ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

Б. М. ЕДИГАРЯН, Д. К. ФАДДЕЕВ

КОМПЛЕКСНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУГРУППЫ МАТРИЦ РАНГА 2 НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Цель работы—исследование представлений над полем C комплексных чисел полугруппы квадратных матриц над конечным полем $K=GF(q)$, $q=p^c$. В работе излагается дальнейшее развитие метода предложенного в [1] для описания представлений полугруппы матриц ранга $\leqslant 1$. Здесь решается тот же вопрос для матриц ранга $\leqslant 2$.

1°. Строение полугруппы матриц. Пусть M^n—полугруппа матриц порядка n над полем K. Всякий двусторонний идеал полугруппы M^n есть множество матриц, ранг каждой из которых не превосходит некоторого числа, так что все двусторонние идеалы естественным образом линейно упорядочены по включению

$$M^n = M^n_n \supset M^n_{n-1} \supset \cdots \supset M^n_1 \supset M^n_0 = (0).$$

Здесь M^n_m обозначает множество матриц, имеющих ранг, не превосходящий m.

Фактор-полугруппа $M^n_m \setminus M^n_{m-1}$ вполне простая и к ней может быть применена известная структурная теорема (см. [2]). Для наших целей нужно фактическое описание структурной матрицы для этой полугруппы.

Введем в рассмотрение пространство столбцов S_n длины n над полем K и пространство строк S^*_n той же длины. Пространство S^*_n естественно считать сопряженным с пространством S_n. Каждую квадратную матрицу будем интерпретировать как оператор левого умножения в пространстве S_n. С любой матрицей $A \in M^n$ связаны пространство ее столбцов (точнее, натянутые на ее столбцы) и пространство ее строк. Первое—AS_n содержится в S_n и является образом при действии оператора A. Второе содержится в S^*_n и представляет собой аннулятор ядра оператора A. Если ранг матрицы A равен m, то пространства ее столбцов и строк m-мерны.

Пусть $P=AS_n$—пространство столбцов матрицы $A \in M^n_m \setminus M^n_{m-1}$ (т. е. ранга m), и пусть $\overline{P}$—матрица вида $n \times m$, столбцы которой составляют некоторый базис пространства P. Ясно, что $A=\overline{P}B$, где B—некоторая $(m \times n)$-матрица, составленная из коэффициентов, с которыми столбцы матрицы A выражаются через столбцы матрицы $\overline{P}$. Матрица B в этом представлении единственна. Далее, строки матрицы A являются линейными комбинациями строк матрицы B, так что пространство Q' строк матрицы A содержится в пространстве строк матрицы B. Матрица B имеет m строк, а пространство Q' имеет размерность m. Поэтому пространства строк для матриц A и B совпадают, и строки матрицы B линейно независимы. Пусть $\overline{Q}'$ — матрица вида $m \times n$, строки которой составляют некоторый базис пространства Q'. Тогда $B = C\overline{Q}'$, где C однозначно определенная невырожденная $m \times m$ матрица. Таким образом, верно следующее предложение.

Предложение 1. *Матрицы ранга m, заданные над полем K и имеющие данное пространство P столбцов и данное пространство Q' строк, однозначно записываются в виде $A = \overline{P}C\overline{Q}'$, где C принадлежит группе $L(m, k)$ невырожденных матриц порядка m, $\overline{P}$ — матрица, столбцы которой составляют базис пространства P и $\overline{Q}'$ — матрица, строки которой составляют базис пространства Q'.*

Предложение 1 верно при любом поле K. В дальнейшем будем считать $K = GF(q)$.

