

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. Э. МКРТЧЯН

О ЯДРЕ СПЕКТРА ОБЩЕГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА, И О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ЛЕБЕГОВОСТИ ИЛИ СИНГУЛЯРНОСТИ ЕГО СПЕКТРА.

п. 1. В работе [1] было дано усовершенствованное определение ядра спектра самосопряженного оператора A в сепарабельном гильбертовом пространстве H в том случае, когда спектр оператора A простой, а также были установлены некоторые свойства ядра спектра. Там же было указано, что одно из существенных преимуществ нового определения ядра спектра (обозначенного через $S_0(A)$) заключается в том, что оно не опирается на знание порождающего элемента, отыскание которого при исследовании конкретных операторов часто оказывается нелегкой задачей.

В этой заметке прежде всего будет указано некоторое видоизменение определения ядра спектра, которое оказывается пригодным уже для произвольных самосопряженных операторов, и будут установлены свойства такого ядра, аналогичные приведенным в [1].

Исходным пунктом наших рассуждений служит участвующая в определении ядра спектра функция $\Phi_0(\lambda)$, описываемая в терминах резольвенты рассматриваемого оператора. Кроме того, оказывается, что в терминах этой функции, а иногда и в терминах лишь самого ядра, можно судить о характере спектра оператора A . В подтверждение этого в работе доказывается несколько предложений, которые представляют собой достаточные признаки полноты системы собственных элементов, отсутствия в данном интервале сингулярного спектра, а также лебеговости или чистой сингулярности спектра.

п. 2. Пусть R_H , как и в [1], является совокупностью неограниченных операторов G с плотной в H областью определения D_G , обратные к которым существуют и являются операторами Гильберта-Шмидта и поэтому допускают (см., например, [2]) представление

$$G^{-1}f = \sum_{(k)} \mu_k a_k \omega_k, \text{ где } a_k \text{ — коэффициенты Фурье элемента } f \text{ по неко-}$$

торой полной ортонормальной системе и $\sum_{(k)} \mu_k^2 < +\infty$.

В рассматриваемом общем случае, когда спектр может иметь произвольную кратность, вместо фигурирующей в определении ядра функции $\Phi_0(\lambda)$ работы [1] введем в рассмотрение другую функцию (мы продолжаем ее обозначать через $\Phi_0(\lambda)$), которая, в отличие от случая простого спектра, определяется как нижний предел того же выражения, а именно

$$\Phi_0(\lambda) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda+i\tau} G^{-1}\|^2.$$

Определение. Ядром спектра общего самосопряженного оператора A называется подмножество $S_0(A)$ точек λ вещественной оси, в которых $\Phi_0(\lambda) > 0$, т. е.

$$S_0(A) = \{\lambda \in R^1; \Phi_0(\lambda) > 0\}.$$

Предложение 1. Ядро спектра $S_0(A)$ является частью классического спектра $S(A)$, но обладает полной спектральной мерой, т. е. $\rho(S_0(A)) = \rho(R^1)$.

◀ Пусть пространство H представлено в виде ортогональной суммы инвариантных относительно A подпространств H_k ($k=1, 2, 3, \dots$), в каждом из которых спектр оператора A простой, и пусть g_k — соответствующие нормированные порождающие элементы.

Обозначим $\rho_k(t) = (E_1 g_k, g_k)$, тогда $\rho(t) = \sum_{(k)} \varepsilon_k \rho_k(t)$, где $\varepsilon_k > 0$,

причем $\sum_{(k)} \varepsilon_k = 1$. Нам надлежит доказать, что $S_0(A) \subset S(A)$ и что

$$\rho_k(S_0(A)) = \rho_k(R^1) \text{ для всех } k=1, 2, 3, \dots$$

Пусть P_k — оператор ортогонального проектирования на подпространство H_k , тогда поскольку он, очевидно, коммутирует с резольвентой, то ясно, что

$$\|R_{\lambda+i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|R_{\lambda+i\tau} P_m G^{-1}\|^2,$$

причем $P_m G^{-1}f = \sum_{(k)} \mu_k a_k \omega_k^{(m)}$, где положено $a_k = (f, \omega_k)$, $\omega_k^{(m)} = P_m \omega_k$.

