов это невозможно. Установим предварительно несколько фактов об осреднении произведения некоторых функций $p(x, y)$ и $u(x, y)$, которые будем считать распространенными на всю плоскость. Обозначим через $|p|_k$ — норму в пространстве $C^{(k)}$ функции с непрерывной k-ой производной. Тогда очевидно, что

а) $[[pu]]^2 \ll |p|_0^2 [[u]]^2$; б) $[pu, pu]^x \ll |p|_0^2 [u, u]^x$;

в) $[[u_x]] \ll \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_0$ и г) $[[u^y]]^2 \ll h \sum\limits_{m=0}^{M} \int dy\, u^2 (x_m, y)$;

$$\text{д)} \qquad [[u^{xy}]]^2 \ll h \sum_{m=0}^{M} \int dy\, [u^x (x_m^2, y)]^2 \ll \| u \|_0^2 \cdot \tag{8.2}$$

Используя неравенство (8.2), а также неравенство (3.4), получим

$$[[(pu)^{xy} - pu^{xy}]]^2 \ll [[(pu)^x - pu]]^2 + [[\{(pu) - (pu^x)\}^y]]^2 +$$

$$+ [[(pu^x)^y - pu^x]]^2 + [[p(u - u^y)^x]]^2 \ll h \int dy \sum_m \{(pu)^x - pu\}^2 |_{x = x_m} +$$

$$+ h \int dy \sum_m p^2 (u - u^x)^2 |_{x = x_m} + h^4 h \sum_m \int dy \left(\frac{\partial^2 pu^x}{\partial y^2} \right)^2 \Big|_{x = x_m} + |p|_0^2 \cdot h \times$$

$$\times \sum_l \int dx\, (u - u^y)^2 |_{y = y_l} \ll$$

$$\ll h^4 \left\| \frac{\partial^2 pu}{\partial x^2} \right\|_0^2 + h^4 |p|_0^2 \cdot \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_0^2 + h^4 \cdot |p|_2^2 \, \|u\|_2^2 + h^4 \cdot |p|_0^2 \cdot \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_0^2 \ll h^4 |p|_2^2 \, \|u\|_2^2 \tag{8.3}$$

(здесь каждое слагаемое в правой части является оценкой слагаемого с тем же порядковым номером в левой части).

Теперь приступим к оценкам. Какие изменения вносит наличие члена $\frac{\partial}{\partial x} (a \Delta \psi)$ в уравнении?

а) В операторе $L_h w$ появится слагаемое $(a \Delta_h w)_{\hat{x}}$, а в F — слагаемое $F_5 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{\tau}{a} \Delta \overset{\tau}{\psi} \right)^{ppt} - (a \Delta_h \psi^{ppt})_{\hat{x}} + (a \Delta_h \Phi^{ppt})_{\hat{x}}$. Тем самым в выражении $((L_h w, \hat{w}))$ появится слагаемое $(((a \Delta_h w)_{\hat{x}}, \hat{w})) =$ $= -\frac{1}{2} ([a \Delta_h w, \hat{w}_x)) - \frac{1}{2} ((a \Delta_h w, \hat{w}_{\bar{x}}])$, которое оценится через $\varepsilon ([\Delta_h w])^2 +$ $+ C E^2 ([\hat{w}_x))^2$, где E определено в (8.1). Это не изменит рассуждений и заключения о сходимости схемы.

б) В $(L_h w, \hat{w})$ появится член $((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1} F_5))$, который доставляет максимум хлопот. При этом та часть этого члена, которая связана с последним слагаемым F_5 оценивается по (3.8) и ничего нового не вносит.