Рассмотрим квадратные матрицы порядка

$$N_m^n = \frac{(q^n - 1)\cdots(q-1)}{(q^m - 1)\cdots(q-1)(q^{n-m} - 1)\cdots(q-1)},$$

равного числу подпространств размерности m в n-мерном пространстве над полем K. Строки матриц занумеруем m-мерными подпространствами P пространства S_n, столбцы — m-мерными подпространствами Q' пространства S_n^*. Предположим, что во всех этих подпространствах выбраны базисы. Матрице $A \in M_m^n \setminus M_{m-1}^n$, $A = \overline{P}C\overline{Q}'$ сопоставим матрицу $\varphi(A)$ порядка N_m^n, у которой имеется единственный ненулевой элемент, равный C, на пересечении строки и столбца с номерами P и Q':

$$\varphi(A) = C\mathbf{X}^* e_{P,\,Q'}. \tag{1}$$

Будем считать, что умножение матриц A_i ранга m осуществляется как в полугруппе $M_m^n \setminus M_{m-1}^n$, т. е. произведение заменяется на нуль, если ранг произведения меньше m. Легко видеть, что

$$\varphi(A_1A_2) = \varphi(A_1)\Pi\varphi(A_2), \quad \text{где } \Pi = \sum_{P,\,Q'} (\overline{Q}'\overline{P})\mathbf{X}^* e_{Q',\,P}.$$

Здесь $(\overline{Q}'\overline{P})$ обозначает элемент группы $L(m, K)$, если $\overline{Q}'\overline{P}$ невырожденная матрица и 0, если эта матрица вырожденная.

Введем теперь в рассмотрение полугрупповую алгебру V_m^n над полем C комплексных чисел для полугруппы $M_m^n \setminus M_{m-1}^n$ и алгебру матриц W_m^n порядка N_m^n над групповой алгеброй группы $L(m, K)$. Указанное выше отображение φ базисных элементов алгебры V_m^n в алгебру W_m^n естественно продолжается до биективного отображения V_m^n на W_m^n. Ясно, что формула $\varphi(A_1A_2) = \varphi(A_1)\Pi\varphi(A_2)$ сохраняется для любых $A_1, A_2 \in V_m^n$. Отображение ψ; $A \to \varphi(A)\Pi$ будет гомо-

* Знак X обозначает тензорное произведение.

морфизмом V_m^n в W_m^n и это отображение будет изоморфизмом V_m^n на W_m^n в том и только в том случае, если П—невырожденная матрица.

Пусть Δ—представление группы $L(m, K)$. Ясно, что если П невырождена, то матрица $\Pi_\Delta = \Delta(\Pi) = \sum_{P,Q'} \Delta(\overline{Q'}\,\overline{P}) \times e_{Q',P}$ невырождена и обратно, если все Π_Δ невырождены, то невырождена и П, причем достаточна невырожденность Π_Δ при всех неприводимых представлениях Δ.

Наши дальнейшие усилия будут направлены на доказательство невырожденности Π_Δ для некоторых классов представлений Δ. В частности, будет установлена невырожденность Π_Δ при $m=2$ и любом n, для всех представлений Δ группы $L(2, K)$.

2°. Матрица π_Δ. При замене представления Δ на эквивалентное, матрица Π_Δ, очевидно, подвергается преобразованию подобия. Выясним как она изменяется в зависимости от выбора базисов в пространствах P и Q'. Пусть $\overline{\overline{P}}$ и $\overline{\overline{Q'}}$— матрицы, составленные из некоторых новых базисов подпространств P и Q', так что $\overline{\overline{P}} = \overline{P}\alpha(P)$, $\overline{\overline{Q'}} = \beta(Q')\overline{Q'}$, где $\alpha(P)$, $\beta(Q') \in L(m, K)$—матрицы, связывающие новые базисы $\overline{\overline{P}}, \overline{\overline{Q'}}$ с исходными $\overline{P}, \overline{Q'}$. Тогда

$$\tilde{\Pi}_\Delta = \sum_{P,Q'} \Delta(\beta(\overline{Q'})(\overline{Q'}\,\overline{P})\alpha(P)) \times e_{Q',P} = U\Pi_\Delta V,$$

где $U = \sum_{Q'} \Delta(\beta(Q')) \times e_{Q',Q'}$, $V = \sum_{P} \Delta(\alpha(P)) \times e_{P,P}$ — квазидиагональные матрицы.

