ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

А. А. НЕРСЕСЯН

О МНОЖЕСТВАХ КАРЛЕМАНА

Пусть D—область в расширенной комплексной плоскости, $\partial D \neq \varnothing$. Назовем множество $E \subset D$ множеством Карлемана в D, если E замкнуто в D и для любой пары функций $f(z)$ и $\varepsilon(z)$, где $f(z)$ непрерывная на E и аналитическая во внутренности E° множества E функция, а $\varepsilon(z) > 0$—непрерывная на D функция, убывающая к нулю при приближении z к границе ∂D области D, существует аналитическая в D функция $g(z)$ такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \text{ при } z \in E. \tag{*}$$

Т. Карлеман показал [1], что при $D = C$ действительная ось является множеством, допускающим аппроксимацию вида (*).

М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым [2] было получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы континуум с пустой внутренностью был множеством Карлемана.

П. Готье [3] было получено условие на замкнутое множество с неограниченной внутренностью, необходимое для того, чтобы оно было множеством Карлемана. В работе [3] дано и условие на множество, достаточное для того, чтобы оно было множеством Карлемана.

В настоящей работе показано, что некоторые известные ранее условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы множество E было множеством Карлемана.

1°. Пусть $z, \zeta \in D$, через $\rho(z, \zeta)$ обозначим сферическое расстояние между z и ζ:

$$\rho(z, \zeta) = \frac{|z - \zeta|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |\zeta|^2)}}.$$

Обозначим через $V_\varepsilon(\partial D)$ сферическую ε-окрестность границы D

$$V_\varepsilon(\partial D) = \{z \in \overline{C} \mid \rho(z, \partial D) < \varepsilon\}.$$

Скажем, что множество E удовлетворяет условию K, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каждую точку $z \in (D - E) \cap V_\delta(\partial D)$ можно соединить с ∂D жордановой кривой $\gamma_z \subset (D - E) \cap V_\varepsilon(\partial D)$.

Скажем, что множество E удовлетворяет условию A, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что ни одна из компонент множества E° не пересекает одновременно множества $V_\delta(\partial D)$ и $D - V_\varepsilon(\partial D)$.

Докажем, что справедлива следующая

Теорема. *Для того чтобы замкнутое в D множество $E \subset D$ было множеством Карлемана, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям A и K.*

Необходимость условия K вытекает из теоремы Н. У. Аракеляна о равномерных приближениях [4]. Необходимость условия A доказал П. Готье [3] для случая $D=(|z|<R)$, $0<R\leqslant\infty$, однако нетрудно заметить, что это доказательство верно и для общего случая.

2°. При доказательстве теоремы мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Пусть F—компакт в C с дополнением, состоящим из конечного числа компонент. Открытое подмножество G множества F таково, что $\partial G\subset\partial F$. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ существует рациональная функция $R(z, G, \varepsilon)$ такая, что*

a) $|R(z, G, \varepsilon)|<\varepsilon$ *при* $z\in G-(\partial G)_\varepsilon$,

b) $|1-R(z, G, \varepsilon)|<\varepsilon$ *при* $z\in F-G_\varepsilon$,

c) $|R(z, G, \varepsilon)|<c$ *при* $z\in F$,

где c—абсолютная постоянная, а N_ε—ε-окрестность данного множества N.

По теореме Титце—Урысона, для любого $\delta>0$ существует непрерывная на всей плоскости функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая условиям

1. $\varphi(z)=0$ при $z\in\overline{G}$,
2. $\varphi(z)=1$ при $z\in\overline{C(G_\delta)}$,
3. $0\leqslant\varphi(z)\leqslant1$.

Если $\omega(r)$—модуль непрерывности $\varphi(z)$, то $\omega(\delta)=1$. Рассмотрим усреднение функции $\varphi(z)$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi\delta^2}\iint\limits_{|\zeta-z|<\delta}\varphi(\zeta)\,d\xi d\eta,\quad \zeta=\xi+i\eta.$$

Отметим следующие свойства функции $\Phi(z)$:

1. $$|\Phi(z)-\varphi(z)|<\frac{1}{\pi\delta^2}\iint\limits_{|\zeta-z|<\delta}|\varphi(\zeta)-\varphi(z)|\,d\xi d\eta\leqslant\omega(\delta)=1.$$

Отсюда вытекает, что $|\Phi(z)|\leqslant2$.