Оставшаяся часть имеет вид $\tau ((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1} P))$, где в качестве P нужно подставлять

$$F_6=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\overset{\tau}{a}\Delta\overset{\tau}{\psi}\right)^{\rho\rho t}-(a\Delta_h\psi^{\tau\rho t})_{\hat{x}}\right\}=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\overset{\tau}{a}\Delta\overset{\tau}{\psi}\right)^{\rho\rho t}-\left(\frac{\partial}{\partial x}a\Delta\psi\right)^{\rho x}\right\}+$$

$$+\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}a\Delta\psi\right)^{\rho x}-(a\Delta_h\psi^{\rho})_{\hat{x}}\right\}+\{(a(\Delta_h\psi^{\rho}-\Delta_h\psi^{\rho\rho t}))_{\hat{x}}\}. \qquad (8.4)$$

Трудности при оценке (8.4) связаны с предпоследним слагаемым F_6. Действительно, при оценке (8.4), где в качестве P взято последнее слагаемое F_6, непосредственно применима формула (3.8), а малость получается за счет $\Delta_h\psi^{\rho}-\Delta_h\psi^{\rho\rho t}$. Соответствующая оценка не меняет структуры (7.1).

Здесь и далее $u|_{x_m-\mathrm{h}}$ означает $u|_{x=x_m-\mathrm{h}}$. Если учесть, что $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^x=(u|_{x_m-\mathrm{h}})_x$, то первое слагаемое в F_6 представится в виде $([(\overset{\tau}{a}\Delta\overset{\tau}{\psi})^{y\rho t}-(a\Delta\psi)^{\rho}]_{x=x_m-\mathrm{h}})_x$. Опять применив (3.8), оценим (8.4), когда вместо P подставлено последнее выражение. Это добавит в (7.1) члены

$$\varepsilon[(\Delta_h w)]^2+\varepsilon([\Delta_h w])^2 \text{ и } \tau([\{(\overset{\tau}{a}\Delta\overset{\tau}{\psi})^{y\rho t}-(a\Delta\psi)^{\rho}\}_{x=x_m-\mathrm{h}}])\ll$$

$$\ll\tau\|(\overset{\tau}{a}\Delta\overset{\tau}{\psi})^{yt}-a\Delta\psi\|_0^2\ll\tau\|(\overset{\tau}{a}\Delta\overset{\tau}{\psi})^{yt}-(a\Delta\psi)^{yt}+(a\Delta\psi)^{yt}-(a\Delta\psi)^{y}+(a\Delta\psi)^{y}-$$

$$-a\Delta\psi\|_0^2\ll\tau^3\left\|\frac{\partial a\Delta\psi}{\partial t}\right\|_0^2+|a|_1^2\,\tau\left(\tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_2^2+h^2\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right\|_2^2\right)\ll h^4E^2\|\psi\|^2,$$

здесь при получении первого знака неравенства было использовано (8.1). Основные трудности связаны со вторым слагаемым F_6, которое мы обозначим F_7 и представим в виде

$$F_7=\left(\frac{\partial}{\partial x}(a\Delta\psi)\right)^{x\rho}-(a\Delta_h\psi^{\rho})_{\hat{x}}=\frac{1}{2}(2(a\Delta\psi)^{\rho}|_{x_m-\mathrm{h}}-(a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m-2\mathrm{h}}-$$

$$-(a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m})_x.$$

Оценим (8.4), когда вместо P подставлено F_7. Применим опять (3.8), получим

$$\tau((\Delta_h^2 w,\ \Delta_h^{-1}F_7))\ll\varepsilon([\Delta_h w])^2+\varepsilon[(\Delta_h w)]^2+$$

$$+\tau([2(a\Delta\psi)^{\rho}|_{x_m-\mathrm{h}}-(a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m-2\mathrm{h}}-(a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m}])^2.$$

Займемся последним слагаемым. Оно оценится сверху через

$$C\tau([2(a\Delta\psi)^{\rho}|_{x_m-\mathrm{h}}-2(a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m-\mathrm{h}}])+C\tau([2(a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m-\mathrm{h}}-$$

$$-(a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m-2\mathrm{h}}-(a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m}])^2. \qquad (8.5)$$

Второе слагаемое (8.5) содержит второе разностное отношение от $a\Delta_h\psi^{\rho}$, но взятое с шагом h. Поэтому второе слагаемое оценится через $C\tau h^4\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a\Delta\psi^{\rho})\right\|_0^2$. Первое слагаемое оценится на основании (8.3) через $C\tau h^4 E^2 \|\psi\|_2^2$. Таким образом, и в этом случае сохраняется структура (7.1).