Введем в рассмотрение матрицы $\Pi_\Delta^* = \sum \Delta^{-1}(\overline{Q'}\,\overline{P}) \times e_{P,Q'}$ и

$$\pi_\Delta = \Pi_\Delta^* \Pi_\Delta = \sum_{P_i, P_j} \left(\sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q'}\,\overline{P_i})\,\Delta(\overline{Q'}\,\overline{P_j}) \right) \times e_{P_i,P_j}.$$

Из формулы преобразования матрицы Π_Δ и аналогичной формулы для Π_Δ^* следует, что матрица π_Δ не изменяется при изменении базисов в подпространствах Q' и претерпевает преобразование подобия посредством матрицы V при изменении базисов в подпространствах P. При переходе от представления Δ к эквивалентному матрица π_Δ тоже превращается в подобную. Поэтому собственные значения матрицы π_Δ не зависят ни от выбора базисов подпространств, ни от выбора представления Δ в классе эквивалентных представлений.

Если Δ—унитарное представление (а такое существует в каждом классе эквивалентных представлений), то матрица Π_Δ^* сопряжена с Π_Δ. Поэтому матрица π_Δ всегда отлична от нулевой, матрицы π_Δ и Π_Δ—одновременно вырожденные или невырожденные, и все собственные значения матрицы π_Δ вещественны и неотрицательны.

3°. Подъем представлений. Пусть дано представление Δ группы $L(m, K)$. Построим, исходя из него, представление $\lambda_m^n \Delta$ группы $L(n, K)$ следующим образом. Выберем базисы $\overline{P}$ во всех m-мерных подпространствах P пространства S_n. Пусть $A \in L(n, K)$. Ясно, что матрица $A\overline{P}$ дает некоторый базис пространства AP но, вообще говоря, отличный от заранее выбранного $\overline{AP}$, так что $A\overline{P} = \overline{AP} \cdot \alpha(A, P)$, где $\alpha(A, P)$—некоторый элемент группы $L(m, K)$. Положим

$$(\lambda_m^n \Delta)(A) = \sum_P \Delta(\alpha(A, P)) \times e_{AP,\, P}. \tag{2}$$

Легко проверить, что $\lambda_m^n \Delta$ есть действительно представление группы $L(n, K)$. Переход от представления Δ к представлению $\lambda_m^n \Delta$ будем называть подъемом, а само представление $\lambda_m^n \Delta$ — поднятым от Δ. Ясно, что замена представления Δ на эквивалентное влечет переход к эквивалентному поднятому представлению. Изменение базиса: $\overline{P} = \overline{P}\,\nu(P)$, тоже влечет преобразование подобия: $\lambda_m^n\Delta \to \Gamma^{-1}(\lambda_m^n\Delta)\,\Gamma$,

где $\quad \Gamma = \sum\limits_P \nu(P) \times e_{\overline{P},\, \overline{P}}$.

Подъем представления можно описать еще следующим образом. Представление Δ группы $L(m, K)$ естественно распространяется на группу H_m^n, составленную из невырожденных ступенчатых матриц $\begin{pmatrix} B_1 & C \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ с диагональными клетками порядков m и $n-m$, если положить $\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} B_1 & C \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \Delta(B_1)$. Тогда $\lambda_m^n \Delta$ есть не что иное, как представление, индуцированное на $L(n, K)$ представлением $\tilde{\Delta}$. В обозначениях статьи [3] $\lambda_m^n \Delta = \Delta \circ 1_{n-m}$.

Если представление Δ приводимо: $\Delta = \Delta_1 \oplus \cdots \oplus \Delta_s$, то $\lambda_m^n \Delta = \lambda_m^n \Delta_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_m^n \Delta_s$. Если Δ—неприводимо, то $\lambda_m^n \Delta$ может оказаться приводимым. Неприводимые представления группы D, входящие в поднятые от группы $L(m, K)$ представления, характеризуются следующим свойством.