2. $\Phi(z)=0$ при $z\in G-(\partial G)_\delta$; $\Phi(z)=1$ при $z\in C(G_{2\delta})$. Пусть

$$\bar\partial\Phi(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right),\quad z=x+iy. \tag{1}$$

По формуле Грина имеем

$$\Phi(z)=-\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{|\zeta-x|=\delta}d\xi\int\limits_0^{\eta+y}\varphi(\zeta)\,d\eta=\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{|\zeta-iy|=\delta}d\eta\int\limits_0^{\xi+x}\varphi(\zeta)\,d\xi. \tag{2}$$

Из (2) вытекает

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{|\zeta-z|=\delta}\varphi(\zeta)\,d\eta;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{|\zeta-z|=\delta}\varphi(\zeta)\,d\xi.$$

Подставляя эти выражения в (1), принимая во внимание свойство 3) функции $\varphi(z)$, будем иметь

$$|\bar{\partial}\Phi(z)| = \frac{1}{2\pi\delta^2}\left|\int\limits_{|\zeta-z|=\delta}\varphi(\zeta)(d\eta - id\xi)\right| = \frac{1}{2\pi\delta^2}\left|\int\limits_{|\zeta-z|=\delta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{\delta}. \quad (3)$$

Пусть R такое, что $F \subset (|z| < R) = S$ и $(|z| = R) \subset C(G_{2\delta})$, тогда по формуле Бореля—Помпею

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\zeta\in S}\frac{\bar{\partial}\Phi(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta = 1 - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\zeta\in S-F}\frac{\bar{\partial}\Phi(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F}\frac{\bar{\partial}\Phi(z)}{\zeta - z}d\xi d\eta = 1 - J_1 - J_2. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что J_1 непрерывна на F и аналитична на F°. Так как дополнение к F состоит из конечного числа компонент, то существует рациональная функция $R_1(z)$ такая, что

$$|1 - J_1 - R_1(z)| < \delta \quad \text{при } z \in F, \quad (5)$$

согласно теореме С. Н. Мергеляна [5].

Так как $\bar{\partial}\Phi(z) = 0$ при $z \in F - (\partial G)_{2\delta}$, а расстояние от точек множества $F \cap (\partial G)_{2\delta}$ до дополнения к F не превосходит 2δ в силу условия леммы на ∂G, то для всякого $\zeta \in F \cap (\partial G)_{2\delta}$ в силу известной леммы С. Н. Мергеляна об аппроксимации ядра Коши [5], существует рациональная функция $R_\zeta(z)$, удовлетворяющая условиям

$$1.\quad |R_\zeta(z)| < \frac{c_1}{\delta},\ z \in F, \quad (6)$$

$$2.\quad \left|\frac{1}{\zeta - z} - R_\zeta(z)\right| < \frac{c_1\delta^2}{|\zeta - z|^3},\ |\zeta - z| > c_2\delta, \quad (7)$$

где $c_1, c_2, \cdots$—абсолютные постоянные, а порядки полюсов рациональных функций $R_\zeta(z)$ ограничены числом, не зависящим от ζ. Пусть

$$R_2(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\zeta\in F\cap(\partial G)_{2\delta}}\bar{\partial}\Phi(\zeta)\,R_\zeta(z)\,d\xi d\eta. \quad (8)$$

Имеем согласно (3), (6), (7) и (8) при $z \in F$

$$|J_2 - R_2(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\zeta\in F\cap(\partial G)_{2\delta}}|\bar{\partial}\Phi(z)|\left|\frac{1}{\zeta - z} - R_\zeta(z)\right|d\xi d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi\delta}\iint\limits_{|\zeta-z|<c_2\delta}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} + \frac{1}{\pi\delta}\iint\limits_{|\zeta-z|<c_2\delta}|R_\zeta(z)|d\xi d\eta + \frac{1}{\pi\delta}\iint\limits_{|\zeta-z|>c_2\delta}\left|\frac{1}{\zeta - z} -\right.$$

$$\left.-R_\zeta(z)\right|d\xi d\eta \leqslant \frac{1}{\pi\delta}2\pi c_2\delta + \frac{c_1}{\pi\delta^2}\pi c_2^2\delta^2 + c_1\frac{\delta^2}{c_2\pi\delta^2} = c_3. \quad (9)$$