Пусть далее $V^{(m)} \omega_k^{(m)} = \chi_k^{(m)}(t) \in L_{\rho_m}^2$, где оператор $V^{(m)}$ отображает изометрически подпространство H_m в $L_{\rho_m}^2$, переводя сужение $A|_{H_m} = A_m$ в оператор умножения на независимую переменную в $L_{\rho_m}^2$. Теперь уже легко видеть, что

$$\|R_{\lambda+i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum_{(k)} \mu_k a_k \chi_k^{(m)}(t) \right|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho_m(t), \quad (1)$$

причем совокупность функций $\chi_k^{(m)}(t)$ ($k=1, 2, \dots$) будучи, вообще говоря, не ортонормальной системой в $L_{\rho_m}^2$, все же, как нетрудно понять, образует в нем полную систему.

Из (1) непосредственно следует, что

$$\Phi_0(\lambda) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \sup_{\{a_k\}} \sum_{(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum_{(k)} \mu_k a_k \chi_k^{(m)}(t) \right|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho_m(t), \quad (2)$$

где верхняя грань распространена на всевозможные a_k такие, что

$$\sum_{(k)} |a_k|^2 = 1. \text{ Отсюда ясно, что}$$

$$\begin{aligned}\Phi_G(\lambda) &\leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \sum_{(m)} \sup_{(a_k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{(k)} \mu_k a_k |\chi_k^{(m)}(t)|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho_m(t) \leq \\ &\leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \sum_{(m)} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{(k)} \mu_k^2 |\chi_k^{(m)}(t)|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho_m(t).\end{aligned}$$

Положив $\bar{\rho}_m(t) = \int_{-\infty}^t \sum_{(k)} \mu_k^2 |\chi_k^{(m)}(x)|^2 d\rho_m(x)$, в силу теоремы Радона-Никодима, будем иметь

$$\Phi_G(\lambda) \leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \sum_{(m)} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь числовой ряд $\sum_{(m)} \bar{\rho}_m(+\infty)$ с неотрицательными членами, который сходится, поскольку, как нетрудно убедиться справедлива нижеследующая цепь соотношений:

$$\begin{aligned}\sum_{(m)} \bar{\rho}_m(+\infty) &= \sum_{(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{(k)} \mu_k^2 |\chi_k^{(m)}|^2 d\rho_m(t) = \\ &= \sum_{(m)} \sum_{(k)} \mu_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_k^{(m)}(t)|^2 d\rho_m(t) = \sum_{(k)} \mu_k^2 \sum_{(m)} \|\omega_k^{(m)}\|^2 = \sum_{(k)} \mu_k^2 < +\infty.\end{aligned}$$

Но этот числовой ряд очевидно является мажорантным для ряда $\sum_{(m)} \bar{\rho}_m(t)$, который, тем самым, сходится равномерно на всей вещественной оси, а его сумма $\bar{\rho}(t)$ представляет собой неотрицательную меру. Воспользовавшись, наконец, теоремой Хелли, получим соотношение

$$\sum_{(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\rho}(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2},$$

с помощью которого неравенство (3) принимает вид

$$\Phi_G(\lambda) \leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\rho}(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}. \quad (4)$$

Воспользуемся теперь следующей простой леммой, доказательство которой, чтобы не прерывать изложения, будет приведено ниже.

Лемма 1. Если $\lambda_0 \in S(A)$, то $\exists \delta_0 > 0$ такое, что $\rho_m(\lambda_0 + \delta_0) - \rho_m(\lambda_0 - \delta_0) = 0$ при всех $m = 1, 2, 3, \dots$.

Из этой леммы непосредственно заключаем, что если $\lambda_0 \in S(A)$, то разность $\tilde{\rho}_m(\lambda_0 + \delta_0) - \tilde{\rho}_m(\lambda_0 - \delta_0)$ тоже равна нулю при всех $m = 1, 2, 3, \dots$ и, стало быть, в силу неравенства (4) $\Phi_0(\lambda_0) = 0$, т. е. $\lambda_0 \in S_0(A)$, а это и означает, что $S_0(A) \subset S(A)$.

Переходя к доказательству того, что $S_0(A)$ обладает полной спектральной мерой, заметим, что из того же соотношения (2) следует, что при каждом m

$$\Phi_0(\lambda) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{\pi} \sup_{\{a_k\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum_{(k)} \mu_k a_k \gamma_k^{(m)}(t) \right|^2}{(t - \lambda)^2 + \varepsilon^2} d\rho_m(t).$$

На основании предложений 1 и 2 из [1] этот нижний предел равен просто пределу и больше нуля на множестве $S_0^{(m)}(A)$, обладающем полной ρ_m -мерой. Вместе с тем легко понять, что каждое из $S_0^{(m)}(A)$ содержится в $S_0(A)$, откуда заключаем, что $\bigcup_{(m)} S_0^{(m)}(A) \subset S_0(A)$.