Предложение 2. *Для того чтобы неприводимое представление D группы $L(n, K)$ входило в $\lambda_m^n \Delta$ при некотором представлении Δ группы $L(m, K)$, $m \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы ограничение D на группу $\tilde{H}_m^n$, состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} E_m & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ содержало единичное представление этой группы.*

Действительно, по закону двойственности Фробениуса, ограничение D на $\tilde{H}_m^n$ содержит единичное представление в том и только в том случае, когда D содержится в представлении, индуцированном единичным представлением группы $\tilde{H}_m^n$. Имеет место включение $\tilde{H}_m^n \subset H_m^n \subset L(n, K)$, причем $\tilde{H}_m^n$ есть нормальный делитель H_m^n. Представление, индуцированное на H_m^n единичным представлением $\tilde{H}_m^n$ есть регулярное представление факторгруппы $H_m^n / \tilde{H}_m^n \approx L(m, K)$, распространенное на H_m^n и оно распадается в прямую сумму (с надлежащими кратностями) всех представлений $\tilde{\Delta}$, где Δ — неприводимые представления группы $L(m, K)$. Поэтому представление δ, индуцированное на $L(n, K)$ единичным представлением группы $\tilde{H}_m^n$ есть прямая сумма (с теми же кратностями) поднятых представлений $\lambda_m^n \Delta$, где Δ — все неприводимые представления $L(m, K)$. Тем самым, неприводимые составляющие представления δ суть те и только те представления $L(n, K)$, которые содержатся в представлениях $\lambda_m^n \Delta$, что и требовалось доказать.

Нетрудно выяснить, что представляют собой те неприводимые представления Δ группы $L(m, K)$, в подъеме которых содержится данное представление D группы $L(n, K)$. Именно, ограничим D на группу H_m^n и разложим получившееся представление на неприводимые. Некоторые из них при ограничении на $\tilde{H}_m^n$ не будут содержать единичное, некоторые будут. Но $\tilde{H}_m^n$ есть нормальный делитель группы H_m^n. Поэтому, если ограничение некоторого неприводимого представления группы H_m^n на $\tilde{H}_m^n$ содержит единичное представление, то оно превращается в единичную матрицу на $\tilde{H}_m^n$, т. е. его можно рассматривать как естественное продолжение $\tilde{\Delta}$ на H_m^n представления Δ факторгруппы $H_m^n / \tilde{H}_m^n \approx L(m, k)$. Ясно, что D будет содержаться в подъеме тех и только тех Δ, для которых $\tilde{\Delta}$ содержится в ограничении D на H_m^n.

Группы $\tilde{H}_m^n$ упорядочены по включению:

$$L(n, K) = \tilde{H}_0^n \supset \tilde{H}_1^n \supset \cdots \supset \tilde{H}_{n-1}^n \supset \tilde{H}_n^n = (E).$$

Поэтому, если единичное представление содержится в ограничении представления D группы $L(n, K)$ на группу $\tilde{H}_m^n$, то единичное представление содержится и в ограничениях на все $\tilde{H}_k^n$ при $k \geqslant m$. Наименьшее m, обладающее этим свойством, назовем *глубиной* представления. Единичное представление и только оно обладает глубиной 0.

4°. Алгебра матриц, коммутирующих с матрицами поднятого представления. Пусть матрица $B = \sum_{P_i, P_j} B_{P_i, P_j} \times$ $\times\, e_{P_i, P_j}$, разбитая на квадратные клетки B_{P_i, P_j}, коммутирует с матрицами представления $\lambda_m^n \Delta$. Очевидно, что условие коммутирования равносильно следующей системе соотношений между клетками:

$$B_{AP_i, AP_j} = \Delta(\alpha(A, P_i))\, B_{P_i, P_j}\, \Delta^{-1}(\alpha(A, P_j)). \qquad (3)$$

Эти соотношения показывают, что как только известна некоторая клетка B_{P_i, P_j}, так однозначно определяются все клетки B_{AP_i, AP_j}. Все пары (P_i, P_j) разбиваются на траектории (AP_i, AP_j). Ясно, что две пары (P_i, P_j) и (P_k, P_l) принадлежат одной траектории в том и только в том случае, если $\dim P_i \cap P_j = \dim P_k \cap P_l$. Число различных траекторий равно поэтому $m+1$.

Для дальнейшего целесообразно остановиться на некотором каноническом выборе базисов в m-мерных подпространствах P пространства столбцов S_n. Именно, будем считать, что номера первых сверху ненулевых элементов столбцов строго возрастают слева направо, все эти элементы равны 1, и все элементы строки, предшествующие верхнему ненулевому элементу столбца равны 0. Ясно, что любая $n \times m$ матрица с линейно независимыми столбцами может быть приведена к такому виду посредством линейного комбинирования столбцов и такое приведение единственно.