Будем считать, что δ настолько мало, что $c_2\delta < \sqrt{\delta}$. Тогда для точек множества $\{z\in F | d(z, F^0\cap(\partial G)_{2\delta}) > \sqrt{\delta}\}$, где $d(z, N)$ — евклидово расстояние точки z до множества N, будем иметь согласно (7)

$$|J_2 - R_2(z)| \leqslant \frac{c_1\delta^2}{\pi\delta}\iint\limits_{|\zeta-z|>\delta}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta-z|^3} = 2c_1\sqrt{\delta}; \tag{10}$$

а для функции $R(z) = R_1(z) + R_2(z)$ согласно (4), (5), (9) и (10) имеем

$$|\Phi(z) - R(z)| < \delta + c_3 < c_4 \quad \text{при} \quad z\in F,$$

$$|\Phi(z) - R(z)| < 2c_1\sqrt{\delta} = c_5\sqrt{\delta} \quad \text{при} \quad z\in F - (\partial G)_{2\delta+\sqrt{\delta}}.$$

Для данного $\varepsilon > 0$, выбирая $\delta > 0$ из условия $\sqrt{\delta} < \dfrac{\varepsilon}{2c_5}$ и принимая во внимание свойства 1) и 2) функции $\Phi(z)$, убедимся в справедливости леммы.

3°. Последовательность расширяющихся множеств $\{D_n\}$ определим следующим образом.

Пусть $A_0 = \{z\in D | \rho(z, \partial D) \geqslant r_0\}$, где $r_0 > 0$ настолько мало, что $A_0 \neq \varnothing$, A_0—замкнутое множество с конечным числом компонент дополнения, каждая из которых содержит подмножество множества CD. B_0—замыкание части CE, точки которой могут быть соединены с ∂D только непрерывными кривыми, пересекающими A_0, C_0—замыкание совокупности компонент E°, замыкание которых пересекается с множеством $A_0\cup B_0$. Пусть $D_0 = A_0\cup B_0\cup C_0$.

Отметим следующие свойства множества D_0:

a) Существует $r_0' > 0$ такое, что $\rho(D_0, \partial D) > r_0'$. Это вытекает из того, что E удовлетворяет условиям A и K;

b) D_0—замкнуто;

c) Дополнение к D_0 состоит из конечного числа компонент, каждая из которых содержит подмножество CD (вытекает из определения D_0).

d) $\partial D_0 \subset \partial(D_0\cup E)$. Так как $\partial D_0 \subset \partial A_0\cup\partial B_0\cup\partial C_0$, то точка $z\in\partial D_0\cap\cap(\partial A_0\cup\partial B_0)$ является предельной для множества $C(D_0\cup E)$ по определению D_0, а точка $z\in\partial D_0\cap\partial C_0$ является предельной для $C(D_0\cup E)$ по определению компоненты связности E°.

Используя ту же конструкцию, построим множество D_1, беря $A_1 = \{z\in D | \rho(z, \partial D) \geqslant r_1\}$, где $0 < r_1 < \dfrac{r_0'}{2}$ и т. д.

Ясно, что любое компактное подмножество области D принадлежит всем D_n при n достаточно большом.

Замкнутые множества D_n', D_n'', $n = 0, 1, 2, \cdots$ выберем так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

a) $D_n' \subset D_n^\circ$; $D_n \subset (D_n')^\circ$; $D_n'' \subset (D_{n+1}')^\circ$;

b) $C(\overset{*}{D}_n)$ состоит из конечного числа компонент, содержащих подмножества CD.

Через $\overset{*}{r}_n$ обозначим $\rho(\overset{*}{D}_n, \partial D)$.