Таким образом

$$\rho(S_0(A)) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m(S_0(A)) > \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m(S_0^{(m)}(A)) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m(R^1) = \rho(R^1). \blacktriangleright$$

Предложение 2. Как спектральная, так и лебеговская мера ядра спектра $S_0(A)$ инвариантны относительно выбора оператора $G \in R_H$.

◀ Нам следует доказать только инвариантность лебеговской меры ядра спектра $S_0(A)$, так как инвариантность спектральной меры легко следует из того, что для каждого $G \in R_H$ $\rho(S_0(A)) = \rho(R^1)$, на основании доказанного выше предложения 1.

Прежде всего заметим, что анализируя доказательство предложения 3 работы [1] нетрудно усмотреть, что оно пригодно и в том случае, когда $\{\chi_k(t)\}$ — любая полная в L_p^2 система, которая необязательно ортонормальна. Существенно лишь, чтобы фигурирующая в подынтегральном выражении функция $F^2(t)$ не обращалась в нуль на множестве положительной ρ -меры.

Стало быть, при замене оператора G каким-либо другим оператором из того же класса R_H каждое из $S_0^{(m)}(A)$ может измениться лишь на множество меры нуль как по спектральной мере, так и по мере Лебега.

Таким образом, поскольку $\bigcup_{(m)} S_0^{(m)}(A) \subset S_0(A)$, то нам остается доказать, что лебеговская мера множества $M = S_0(A) \setminus \bigcup_{(m)} S_0^{(m)}(A)$ равна нулю. Обозначим через E (соответственно через E_m) множество точек вещественной оси, в которых одно из производных чисел функции

$\bar{\rho}(t)$ (соответственно $\bar{\rho}_m(t)$) больше нуля. Из неравенства (4) легко следует, что $S_0(A) \subset E$. Кроме того, привлекая лемму 2 из [3], непосредственно заключаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} > 0 \quad (5)$$

для тех и только тех λ , которые принадлежат E_m . Ясно, что аналогичное утверждение будет иметь место, если заменить $\bar{\rho}_m(t)$, E_m на $\bar{\rho}(t)$, E .

Положим $F = E \setminus \bigcup_{(m)} E_m$ и докажем, что $\text{mes } F = 0$. Для этого предположим, вопреки нашему утверждению, что $\text{mes } F > 0$ и представим множество F в виде $F = \bigcup_{(n)} F_n$, где F_n — подмножество точек из F ,

в которых одно из производных чисел функции $\bar{\rho}(t)$ больше $1/n$, тогда, очевидно, для некоторого $n = n_0$, $\text{mes } F_{n_0} = d_0 > 0$. На основании известной леммы (см. [4], стр. 228), уточненной в [1], легко заключаем, что множество F_{n_0} , а следовательно, и множество F , имеет положительную $\bar{\rho}$ -меру, что невозможно, поскольку как E , так и $\bigcup_{(m)} E_m$, очевидно, имеют полную $\bar{\rho}$ -меру. Итак, $\text{mes } F = 0$.

Ниже будет доказано, что лебеговская мера симметрической разности множеств E_m и $S_0^{(m)}$ равна нулю, поэтому мера симметрической разности множеств $\bigcup_{(m)} E_m$ и $\bigcup_{(m)} S_0^{(m)}$ также равна нулю, откуда в силу $\text{mes } F = 0$ нетрудно заключить, что $\text{mes } (E \setminus \bigcup_{(m)} S_0^{(m)}) = 0$. После этого, принимая во внимание доказанные выше включения: $\bigcup_{(m)} S_0^{(m)} \subset S_0(A) \subset E$, убеждаемся в том, что $\text{mes } (S_0(A) \setminus \bigcup_{(m)} S_0^{(m)}) = 0$, откуда инвариантность лебеговской меры $S_0(A)$ следует из установленной ранее инвариантности $\text{mes } S_0^{(m)}(A)$ для каждого $m = 1, 2, 3, \dots$ относительно выбора оператора $G \in R_H$.