Рассмотрим подробнее клетку B_{P_1, P_2}, считая

$$\overline{P}_1 = \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & E_{m-f} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{P}_2 = \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E_{m-f} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(разбиение на клетки одинаковое, так что размеры всех клеток очевидны). Ясно, что $\dim (P_1 \cap P_2) = f$.

Равенства $AP_1 = P_1$ и $AP_2 = P_2$ будут одновременно иметь место тогда и только тогда, когда матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \tag{4}$$

(при разбиении на клетки согласованном с предыдущим, так что A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}—квадратные невырожденные матрицы порядков f, $m-f$, $m-f$, $n-2m+f$ соответственно). В этом предположении

$$A\overline{P}_1 = \overline{P}_1 \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ и } A\overline{P}_2 = \overline{P}_2 \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, соотношение (3) дает

$$B_{P_1, P_2} = \Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} B_{P_1, P_2} \Delta^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Положив $A_{11} = E_f$, $A_{33} = E_{m-f}$, $A_{13} = 0$, получим

$$B_{P_1, P_2} = \Delta \begin{pmatrix} E_f & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \cdot B_{P_1, P_2}.$$

Это значит, что если $B_{P_1, P_2} \neq 0$, то ненулевые столбцы матрицы B_{P_1, P_2} принадлежат подпространству, инвариантному для ограничения представления Δ на подгруппу матриц $\widetilde{H}_f^m = \left\{\begin{pmatrix} E_f & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\right\}$, и на этом подпространстве ограничение представления обращается в единичное.

Далее, положив $A_{12} = A_{13}$, $A_{22} = A_{33}$, получим

$$\Delta\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} B_{P_1, P_2} = B_{P_1, P_2} \Delta\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

что означает, что клетка B_{P_1, P_2} перестановочна с ограничением представления Δ на подгруппу $H_f^m = \left\{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\right\}$. Допустим, что базис в модуле представления Δ выбран так, что ограничение Δ на H_f^m разбивается на неприводимые части. Некоторые из них $\delta_1, \cdots, \delta_s$ обращаются в единичные матрицы на $\widetilde{H}_f^m$, остальные не содержат единичного представления на $\widetilde{H}_f^m$. Тогда $B_{P_1, P_2} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где C—матрица, коммутирующая с матрицами представления $\delta_1 \oplus \cdots \oplus \delta_s$. Легко видеть, что любая матрица такого вида может быть принята за клетку B_{P_1, P_2}.

Отметим некоторые следствия. Прежде всего, неравенство $B_{P_1, P_2} \neq 0$ возможно только, если $f = \dim P_1 \cap P_2$ не меньше глубины представления Δ. В частности, если глубина Δ равна m, то отличными от нуля могут быть только диагональные блоки. Далее, диагональные блоки все скалярные, если Δ—неприводимое представление, ибо B_{P_1, P_1} коммутирует со всеми матрицами представления Δ. Остальные диагональные блоки B_{AP_1, AP_1} равны B_{P_1, P_1} в силу (3), так что они вместе составляют скалярную матрицу.

5°. Свойства матрицы π_Δ.

Предложение 3. *Матрица π_Δ коммутирует с матрицами представления $\lambda_m^n \Delta$.*

Доказательство. Матрица π_Δ составлена из блоков

$$C_{P_i, P_j} = \sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q}' \overline{P}_i) \Delta(\overline{Q}' \overline{P}_j).$$

Ясно, что каждое слагаемое не зависит от выбора базиса в пространствах Q'. Поэтому

$$C_{P_i, P_j} = \sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q}' A\overline{P}_i) \Delta(\overline{Q}' AP_j),$$

ибо Q' и $Q'A$ одновременно пробегают все m-мерные подпространства пространства S_n^*. Далее

$$C_{AP_i\, AP_j} = \sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q}' \overline{AP}_i) \Delta(\overline{Q}' \overline{AP}_j) =$$

$$= \sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q}' A\overline{P}_i (\alpha(A, P_i))^{-1}) \Delta(\overline{Q}' A\overline{P}_j (\alpha(A, P_j))^{-1}) =$$

$$= \Delta(\alpha(A, P_i)) \cdot \sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q}' A\overline{P}_i)\, \Delta\, (\overline{Q}' A\overline{P}_j) \cdot \Delta^{-1}(\alpha(A, P_j)) =$$

$$= \Delta(\alpha(A, P_i))\, C_{P_i, P_j}\, \Delta^{-1}(\alpha(A, P_j)).$$

Таким образом, матрица π_Δ удовлетворяет соотношениям коммутирования (3), что и требовалось доказать.