в) При оценке $((F, \hat{w}))$ у нас появится член $((F_5, \hat{w}))$. В пункте б) было показано, что F_5 представлено как разностное отношение по x некоторой функции. Это позволяет суммированием по частям перебросить это разностное отношение на $\hat{w}$ и получить оценку

$$((F_5, \hat{w})) \ll ([\hat{w}_x))^2 + E^2 h^{4-\alpha} \|\psi\|^2.$$

Таким образом, заключение о сходимости, основанное на (7.1), остается в силе и при $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Приложение

В статье предполагается, что $[[\psi]]$ ограничена. Каковы основания для этого?

1) В [8] установлено существование обобщенного решения (1.1) в классе $\|\psi\|_2 + \left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_1 < C$ и указана методика получения оценок последующих производных ψ по t. Покажем ограниченность $\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\|_2$. Будем обозначать D_l^k различные по l линейные дифференциальные операторы порядка k по пространственным переменным. В [8] показано, что обобщенное решение (1.1) можно найти методом Галеркина как предел при $h \to \infty$ функций $\overset{n}{\psi}$, удовлетворяющих интегральному тождеству (сравни [8], стр. 157, (6.4))

$$\iint_{\square} \left\{ \nabla \frac{\partial \overset{n}{\psi}}{\partial t} \nabla Q + \Delta\overset{n}{\psi} \Delta \overset{n}{Q} + \sum_{l,s,r} D_l \overset{n}{\psi} D_s \overset{n}{\psi} D_r^{\bar{3}} Q^n \right\} dxdy = \iint_{\square} f \overset{n}{Q} dxdy, \quad (9.1)$$

где $\overset{n}{\psi} = \sum_{k=1}^{n} \overset{n}{\psi}_k(t) \varphi^k(x, y)$, $\overset{n}{\psi}_k(t)$—искомые функции, φ^k — собственные функции задачи $\Delta^2 \varphi^k = \lambda_k \Delta\varphi^k$ в $\square$, $\varphi \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$, нормированные так: $-\iint_{\square} \Delta\varphi^k \varphi^k dxdy = 1$; $\overset{n}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \overset{n}{Q}_k(t) \varphi^k$, где $Q_k(t)$—произвольные непрерывные функции. Тождество (9.1) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых существует и дифференцируемо по t столько раз, сколько дифференцируемы $f_k(t) = \iint_{\square} f\varphi^k dxdy$ (см. [8], стр. 199). Соответствующие интегральные тождества получим, если будем дифференцировать (9.1) по t, считая

Q_k (t) не зависящими от t. Возьмем две такие производные. Получим при $\overset{n}{Q}=\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}$

$$\iint\limits_{\square}\left\{\nabla\frac{\partial^3\overset{n}{\psi}}{\partial t^3}\nabla\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}+\left(\Delta\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right)^2+\sum_{l,s,r}D_l\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}D_s\overset{n}{\psi}D_r^2\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l,s,r}D_l\frac{\partial\overset{n}{\psi}}{\partial t}D_s\frac{\partial\overset{n}{\psi}}{\partial t}D_r^2\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\}dxdy=\iint\limits_{\square}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}dxdy. \qquad (9.2)$$

