ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

УДК 513.7 РЕФЕРАТ

М. А. ВАСИЛЬЯН

# ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРПОЛОС

1°. В настоящей работе изучается геометрия регулярных гиперполос многомерного проективного пространства. При этом использован метод исследования погруженных многообразий, развитый Г. Ф. Лаптевым [1], основанный на теории групп Ли и теории внешних дифференциальных форм.

Основной целью работы является построение инвариантного оснащения регулярной гиперполосы $H_r (1 \leqslant r < n-1)$ пространства $P_n$—оснащения, связанного внутренним образом с этой гиперполосой. Эта задача решается в п° п° 4, 5, притом строится два оснащения, полезность которых выявляется при рассмотрении частных классов гиперполос. Этими частными классами гиперполос $H_r$ являются плоские, конические (п°6) и квадратичные (п°7) гиперполосы. Для плоских и конических гиперполос пригодно лишь инвариантное оснащение, построенное вторым способом (п°5), и наоборот, для квадратичных гиперполос—лишь инвариантное оснащение, построенное первым способом (п°4). Оказывается, что геометрия квадратичных гиперполос $H_r$ тесно связана с геометрией $r$-мерной поверхности конформного пространства $C_{n-1}$ [2].

В работе всюду используется принцип двойственности проективного пространства, и все полученные результаты имеют двойственное истолкование.

2°. В пространстве $P_n$ рассмотрим точечный репер $A_\xi$ и двойственный ему тангенциальный репер $\alpha^\eta$ ($\xi$, $\eta = 0, \cdots, n$), элементы которых удовлетворяют соотношениям $(A_\xi \alpha^\eta) = \delta_\xi^\eta$. Уравнения инфинитезимальных перемещений этих реперов имеют вид

$$dA_\xi = \omega_\xi^\eta A_\eta, \quad d\alpha^\xi = -\omega_\eta^\xi \alpha^\eta.$$

Пусть $(A, \alpha)$ — $r$-параметрическое семейство плоских элементов пространства $P_n$. Тогда при изменении параметров точка $A$ описывает $r$-мерную поверхность $V_r$, а семейство гиперплоскостей $\alpha$ огибает некоторую тангенциально вырожденную гиперповерхность $V_{n-1}^r$, обладающую $(n-r-1)$-мерными плоскими образующими $E_{n-r-1}$.

Гиперполосой называется такое $r$-параметрическое семейство плоских элементов $(A, \alpha)$, что гиперплоскость $\alpha$ касается $r$-мерной поверхности $V_r$, описываемой точкой $A$. Такое семейство будем называть $r$-мерной гиперполосой или гиперполосой ранга $r$ и обозначать через $H_r$.

Присоединим к гиперполосе $H_r$ репер нулевого порядка, полагая $A_0 = A$, $\alpha^n = \alpha$. Тогда получим

$$\omega_0^n = 0. \tag{1}$$

Предполагая, что гиперполоса $H_r$ регулярна [3], поместим точки $A_i (i=1, \cdots, r)$ в касательной плоскости $E_r$ поверхности $V_r$, а точки $A_v$ $(v = r+1, \cdots, n-1)$—в плоскости $E_{n-r-1}$. В этом репере, который является репером первого порядка, имеем

$$\omega_0^v = 0, \quad \omega_v^n = 0. \tag{2}$$

Система уравнений (1), (2) представляет собой систему основных уравнений гиперполосы $H_r$. При этом (1) и первое уравнение (2) являются уравнениями $V_r$, (1) и второе уравнение (2) — уравнениями $V_{n-1}^r$. Формы $\omega^i$ и $\omega_i^n$ являются соответственно базисными формами $V_r$ и $V_{n-1}^r$.

3°. Нормаль $E_{r-1}$, принадлежащая касательной плоскости $E_r$ поверхности $V_r$, определяется точками $M_i = A_i + x_i A_0$. Вторая нормаль $E_{n-r}$, содержащая образующую $E_{n-r-1}$ гиперповерхности $V_{n-1}^r$, определяется как пересечение гиперплоскостей $\mu^i = \alpha^i + \xi^i \alpha^n$. Кроме этих нормалей введем дополнительные элементы оснащения: плоскость $E_{n-r-2} \subset E_{n-r-1}$, не проходящую через точку $A_0$, определяемую точками $M_v = A_v + x_v A_0$, и плоскость $E_{r+1} \supset E_r$, не лежащую в гиперплоскости $\alpha^n$, определяемую гиперплоскостями $\mu^v = \alpha^v + \xi^v \alpha^n$. Плоскости $E_{r-1}$ и $E_{n-r}$ так же как плоскости $E_{r+1}$ и $E_{n-r-2}$ не пересекаются. Далее определим инвариантные точку $M_n = A_n - \xi^v A_v - \xi^i A_i + x A_0$ и гиперплоскость $\mu^0 = \alpha^0 - x_i \alpha^i - x_v \alpha^v + \xi \alpha^n$, условие инцидентности которых имеет вид $x + \xi + x_i \xi^i + x_v \xi^v = 0$.