Следствие. Если глубина представления Δ равна m, то матрица π_Δ невырождена. Действительно, в силу сказанного в конце 4° она скалярна. Кроме того, как отмечалось выше, π_Δ всегда отлична от нулевой матрицы. Следовательно, $\pi_\Delta = aE$ при $a \neq 0$.

Таким образом, для нас в дальнейшем будут представлять интерес только те неприводимые представления Δ группы $L(m, K)$, глубина которых меньше m.

Вычислим теперь клетки C_{P_i, P_j}, из которых составлена матрица π_Δ, исходя из описанного выше канонического выбора базисов в подпространствах P. Будем считать, что матрицы $\overline{Q}'$ транспонированы с каноническими.

Пусть

$$\overline{P}_1 = \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & E_{m-f} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{P}_2 = \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E_{m-f} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что произведение $\overline{Q}'\,\overline{P}_1$ будет невырожденной матрицей, только если первые m столбцов матрицы $\overline{Q}'$ составляют невырожденную матрицу, а тогда, в силу канонического выбора, матрица $\overline{Q}'$ имеет вид $\begin{pmatrix} E_f & 0 & B_1, & B_3 \\ 0 & E_{m-f} & B_2 & B_4 \end{pmatrix}$. Поэтому $\overline{Q}'\,\overline{P}_1 = E_m$, $\overline{Q}'\,\overline{P}_2 = \begin{pmatrix} E_f & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица B_2 невырожденная и

$$C_{P_1, P_2} = q^{m(n-2m+f)}\, \Lambda_f, \tag{7}$$

где

$$\Lambda_f = \sum_{B_1, B_2} \Delta \begin{pmatrix} E_f, & B_1 \\ 0, & B_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В этом равенстве B_1 пробегает все $f \times (m-f)$-матрицы, B_2 — все невырожденные матрицы порядка $m-f$. Множитель $q^{m(n-2m+f)}$ равен числу возможностей для матриц B_3, B_4.

В частности, диагональные блоки равны $q^{m(n-m)} E$, где E—единичная матрица, порядок которой равен степени представления Δ.

В общем случае, матрица Λ_f подобна матрице

$$q^{\frac{(m-f)(m+f-1)}{2}} (q^{m-f}-1) \cdots (q-1) \cdot \begin{pmatrix} E_{\nu(f, \Delta)}, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Здесь $\nu(f, \Delta)$ равно числу вхождений единичного представления в ограничение Δ на подгруппу $\widetilde{H}_f^m$. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно разложить ограничение Δ на $\tilde{H}_f^m$ на неприводимые составляющие и заметить, что порядок группы $\tilde{H}_f^m$ равен

$$q^{f(m-f)}(q^{m-f}-1)(q^{m-f}-q)\cdots(q^{m-f}-q^{m-f-1}).$$

Вычислим теперь след квадрата матрицы π_Δ.

Предложение 4.

$$S_p\,\pi_\Delta^2=\sum_{f=0}^{m} q^{2mn-2m^2-m+f}\cdot\frac{\Pi_n(q)\cdot\nu(f,\Delta)}{\Pi_f(q)\,\Pi_{n-2f+m}(q)}.$$

Здесь $\Pi_r(q)=(q^r-1)\cdots(q-1)$.

Доказательство. $S_p\,\pi_\Delta^2=\sum\limits_{P_i,P_j} S_p\,C_{P_i,P_j}\,C_{P_j,P_i}$.