Таким образом, для завершения доказательства предложения 2 нам осталось показать, что лебеговская мера симметричной разности множеств E_m и $S_0^{(m)}$ равна нулю.

Для этого обозначим через E_m^* множество точек λ , в которых предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} \quad (5^*)$$

больше нуля, и заметим, что в силу леммы 1 из [3] этот предел существует для почти всех λ по мере Лебега. Кроме того, в силу предложения 1 из [1] множество точек λ , в которых предел

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau}{\pi} \sup_{\{a_k\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum_{(k)} a_k \chi_k^{(m)} \right|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho_m(t)$$

не существует, также имеет лебеговскую меру нуль.

Теперь уже, в силу очевидного неравенства

$$\sup_{\{a_k\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum_{(k)} a_k \chi_k^{(m)} \right|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho_m(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2},$$

легко заключаем, что если пренебречь множеством нулевой лебеговской меры, то $S_0^{(m)} \subset E_m^*$. Положим $F_m^* = E_m^* \setminus S_0^{(m)}$ и докажем, что $\text{mes } F_m^* = 0$. Пусть вопреки утверждению, $\text{mes } F_m^* > 0$. В силу леммы 2 из [3] нетрудно заключить, что в точках множества F_m^* одно из производных чисел функции $\bar{\rho}_m(t)$ больше нуля, поэтому на основании упомянутой выше уточненной в [1]—леммы из [4] заключаем, что $\bar{\rho}_m(F_m^*) > 0$. С другой стороны, поскольку мера $\bar{\rho}_m$ эквивалентна мере ρ_m , получим $\rho_m(F_m^*) > 0$, что невозможно, так как $S_0^{(m)}$ имеет полную ρ_m -меру.

Полученное противоречие доказывает, что $\text{mes } F_m^* = 0$. Нам остается проверить, что симметрическая разность множеств E_m^* и E_m имеет нулевую лебеговскую меру.

В самом деле, пусть $\lambda_0 \in E_m^*$, тогда в силу леммы 2 из [3] одно из производных чисел $\bar{\rho}_m(t)$ должно быть больше нуля и, стало быть, $\lambda_0 \in E_m$, т. е. $E_m^* \subset E_m$. Пусть теперь $\lambda_0 \in E_m$, тогда в силу этой же леммы предел (S^*) либо не существует, либо больше нуля и, стало быть, $\lambda_0 \in E_m^*$. Следовательно, если пренебречь множеством нулевой лебеговской меры, то справедливо и обратное включение $E_m \subset E_m^*$.

Таким образом, доказано, что симметрическая разность множеств E_m и E_m^* , а, стало быть, и симметрическая разность E_m и $S_0^{(m)}$ действительно имеет нулевую лебеговскую меру. ►

Доказательство леммы 1.

◄Ясно, что из $\lambda_0 \in S(A)$ легко следует, что λ_0 содержится в некотором интервале, в котором $\rho_m(t)$ постоянна. Пусть $(\lambda_0 - \delta_m^*, \lambda_0 + \delta_m^*)$ —такой интервал постоянства $\rho_m(t)$, концы которого являются точками роста $\rho_m(t)$. Положим $\delta' = \inf_{(m)} \delta_m^*$, $\delta'' = \inf_{(m)} \delta_m^*$, $2\delta_0 = \min\{\delta', \delta''\}$ и докажем, что $\delta_0 > 0$. В самом деле, пусть $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ содержится в интервале постоянства функции $\rho(t)$ и пусть, вопреки утверждению, $\delta'' = 0$, тогда ясно, что $\exists m_0$ такое, что $2\delta_{m_0}^* < \delta$, поэтому в силу нижеследующих неравенств

$$\varepsilon_{m_0}[\rho_{m_0}(\lambda_0 + 2\delta_{m_0}^*) - \rho_{m_0}(\lambda_0)] \leq \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m(\lambda_0 + 2\delta_{m_0}^*) - \rho_m(\lambda_0) \leq \rho(\lambda_0 + 2\delta_{m_0}^*) - \rho(\lambda_0) = 0$$

приходим к противоречию с тем, что точка $\lambda_0 + \delta_{m_0}^*$ является точкой роста функции $\rho_{m_0}(t)$. Случай $\delta' = 0$ разбирается вполне аналогично. ►

Пусть теперь g — нормированный порождающий элемент оператора A , тогда, очевидно, $g_m = P_m g$ будут порождающими элементами для операторов A_m в H_m . Пусть далее $S^*(A)$ — совокупность точек из R^1 таких, что

$$\Phi^*(\lambda) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \|R_{\lambda + i\tau} g\|^2 > 0.$$

Предложение 3. Ядро спектра $S_0(A)$ отличается от множества $S^*(A)$ на множество меры нуль как по спектральной, так и по лебеговской мерам.