Замечания: a) Множество $E \cap \overset{*}{D}_n$ допускает равномерное приближение рациональными функциями [5].

b) Все рациональные функции, рассматриваемые ниже, имеют свои полюсы в CD;

c) Не нарушая общности, функцию $\varepsilon(z)$ можем принять зависящей от $\rho(z, \partial D)$;

Существует рациональная функция $R_0(z)$ такая, что

$$|f(z) - R_0(z)| < \frac{1}{4c}\varepsilon(\overset{*}{r}_0) \quad \text{при} \quad z \in E \cap \overset{*}{D}_0, \tag{11}$$

где c постоянная леммы.

Рациональную функцию $Q_1(z)$ выберем так, чтобы

$$|f(z) - R_0(z) - Q_1(z)| < \frac{1}{4c}\varepsilon(\overset{*}{r}_1) \quad \text{при} \quad z \in E \cap \overset{*}{D}_1. \tag{12}$$

Согласно лемме, при $G = \overset{*}{D}_0$, $F = D_0 \cup (E \cap \overset{*}{D}_1)$ можно найти рациональную функцию $r(z, D_0, \varepsilon)$ с $\varepsilon_1 > 0$ таким, что функция $R_1(z) = r(z, D_0, \varepsilon_1)\, Q_1(z)$ будет обладать следующими свойствами:

$$|R_1(z)| < \frac{1}{2}, \quad z \in D_0',$$

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z)| < \frac{1}{4c}\varepsilon(\overset{*}{r}_1), \quad z \in E \cap (\overset{*}{D}_1 - \overset{*}{D}_0). \tag{13}$$

Выбор ε_1 гарантируется тем, что (12) выполняется на замкнутом множестве и в нем исключено равенство.

При $z \in E \cap \overset{*}{D}_0$ будем иметь согласно (11), (12) и свойству 3) функции $r(z, D_0, \varepsilon_1)$,

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z)| < \frac{1}{4c}\varepsilon(\overset{*}{r}_0) + c\left(\frac{1}{4c}\varepsilon(\overset{*}{r}_1) + \frac{1}{4c}\varepsilon(\overset{*}{r}_0)\right) < \varepsilon(\overset{*}{r}_0).$$

Рациональную функцию $Q_2(z)$ выберем из условия

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z) - Q_2(z)| < \frac{1}{4c}\varepsilon(\overset{*}{r}_2), \quad z \in E \cap \overset{*}{D}_2. \tag{14}$$

Число $\varepsilon_2 > 0$ возьмем настолько малым, чтобы функция $R_2(z) = r(z, D_1, \varepsilon_2)\, Q_2(z)$ удовлетворяла следующим условиям:

$$|R_2(z)| < \frac{1}{4}, \quad z \in D_1',$$

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z) - R_2(z)| < \varepsilon(\overset{*}{r}_0), \quad z \in E \cap \overset{*}{D}_0,$$

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z) - R_2(z)| < \frac{1}{4c}\varepsilon(\overset{*}{r}_2), \quad z \in E \cap (\overset{*}{D}_2 - \overset{*}{D}_1).$$

Принимая во внимание (13) и (14), будем иметь при $z \in E \cap (D_1^{\bullet} - D_0^{\bullet})$

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z) - R_2(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(r_1^{\bullet}) + c\left(\frac{1}{4c}\,\varepsilon(r_2^{\bullet}) + \frac{1}{4c}\,\varepsilon(r_1^{\bullet})\right) < \varepsilon(r_1^{\bullet}).$$

Пусть для некоторого n выбраны функции $R_0(z), R_1(z), \cdots, R_n(z)$ такие, что

$$|R_k(z)| < \frac{1}{2^k}, \quad z \in D_{k-1}', \ k = 1, 2, \cdots, n, \tag{15}$$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_n(z)| < \varepsilon(r_k^{\bullet}), \ z \in E \cap (D_k^{\bullet} - D_{k-1}^{\bullet}), \ k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

$$D_{-1}^{\bullet} = \varnothing, \tag{16}$$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_n(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(r_n^{\bullet}), \ z \in E \cap (D_n^{\bullet} - D_{n-1}^{\bullet}). \tag{17}$$