Требование инвариантности указанных выше элементов оснащения приводит к тому, что величины $x_i$, $x_v$, $\xi^i$, $\xi^v$ образуют каждая в отдельности геометрические объекты, величина $x$ образует геометрический объект вместе с $\xi^i$, $\xi^v$, а величина $\xi$— вместе с $x_i$, $x_v$. Эти объекты назовем оснащающими объектами гиперполосы $H_r$.

4°. Мы будем строить инвариантное оснащение гиперполосы $H_r$, внутренним образом с ней связанное. Для этого нужно построить оснащающие объекты с помощью объектов фундаментальной последовательности геометрических объектов [1] гиперполосы $H_r$. Эта последовательность получается путем продолжения основных уравнений — уравнений (1), (2) гиперполосы $H_r$.

Первое продолжение уравнений (1), (2) приводит нас к уравнениям

$$\omega_i^n = a_{ij} \omega^j, \quad \omega_i^v = \lambda_{ij}^v \omega^j, \quad \omega_v^i = \lambda_v^{ij} \omega_j^n, \tag{3}$$

где $a_{ij}$, $\lambda_{ij}^v$ $\lambda_v^{ij}$ симметричны по индексам $i$, $j$. Здесь $a_{ij}$ — основной тензор гиперполосы $H_r$, невырожденный в силу ее регулярности. Величины $\lambda_{ij}^v$ образуют геометрический объект вместе с тензором $a_{ij}$, а $\lambda_v^{ij}$ — вместе с обратным ему тензором $a^{ij}$. Тензор $a_{ij}$ определяется окрестностью первого порядка гиперполосы $H_r$, объекты $\lambda_{ij}^v$, $\lambda_v^{ij}$—ее окрестностью второго порядка. Продолжение первого из уравнений

(3) вводит новый объект $\lambda_{ijk}$, симметричный по всем индексам, определяемый окрестностью второго порядка. Полученная часть фундаментальной последовательности геометрических объектов позволяет построить объекты $\lambda_v = \frac{1}{r} a_{ij} \lambda^{ij}_v, \lambda^v = \frac{1}{r} a^{ij} \lambda^v_{ij}$. Эти объекты определяют точки $M_v = A_v - \lambda_v A_0$, которые порождают инвариантную плоскость $E_{n-r-2}$ и гиперплоскости $\mu^v = \alpha^v - \lambda^v \alpha^n$, порождающие инвариантную плоскость $E_{r+1}$, внутренним образом связанные с гиперполосой и двойственные друг другу.

Образующая $E_{n-r-1}$ гиперповерхности $V^r_{n-1}$ несет фокусную поверхность $F_r$—алгебраическую поверхность порядка $r$. Плоскость $E_r$, касательная к поверхности $V_r$, является вершиной конуса $\Phi^r$—алгебраического конуса класса $r$. Инвариантная плоскость $E_{n-r-2}$ будет гармонической полярой точки $A_0$ относительно $F_r$, а плоскость $E_{r+1}$—гармонической полярой гиперплоскости $\alpha^n$ относительно $\Phi^r$.

Величины $b^v_{ij} = \lambda^v_{ij} - \lambda^v a_{ij}$, $c^{ij}_v = \lambda^{ij}_v - \lambda_v a^{ij}$ являются тензорами и удовлетворяют условиям аполярности

$$b^v_{ij} a^{ij} = 0, \; c^{ij}_v a_{ij} = 0.$$

Рассмотрим тензор $J^u_v = b^u_{ij} c^{ij}_v$ и предположим, что его ранг $\rho > 0$. Тогда относительный инвариант $J = J^{v_1}_{[v_1} J^{v_2}_{v_2} \cdots J^{v_\rho}_{v_\rho]}$ будет отличным от нуля. Дифференцируя этот инвариант, определим геометрические объекты $J_i$ и $J^i = a^{ij} J_j$. Затем построим объекты $t_i = \frac{1}{r+2} \lambda_{ijk} a^{jk}$, $t^i = a^{ij} t_j$. Тогда объекты $\lambda_i = -\frac{1}{2}(t_i + J_i), \lambda^i = -\frac{1}{2}(t^i - J^i)$ будут оснащающими. Точки $M_i = A_i - \lambda_i A_0$ и гиперплоскости $\mu^i = \alpha^i - \lambda^i \alpha^n$ определяют инвариантные нормали $E_{r-1}$ и $E_{n-r}$ гиперполосы $H_r$, связанные с ней внутренним образом. Эти нормали определяются окрестностью третьего порядка элемента гиперполосы $H_r$.