Прежде всего, из соотношения

$$\|R_{\lambda + i\tau} g\|^2 = \sum_{(m)} \|R_{\lambda + i\tau} g_m\|^2$$

непосредственно заключаем, что $S^*(A) \supset \bigcup_{(m)} S^*(A_m)$. Далее, опираясь на лемму 5 работы [3], нетрудно убедиться (аналогично тому, как это сделано при доказательстве предложения 2 из [1]), что $\rho_m(S^*(A_m)) = \rho_m(R^1)$, поэтому $\rho_m(S^*(A)) = \rho_m(R^1)$, откуда, по определению меры ρ , будем иметь

$$\rho(S^*(A)) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m(S^*(A)) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m(R^1) = \rho(R^1).$$

Но поскольку $S_0(A)$ тоже имеет полную ρ -меру, то оно отличается от $S^*(A)$ на множество нулевой ρ -меры. Докажем теперь, что если пренебречь множеством нулевой лебеговской меры, то $S^*(A)$ совпадает с $S_0(A)$.

Так как спектры операторов A_m простые, то из анализа доказательства предложения 1, 3 работы [1] легко следует, что $S_{0m}(A_m) = S_0^m(A)$ и $S^*(A_m)$ отличаются на множество нулевой лебеговской меры.

Предположим, что $G \in R_H$ таково, что $g \in D_G$ и $\|Gg\| = 1$, тогда, очевидно, будем иметь $\Phi^*(\lambda) \leq \Phi_G(\lambda)$, откуда будет следовать, что $S^*(A) \subset S_0(A)$. С другой стороны, выше, при доказательстве предложения 2, было установлено, что с точностью до множества лебеговской меры нуль $S_0(A) = \bigcup_{(m)} S_0^m(A) = \bigcup_{(m)} S^*(A_m) \subset S^*(A)$, т. е., пренебрегая множеством нулевой лебеговской меры, имеет место и обратное включение.

Ясно, что в тех случаях, когда порождающий элемент рассматриваемого оператора известен, вместо ядра спектра $S_0(A)$ можно (в силу предложения 3) строить множество $S^*(A)$, что во многих случаях оказывается существенно проще.

Предложение 4. Для отсутствия непрерывной части спектра оператора A достаточно, чтобы ядро спектра $S_0(A)$ состояло из не более чем счетного множества точек.

► Предположим, сначала, что спектр оператора A простой, тогда в силу предложения 1 работы [1]

$$\Phi_0(\lambda) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0^2(t) d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2},$$

откуда по условию получим

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0^2(t) d\rho_a(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0^2(t) d\rho_s(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = 0 \quad (7)$$

при всех $\lambda \in R^1$, кроме счетного множества точек (здесь, как всегда, $\rho_a(t)$ и $\rho_s(t)$ — абсолютно непрерывная и сингулярная части спектральной меры $\rho(t)$). Но из (6) следует, что $F_0^2(\lambda) \rho_a(\lambda) = 0$ почти всюду по Лебегу, а поскольку $F_0^2(\lambda) \neq 0$ на множестве полной лебеговской меры, то $\rho_a(\lambda) = 0$ почти всюду по Лебегу, откуда заключаем (в силу абсолютной непрерывности $\rho_a(t)$), что $\rho_a(t) \equiv 0$.

Пусть теперь, вопреки утверждению, $\rho_s(t) \not\equiv 0$, тогда в силу леммы 3 из [1] имели бы, что предел (7) равен $+\infty$ на множестве E , полной ρ_s -меры, которое, разумеется не может быть счетным, а это противоречит (7). Итак, $\rho_s(t) \equiv 0$.

Пусть теперь спектр оператора A имеет произвольную кратность, и пусть $\rho_m(t) = \rho_{md}(t) + \rho_{ma}(t) + \rho_{ms}(t)$ представляет собой каноническое разложение спектральной меры, соответствующее части оператора A в подпространстве H_m .