Интегралы по t от членов, содержащих операторы D, оценятся как в [8] с использованием неравенства $\|u^2\|_0\leqslant C\|u\|_0\|u\|_1$

$$\left|\int_0^\eta dt\iint\limits_{\square}D_l\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\cdot D_s\overset{n}{\psi}\cdot D_r^2\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}dxdy\right|\ll\left\|\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\|_{2,\eta}\left\|D_l\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\|_{0,\eta}^{1/2}\|(D_s\overset{n}{\psi})^2\|_{0,\eta}^{1/2}\ll$$

$$\ll\left\|\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\|_{2,\eta}\left\|\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\|_{2,\eta}^{1/4}\left\|\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\|_{1,\eta}^{1/4},$$ так как $\|\psi\|_2$ и $\|\psi\|_1$ оценены в [1]. Аналогично

$$\left|\int_0^\eta dt\iint\limits_{\square}D_l\frac{\partial\overset{n}{\psi}}{\partial t}D_s\frac{\partial\overset{n}{\psi}}{\partial t}D_r^2\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}dxdy\right|\ll\left\|\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\|_{2,\eta}\left\|\frac{\partial\overset{n}{\psi}}{\partial t}\right\|_{2,\eta}\left\|\frac{\partial\overset{n}{\psi}}{\partial t}\right\|_{1,\eta}\ll\left\|\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\|_{2,\eta}.$$

Обозначим $\lambda(\eta)=\left\|\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\|_{2,\eta}^2$, $\mu(\eta)=\left\|\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right\|_{1,\eta}^2$. Проинтегрировав (9.2) по t от 0 до η, получим неравенство

$$\mu(\eta)-\mu(0)+\lambda(\eta)\leqslant C_1\lambda^{5/8}\left(\int_0^\eta\mu dt\right)^{1/8}+C_2\lambda^{1/2}+C_3,$$

из которого следовала бы ограниченность $\lambda(\eta)$ и $\mu(\eta)$, если бы мы умели оценить $\mu(0)$. Для оценки $\mu(0)$ положим в (9.1), продифференцированное упомянутым способом по t один раз, $\overset{n}{Q}=\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}$ и $t=0$. Получим, что при $t=0$

$$\iint\limits_{\square}\nabla\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\nabla\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}dxdy+\iint\limits_{\square}\Delta\frac{\partial\overset{n}{\psi}}{\partial t}\Delta\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}dxdy=\iint\limits_{\square}\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}dxdy \qquad (9.3)$$

(здесь ряд членов исчез в силу начального условия).

Из (9.3) получится неравенство при $t=0$:

$$\sum_{k=0}^{n}(\overset{n}{\psi}{}_k^{\cdot\cdot})^2+\lambda^k\overset{n}{\psi}{}_k^{\cdot}\overset{n}{\psi}{}_k^{\cdot\cdot}\ll\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\square}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2dxdy+\varepsilon\iint\limits_{\square}\left(\frac{\partial^2\overset{n}{\psi}}{\partial t^2}\right)^2dxdy$$

и далее неравенство

$$\mu(0) = \sum_{k=1}^{n} (\dot{\psi}_k^{n})^2 \Big|_{t=0} \ll \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (\dot{\psi}_k^{n})^2 \Big|_{t=0} + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 .$$

Положим теперь в (9.1) $\overset{n}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \dot{\psi}_k^{n} \varphi^k$ и $t=0$. Получим при $t=0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (\dot{\psi}_k^{n})^2 = \iint_{\Box} f \overset{n}{Q}\, dxdy. \tag{9.4}$$