Рациональную функцию $Q_{n+1}(z)$ выберем так, чтобы

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_n(z) - Q_{n+1}(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(r_{n+1}^{\bullet}), \ z \in E \cap D_{n+1}^{\bullet}. \tag{18}$$

Число $\varepsilon_{n+1} > 0$ возьмем настолько малым, чтобы для функции $R_{n+1}(z) = r(z, D_n, \varepsilon_{n+1})\, Q_{n+1}(z)$ выполнялись неравенства

$$|R_{n+1}(z)| < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad z \in D_n',$$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_n(z) - R_{n+1}(z)| < \varepsilon(r_k^{\bullet}), \ z \in E \cap (D_k^{\bullet} - D_{k-1}^{\bullet}),$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_{n+1}(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(r_{n+1}^{\bullet}), \quad z \in E \cap (D_{n+1}^{\bullet} - D_n^{\bullet}).$$

Согласно (17), (18) и условию 3 на $r(z, D_n, \varepsilon_{n+1})$ будем иметь при $z \in E \cap (D_n^{\bullet} - D_{n-1}^{\bullet})$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_{n+1}(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(r_n^{\bullet}) + c\left(\frac{1}{4c}\,\varepsilon(r_{n+1}^{\bullet}) + \frac{1}{4c}\,\varepsilon(r_n^{\bullet})\right) <$$
$$< \varepsilon(r_n^{\bullet}).$$

Принимая во внимание (15), нетрудно видеть, что ряд $\sum\limits_0^{\infty} R_n(z)$ сходится равномерно на любом компактном подмножестве области D, следовательно представляет аналитическую в D функцию $g(z) = \sum\limits_0^{\infty} R_n(z)$. В силу (16) имеем

$$|f(z) - G(z)| \leqslant \varepsilon(z), \ z \in E.$$

Теорема доказана.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить

благодарность доктору физико-математических наук Н. У. Аракеляну за ценные указания.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 17.XI.1971

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Կառլեմանի բազմությունների մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք D*-ն տիրույթ է ընդլայնված հարթության վրա* $\partial D \neq \varnothing \cdot E \subset D$ D*-ի նկատմամբ փակ բազմություն է։* E*-ն կանվանենք Կառլեմանի բազմություն, եթե ֆունկցիաների ցանկացած* f(z)*,* ε(z) *զույգի համար, որտեղ* f(z)*-ը անընդհատ է* E*-ի վրա և անալիտիկ՝* E*-ի ներսում, իսկ* ε(z)*-ը դրական, անընդհատ ֆունկցիա է,* $\varepsilon(z) \to 0$ *ցանկացած արագությամբ, երբ* z*-ը մոտենում է* D*-ին, գոյություն ունի մի* g(z)*, անալիտիկ* D*-ում, ֆունկցիա այնպես, որ* $|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z)$, $z \in E$.

Ապացուցված է, որ A *և* K *պայմանները անհրաժեշտ և բավարար են, որպեսզի* E*-ն լինի Կառլեմանի բազմություն։*

A. H. NERSESIAN. *On the Carleman sets* (summary)

Let D be a domain on the extended complex plane, $\partial D \neq \varnothing$, $E \subset D$ be relatively closed subset of D. We call E a Carleman set if for any pair of functions $f(z)$, $\varepsilon(z)$ where $f(z)$ is continuous on E and analytical in the interiour of E, $\varepsilon(z)$ is a positive, continuous on D function, $\varepsilon(z) \to 0$ arbitrarily rapid when z tends to ∂D, there exists, a function $g(z)$ analytical in D such that

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z), \quad z \in E.$$

It is proved that the conditions A and K are necessary and sufficient for E to be a set of Carleman.

ЛИТЕРАТУРА

1. *T. Carleman*. Sur un théorème de Weierstrass, Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fisik, Bd 20, № 4, 1927, 1—5.
2. *М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев*. Об одной задаче Карлемана, ДАН СССР, 23, № 8, 1939, 746—748.
3. *P. Gauthier*. Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disc, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика", IV, № 5, 1969, 319—326.
4. *Н. У. Аракелян*. Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика", III, №№ 4—5, 1968.
5. *С. Н. Мергелян*. Равномерные приближения функций комплексного переменного УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.