Из нижеследующего неравенства

$$\Phi_0(\lambda) \geq \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F_0^{(m)}(t)|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d(\rho_{ma} + \rho_{ms}),$$

где $|F_0^{(m)}(t)|^2 = \sum_{(k)} \mu_k^2 |\chi_k^{(m)}(t)|^2$ и отлично от нуля на множестве полной ρ_m -меры, в силу условия доказываемого предложения, совершенно также, как и выше, в случае простого спектра, убеждаемся, что $\rho_{ma}(t) \equiv 0$ и $\rho_{ms}(t) \equiv 0$, откуда получаем $\rho_m(t) = \rho_{md}(t)$.

Итак, остается доказать, что $\rho(t)$ тоже не содержит непрерывной составляющей. Для этой цели обозначим через E_m — множество точек разрыва функции $\rho_m(t)$, тогда, поскольку $\rho_m(E_m) = \rho_{md}(E_m) = \rho_{md}(R^1) = \rho_m(R^1) (m = 1, 2, 3, \dots)$, то будем иметь

$$\rho \left(\bigcup_{(n)} E_n \right) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m \left(\bigcup_{(n)} E_n \right) \geq \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m (E_m) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m (R^1) = \rho (R^1),$$

т. е. полная ρ -мера сосредоточена на счетном множестве $\bigcup_{(n)} E_n$, что и означает отсутствие непрерывной составляющей спектральной меры. ►

Предложение 5. Для отсутствия лебеговской части спектра необходимо и достаточно, чтобы лебеговская мера ядра спектра $S_0(A)$ равнялась нулю.

◀ Необходимость. Пусть $\text{mes } S_0(A) > 0$, тогда поскольку, как мы видели выше при доказательстве предложения 2, $\text{mes } (S_0(A) \setminus \bigcup_{(m)} S_0^{(m)}(A)) = 0$, то при некотором m должно быть $\text{mes } S_0^{(m)}(A) > 0$, откуда следует, что мера $\rho_m(t)$, а стало быть и мера ρ , содержит абсолютно непрерывную (лебеговскую) часть.

В самом деле, если бы мера ρ_m не содержала лебеговской части, то, в силу леммы 1 и леммы 3 из [1], отсюда непосредственно вытекало бы, что $\text{mes } S_0^{(m)}(A) = 0$.

Достаточность. Пусть $\text{mes } S_0(A) = 0$, тогда как мера $\rho(t)$, вопреки утверждению, содержит абсолютно непрерывную часть, тогда нетрудно убедиться, что найдется хотя бы одна мера ρ_m , также содержащая абсолютно непрерывную часть. Теперь же, привлекая лемму 2 из [1] и принимая во внимание очевидное включение $S_0^{(m)}(A) \subset S_0(A)$, без труда заключаем, что $\text{mes } S_0(A) > 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость нашего предложения.

Предложение 6. Для отсутствия сингулярной части спектра достаточно, чтобы $\Phi_0(\lambda)$ было конечным для всех $\lambda \in S_0(A)$, за исключением, быть может, счетного их числа,

◀ Пусть условие нашего предложения выполнено, и все же, вопреки утверждению, спектр оператора A содержит сингулярную часть, тогда нетрудно убедиться, что найдется такая мера $\rho_m(t)$, которая также содержит сингулярную часть $\rho_{ms}(t)$. Далее, поскольку $\chi_{k_0}^{(m)}(t)$ образуют полную систему в $L^2_{\rho_m}$, то хотя бы одна из них, скажем $\chi_{k_0}^{(m)}(t)$, отлична от нуля на множестве положительной ρ_{ms} -меры.

Из неравенства

$$\Phi_0(\lambda) \geq \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \sup_{(a_k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum_{(k)} a_k \chi_k^{(m)}(t) \right|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho_m,$$

полагая $a_{k_0} = 1$, а остальные a_k равными нулю, получим

$$\Phi_0(\lambda) \geq \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\chi_{k_0}^{(m)}(t)|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho_{ms}(t),$$

откуда в силу теоремы Радона-Никодима, леммы 1 и леммы 4 из [3] непосредственно заключаем, что предел в правой части последнего

неравенства, а стало быть и функция $\Phi_0(\lambda)$, равен $+\infty$ на множестве положительной $\rho_{\text{мз}}$ -меры. Поскольку такое множество, очевидно, не может быть счетным, то полученное противоречие доказывает справедливость нашего предложения. ►

Следствие. Для лебеговости спектра самосопряженного оператора с непрерывным спектром достаточно, чтобы $\Phi_0(\lambda)$ было конечным для всех $\lambda \in S_0(A)$ кроме, быть может, счетного их числа.