Предположим, что $f|_{t=0} = \Delta\chi$, где $\chi \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \chi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$. Это требование является естественным, если желать, чтобы уравнение Навье-Стокса выполнялось при $t=0$, так как при этом $f|_{t=0} = \Delta\psi_t$, т. е. f имеет предписанный характер. Таким образом, наше требование является условием типа условия согласования. Предположим еще, что $f \in W_2^2$. Тогда χ как решение уравнения $\Delta^2\chi = \Delta f \in L_2$ при $\chi \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \chi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$ будет из W_2^4. Система $\varphi^k(x, y)$ есть ортогональный базис в $\overset{0}{W}{}_2^2$. Поэтому $\chi = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \varphi^k$ и ряд этот можно дважды дифференцировать, т. е. $\Delta\chi = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Delta\varphi^k$. Тогда

$$\iint_{\Box} f \overset{n}{Q}\, dxdy = \sum_{k=1}^{n} \chi_k \dot{\psi}_k \lambda_k^2 \ll \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \dot{\psi}_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \chi_k^2 . \tag{9.5}$$

Последний ряд сходится, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^2 \lambda_k^2 = \iint_{\Box} \Delta\chi \Delta^2\chi \, dxdy \ll \|f\|_{2,0}^2 .$$

Использование последнего неравенства в (9.5) позволяет оценить левую часть (9.4) через известные величины, а тем самым оценить $\mu(0)$.

Очевидно, что установленные оценки верны не только для $\overset{n}{\psi}$, $\overset{n}{Q}$, но и для их пределов ψ, Q. Таким образом, нами доказано утверждение:

Если $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right\|_0$ и $\|f\|_{2,0}$ ограничены и $f = \Delta\chi$, где $\chi \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \chi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$, то ограничено $\left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\|_2$.

2) Изложим схему доказательства того, что $\|\psi\|_4 \leqslant C$. Положим в (9.1) ψ и Q вместо $\overset{n}{\psi}$ и $\overset{n}{Q}$, так как (9.1) верно и для предельных по

n значений $\overset{n}{\psi}$ и $\overset{n}{Q}$. Перенесем теперь $\iint\limits_{\square} \frac{\partial \Delta\psi}{dt} \nabla Q\, dxdy$ в правую часть равенства. Трудность здесь в оценке $\|\psi\|_4$ в окрестности угла. Положим $Q = \mathrm{I}q$, где $\mathrm{I}(x, y)$—срезающая функция, не равная нулю лишь в ε-окрестности начала координат, в которой находится вершина угла. Тогда можно сделать эту I множителем при ψ так, что из (9.1) получим относительно $p = \mathrm{I}\psi$ уравнение

$$\iint\limits_{\square} \Delta p \Delta q\, dxdy + \iint\limits_{\square} D\psi D^2 p D q\, dxdy = \iint\limits_{\square} \overline{F} D q\, dxdy. \tag{9.4}$$

Здесь в $\overline{F}$ объединены все члены, которые получились при перенесении I множителем на ψ за счет соответствующих дифференцирований и про которые известно, что их норма $\|\ \|_0$ ограничена. Здесь важным является то обстоятельство, что носитель $D\psi$ в (9.4) можно считать малым, поскольку вне supp (I) функция p равна нулю.

Будем исходить из следующей леммы, доказываемой методами [5]. Решение P тождества при всех $q \in \overset{0}{W}{}_2^2$:

$$\iint\limits_{\Omega} \Delta P \Delta q\, dxdy = \iint\limits_{\Omega} R D q\, dxdy, \quad P\Big|_{\Gamma(\Omega)} = \frac{\partial P}{\partial n}\Big|_{\Gamma(\Omega)} = 0$$

удовлетворяет неравенству $\|P\|_3 \leqslant C\|R\|_0$, если Ω содержит лишь один угол, меньший π, а в остальном имеет гладкую границу.