Без особого труда строятся также оснащающие объекты $\lambda^0$, $\lambda_n$, определяющие инвариантные точку $M_n = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^i A_i + \lambda^0 A_0$ и гиперплоскость $\mu^0 = \alpha^0 + \lambda_i \alpha^i + \lambda_v \alpha^v + \lambda_n \alpha^n$. Эти элементы определяются окрестностью четвертого порядка гиперполосы.

Таким образом, построенные нами инвариантные реперы гиперполосы $H_r$ определяются окрестностью четвертого порядка элемента гиперполосы.

5°. Укажем другой метод построения инвариантного оснащения, который годится также для случая $\rho = 0$. С этой целью построим тензоры $l_{ijk} = \lambda_{ijk} - 3a_{(ij} t_{k)}$, $l^{ijk} = a^{ip} a^{jq} a^{ks} l_{pqs}$, удовлетворяющие условиям аполярности

$$l_{ijk} a^{jk} = 0, \; l^{ijk} a_{jk} = 0.$$

Тензор $l_{ijk}$ назовем тензором Дарбу [1] поверхности $V_r$, а тензор $l^{ijk}$ — тензором Дарбу гиперповерхности $V^r_{n-1}$.

Рассмотрим относительный инвариант $l = l_{ij k} l^{ij k}$ и пусть он отличен от нуля. Дифференцируя этот инвариант, получим объекты $l_i$, $l^i = a^{ij} l_j$. Объекты $\overset{\wedge}{l}_i = -\frac{1}{2}(t_i + l_i)$, $\overset{\wedge}{l}{}^i = -\frac{1}{2}(t^i - l^i)$ будут оснащающими. С их помощью так же как выше определяются инвариантные нормальные плоскости $\overset{\wedge}{E}_{r-1}$ и $\overset{\wedge}{E}_{n-r}$, а затем и остальные элементы инвариантного оснащения. Порядок этого оснащения будет такой же, как и порядок оснащения, построенного выше.

6°. Гиперполоса $H_r$ называется конической, если ее гиперповерхность $V^r_{n-1}$ является гиперконусом, вершиной которого служит неподвижная плоскость $E_{n-r-2}$. Гиперполоса $H_r$ называется плоской, если ее поверхность $V_r$ лежит в неподвижной плоскости $E_{r+1}$.

Теорема 1. *Для того чтобы гиперполоса $H_r$ была конической при $n > 2$ необходимо и достаточно, чтобы $C^{ij}_v = 0$. Для того чтобы гиперполоса $H_r$ была плоской при $n \geqslant 2$ необходимо и достаточно, чтобы $b^v_{ij} = 0$.*

Заметим, что если гиперполоса является конической, то фокусная поверхность $F_r$ вырождаясь совпадает с инвариантной плоскостью $E_{n-r-2}$, а если гиперполоса плоская, то конус $\Phi^r$ вырождается в связку гиперплоскостей, осью которой служит плоскость $E_{r+1}$. Для плоских и конических гиперполос $H_r$ возможно только второе построение инвариантного оснащения (п°5).

7°. Гиперполоса $H_r$ называется квадратичной, если ее поверхность $V_r$ принадлежит невырожденной гиперквадрики $Q_{n-1}$, а гиперповерхность $V^r_{n-1}$ касается этой гиперквадрики. Если гиперполоса $H_r$ является квадратичной, то на ней $l_{ijk} = 0$. Для квадратичной гиперполосы инвариант $J$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда ее тензоры $b^v_{ij}$ и $c^{ij}_v$ тождественно обращаются в нуль, то есть когда эта гиперполоса будет плоской и конической одновременно. В дальнейших рассмотрениях предполагается, что $J \neq 0$. Для квадратичной гиперполосы годится только первый способ построения инвариантного оснащения.

Теорема 2. *Для квадратичной неплоской гиперполосы $H_r$ элементы инвариантного репера будут полярно сопряженными относительно $Q_{n-1}$, а именно, сопряженными будут: касательная плоскость $E_r$ и образующая $E_{n-r-1}$, оснащающие плоскости $E_{n-r-2}$ и $E_{r+1}$, нормали $E_{r-1}$ и $E_{n-r}$, точка $M_n$ и гиперплоскость $\mu^0$.*

Геометрия квадратичных гиперполос $H_r$ пространства $P_n$ связана с геометрией $r$-мерной поверхности конформного пространства $C_{n-1}$ [2]. Инвариантный репер $r$-мерной поверхности пространства $C_{n-1}$ при перенесении Дарбу переходит в построенный нами инвариантный репер квадратичной гиперполосы $H_r$ пространства $P_n$.

Ереванский государственный
университет

Поступило 15.I.1971

Полный текст настоящей работы
депонирован в ВИНИТИ

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Ф. Лаптев.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Тр. Моск. мат. об-ва, 1953, т. 2, 275—382.
2. *М. А. Акивис.* К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей, Мат. сб., 53 (95), № 1, 1961, 53—72.
3. *В. В. Вагнер.* Теория поля локальных гиперполос, Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 8, 1950, 197—272.