◀ **Доказательство** непосредственно следует из предыдущего предложения. ►

Замечание. Поскольку существуют примеры неубывающих абсолютно непрерывных функций, производная которых обращается в $+\infty$ на несчетном множестве точек, то нетрудно убедиться в невозможности указания необходимых и достаточных условий лебеговости спектра, выраженных лишь в терминах ядра спектра или конечности функции $\Phi_0(\lambda)$, ибо как для сингулярной меры, так и для упомянутых абсолютно непрерывных мер $\Phi_0(\lambda)$ обращается в $+\infty$ на множестве точек мощности континуума.

Предложение 7. Для лебеговости спектра самосопряженного оператора A с простым непрерывным спектром необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $G \in R_H$ имело место равенство*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\lambda) d\lambda = \|G^{-1}\|^2.$$

◀ Прежде всего заметим, что при доказательстве предложения 1 из [1] было установлено, что почти всюду по мере Лебега имеет место равенство

$$\Phi_0(\lambda) = F^2(\lambda) \rho'(\lambda) = \sum_{(k)} \mu_k^2 |\chi_k(\lambda)|^2 \rho'(\lambda),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\lambda) d\lambda &= \sum_{(k)} \mu_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_k(\lambda)|^2 \rho'(\lambda) d\lambda \leq \sum_{(k)} \mu_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_k(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \\ &= \sum_{(k)} \mu_k^2 = \|G^{-1}\|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Необходимость очевидна, поскольку при абсолютно непрерывном ρ неравенство (8) превращается в равенство.

Докажем теперь, что если в соотношении (8) имеет место знак равенства, то мера ρ абсолютно непрерывна. В самом деле, пусть мера ρ , вопреки нашему утверждению, содержит сингулярную часть и, стало быть, $\exists$ множество $M \subset R^1$ такое, что $\text{mes } M = 0$, тогда как $\rho(M) > 0$. Далее, поскольку система функций $\chi_k(\lambda)$ полна в L^2_ρ , то

* Здесь $\|\dots\|$ означает норму Гильберта-Шмидта.

найдем такое $\gamma_{\lambda_0}(\lambda)$, которое отлично от нуля на подмножестве $M \subset M$ положительной ρ -меры, и поэтому будет иметь место строгое неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_{\lambda_0}(\lambda)|^2 \rho'(\lambda) d\lambda < \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_{\lambda_0}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 1,$$

которое повлечет за собой строгое неравенство и в соотношении (8).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 16.XI.1971

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐԻԱՆ, Ռ. Ջ. ՄԿՐՏՅՈՒՆ. Հեղճանուր ինքնաճամայած օպերատորի սպեկտրի կորիզի և սպեկտրի լեբեզյան կամ սինգուլյար, լինելու խոշո ճայտանիշների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում քերված է սպեկտրի կորիզի այնպիսի սահմանում, որը պիտանի է դառնում սեպարաբլ հիլբերտյան տարածության մեջ գործող կամայական ինքնաճամայած օպերատորների համար և նշված են այդ կորիզի մի քանի հատկությունները:

Բացի այդ ապացուցված են սեպական էլեմենտների լրիվության, սինգուլյար սպեկտրի բացակայության, սպեկտրի լեբեզյան կամ զուտ սինգուլյար լինելու բավարար պայմանները ձևակերպված $\Phi_0(\lambda)$ ֆունկցիայի, իսկ երբեմն էլ միայն սպեկտրի կորիզի տերմիններով:

R. A. ALEXANDRIAN, R. Z. MKRTCHIAN. *On the nucleus of general selfadjointed operator and criterions of singularity or lebesqueness of its spectrum (summary)*

The notion of nucleus of spectrum for arbitrary selfadjointed operator in H is introduced and some of its properties are proved. In terms of $\Phi_0(\lambda)$ (sometimes in terms of the nucleus itself) sufficient conditions for completeness of the system of eigenlements, for absence of singular spectrum, for pure singularity or lebesqueness of the spectrum are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. О ядре спектра самосопряженного оператора с простым спектром, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика“, V, № 2, 1970, 97—108.
2. И. Ц. Гохбер, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамопряженных операторов, Изд. „Наука“, 1965.
3. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика“, 1, № 1, 1966.
4. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1957.