Далее показывается, что множитель при Dq во втором интеграле (9.4) оценивается так: $\|D\psi D^2 p\|_1' \leqslant \varepsilon \|p\|_3$. При этом используется, что $D\psi \in L_\alpha$ при любых α, а малость (множитель ε) есть следствие малости $\operatorname{supp}(D\psi)$. Из упомянутой леммы получаем, что $\|p\|_3 < C\|\overline{F}\|_0$, где C не зависит от t. Отсюда следует, что $\|\psi\|_3 \leqslant C\|F\|_0$. Теперь произведем интегрирование по частям в последних двух интегралах (9.4) и запишем (9.4) в виде:

$$\iint \Delta p \Delta q\, dxdy = \iint \widetilde{F} q\, dxdy,$$

где в силу принадлежности $\psi \in W_2^3$ и $\psi_t \in W_2^2$ ограничена $\|\widetilde{F}\|_0$. Последнее уравнение—бигармоническое относительно p и его решение в прямом угле имеет оценку $\|p\|_4 \leqslant \|\widetilde{F}\|_0$. Следовательно, $\psi \in W_2^4$ (утверждение [5], стр. 288, что решение бигармонической задачи не принадлежит W_2^4 есть следствие описки в формуле (5.35)).

3) Доказательство принадлежности $\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{7/4} \leqslant C$ проще. Возьмем разностное отношение от тождества (9.1) по t, считая, что будто бы Q не зависит от t (легко показать, что это можно делать и формально). Для ψ_t и произвольных гладких $Q \in \overset{0}{W}{}_2^2$ получим тождество

$$\iint\limits_{\square} \Delta\psi_t \Delta Q\,dxdy = \iint\limits_{\square} D^2\psi_t (D\psi + \overset{2\tau}{D\psi})\,DQ\,dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{\square} D\psi_t (D^2\psi + \overset{2\tau}{D^2\psi})\,DQ\,dxdy + \iint\limits_{\square} f_t\,Q\,dxdy - \iint\limits_{\square} \frac{\partial \nabla\psi_t}{\partial t} \nabla Q\,dxdy.$$

Все множители при Q, DQ и ∇Q имеют ограниченную норму $\|\ \|_0$. Согласно лемме $\|\psi_t\|_3$ будет ограничено. Перебросим все производные в правой части последнего равенства с Q. Получим, что ψ_t удовлетворяет бигармоническому уравнению и, следовательно, $\|\psi_t\|_{4,\,t} < C + \left\|\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta\psi_t\right\|_{0,\,t}$ (здесь учтена ограниченность $\|\psi_t\|_3$). Отсюда следует, что

$$\max_{\tau} \|\psi_t\|_4 \ll \left\|\frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial t^2}\right\|_0 + C \leqslant C.$$

Добавление. § 9. Нелинейный случай

Вместо уравнения Навье-Стокса рассмотрим уравнение с урезанной нелинейностью*

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \Delta^2\psi + \frac{\partial}{\partial x}(a\mathrm{I}(\Delta\psi)) - \frac{\partial}{\partial y}(b\mathrm{I}(\Delta\psi)) = f. \qquad (9.1)$$

Здесь $\mathrm{I}(t) = t$ при $|t| < C_1$, 1 при $|t| > C_2$ и гладкая.

Выберем в качестве C_1 число, оценивающее сверху $\max\limits_t |\Delta\psi|$ из (1.1). Такое C_1 существует вследствие ограниченности $\|\psi\|_4$ от решения (1.1). Тогда решения (9.1) и (1.1) совпадут.

Разностную схему будем строить для (9.1). Эта схема будет отличаться от уже рассмотренной лишь из-за двух последних членов левой части (9.1). Аппроксимируем член $\dfrac{\partial}{\partial x}(a\mathrm{I}(\Delta\psi))$ из (9.1) через $(v_{\hat{y}}\ \mathrm{I}(\Delta_h v))_{\hat{x}}$. Аналогично поступим с $\dfrac{\partial}{\partial y}(b\mathrm{I}(\Delta\psi))$. В левой части (2.5) добавится член $L_3 w = (w_y \mathrm{I} + \overset{\tau}{\psi}{}^{ppt}_{\hat{y}}\,\mathrm{I}'\Delta_h w)_{\hat{x}}$, а в правой $-(\Phi_{\hat{y}}\cdot\mathrm{I} + \overset{\tau}{\psi}{}^{ppt}_{\hat{y}}\,\Delta_h\Phi)_{\hat{x}} \equiv F_8$ и $F_9 = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\overset{\tau}{\psi}}{\partial y}\mathrm{I}(\overset{\tau}{\Delta\psi})\right)^{ppt} - (\psi_{\hat{y}}\ \mathrm{I}(\Delta_h\psi))_{\hat{x}}$ и такие же члены с заменой x на y. Отметим, что значок I здесь в F_9 можно отбрасывать. Какие новые оценки потребуют эти добавки?

а) При умножении (2.5) на $\hat{w}$ получим $((L_3 w, \hat{w}))$, оцениваемый как в § 6.

б) Член $((\Delta^2 w, \Delta^{-1}F_8))$ оценивается также элементарно.

---

* Этот прием предложен В. Я. Ривкиндом и Н. Н. Уральцевой и сообщен мне В. Я. Ривкиндом.

в) Член $((\Delta^2 w, \Delta^{-1} F_9))$ оценивается как в (8.4). Новым моментом там является лишь легко проводимая оценка члена $((\Delta_h^2 w, \Delta^{-1}(F_{10})_{\hat{x}}))$, где $F_{10} = ((a - \bar{\psi}^{pp'}_{\hat{y}})\, \Delta_h\, \psi^{pp'})_{\hat{x}}$.

г) Очевидным образом оценивается член

$$((F_8, \hat{w})) \ll ([w_x])^2 + h^{4-\epsilon} \|\psi'\|_4^2 .$$

Наконец член $((F_9, \hat{w}))$ оценивается как в пункте в) в § 8.

Таким образом установлена сходимость схемы и в нелинейном случае.

ЛО ЦЭМИ АН СССР

Поступило 18.XII.1970

Լ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Նավե-Ստոքսի հավասարումների համար գրված Թոմի վերջավոր տարբերությունների սխեմայի զուգամիտությունը ուղղանկյուն տիրույթում (*ամփոփում*)

Հոդվածում դիտարկվում է Թոմի կողմից առաջարկված սխեման, որը ծառայում է Նավե-Ստոքսի հավասարումների մոտավոր լուծման համար։ Ապացուցված է, որ այդ սխեմայի սխալը էներգետիկ նորմայում ուղղանկյուն տիրույթի համար գնահատվում է $O(h^{2-\alpha})$*-ով, որտեղ* α *-կամայական փոքր թիվ է, իսկ* h *-ը սխեմայի քայլը։*

L. A. OGANESIAN. *Convergence Tom's finite-difference scheme for Navie-Stocks equations in the rectangel* (summary)

In this paper the finite-difference scheme of Tom for Navie-Stocks equations in the rectangular domain is considered. It is proved that the error of this scheme in the energetic norm is $O(h^{2-\alpha})$ (here a may be arbitrarily small and h is the step of the scheme).

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Том, К. Д. Эйплт.* Числовые расчеты полей в технике и физике, „Энергия", 1964.
2. *Л. А. Чудов, Т. В. Кускова.* О применении разностных схем к расчету нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, Сборник „Численные методы в газовой динамике", вып. 2, МГУ, 1963.
3. *А. А. Самарский.* Лекции по теории разностных схем, М., 1969.
4. *J. H. Bramble.* A. second order finite difference analog of the first biharmonic boundary value problem, Num. Math., 9, 1966.
5. *В. А. Кондратьев.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками, Труды ММО, т. 16, 1967.
6. *Ю. А. Гусман, Л. А. Оганесян.* Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных уравнений, Журн. Выч. Мат. и мат.-физ., 5, № 2, 1965, 351—357.
7. *В. И. Буренков.* Об аддитивности классов W_p^2, Труды МИАН, 89, 1967, 31—55.
8. *О. А. Ладыженская.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, „Физматгиз", М., 1970.