Разобьем полную сумму на суммы по траекториям пар. Имеем, согласно предложению 3

$$C_{AP_i,AP_j}=\Delta(\alpha(A,P_i)C_{P_i,P_j}\Delta^{-1}(\alpha(A,P_j)),$$

$$C_{AP_j,AP_i}=\Delta(\alpha(A,P_j))\,C_{P_j,P_i}\,\Delta^{-1}(\alpha(A,P_i)).$$

Следовательно

$$C_{AP_i,AP_j}\,C_{AP_j,AP_i}=\Delta(\alpha(A,P_i))\,C_{P_i,P_j}\,C_{P_j,P_i}\,\Delta^{-1}(\alpha(A,P_i)),$$

откуда следует, что следы матриц $C_{P_i,P_j}\,C_{P_j,P_i}$ одинаковы, пока пары (P_i,P_j) пробегают одну траекторию. Вклад от одной траектории, характеризующейся равенством $\dim P_i\cap P_j=f$, составляет

$$T_m^n(f)\cdot S_p\,C_{P_1,P_2}\,C_{P_2,P_1}.$$

Здесь (P_1,P_2)—какая-либо пара на изучаемой траектории, $T_m^n(f)$—число пар на траектории.

Возьмем, как и раньше

$$\overline{P}_1=\begin{pmatrix}E_f & 0\\ 0 & E_{m-f}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \overline{P}_2=\begin{pmatrix}E_f & 0\\ 0 & 0\\ 0 & E_{m-f}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Положим

$$A=\begin{pmatrix}E_f & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_{m-f} & 0\\ 0 & E_{m-f} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E_{n-2m+f}\end{pmatrix}.$$

Тогда $A\overline{P}_1=\overline{P}_2$, $A\overline{P}_2=\overline{P}_1$, так что $\alpha(A,P_1)=\alpha(A,P_2)=1$ и $C_{P_1,P_2}=C_{P_2,P_1}$. Поэтому

$$S_p\,C_{P_1,P_2}\,C_{P_2,P_1}=S_p\,C_{P_1,P_2}^2=q^{2m(n-2m+f)+(m-f)(m+f-1)}\cdot\Pi_{m-f}^2(q)\cdot\nu(f,\Delta).$$

Осталось подсчитать $T_m^n(f)$. Это число равно индексу стационарной для пары (P_1,P_2) подгруппы в полной линейной группе $L(n,K)$

Порядок $L(n, K)$ равен $\Pi_n(q)\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, причем второй множитель есть порядок силовской p-подгруппы. Стационарная подгруппа, матрицы которой имеют вид (4), имеет индекс $q^{(m-f)^2}$ в квазитреугольной группе матриц вида

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}$$

с диагональными клетками порядков f, $m-f$, $m-f$, $n-2m+f$. Группа эта содержит силовскую p-подгруппу группы $L(n, K)$ и ее порядок равен $\Pi_f(q)\,\Pi^2_{m-f}(q)\,\Pi_{n-2m+f}(q)\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Таким образом

$$T^n_m(f)=\frac{\Pi_n(q)}{\Pi_f(q)\,\Pi^2_{m-f}(q)\,\Pi_{n-2m+f}(q)}\cdot q^{(m-f)^2},$$

и вклад в $S_p\pi^2_\Delta$ от рассматриваемой траектории составляет

$$\frac{\Pi_n(q)}{\Pi_f(q)\,\Pi_{n-2m+f}(q)}\cdot q^{2m(n-m)-m^2+f}\cdot\nu(\Delta, f), \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

6°. **Подъем единичного представления.** Поднятое единичное представление есть группа подстановок S^n_m, которые претерпевают m-мерные подпространства пространства S_n под действием элементов группы $L(n, K)$. Порядок матриц этого представления равен $N^n_m=\dfrac{\Pi_n(q)}{\Pi_m(q)\,\Pi_{n-m}(q)}$. Алгебра матриц, коммутирующих с матрицами этого представления, есть, очевидно

$$\mathfrak{M}^n_m=\{c_0U_0+c_1U_1+\cdots+c_mU_m\}, \tag{11}$$

где

$$U_f=\sum_{\dim P_i\cap P_j=f} e_{P_i,P_j}. \tag{12}$$

Ясно, что представление S^n_m эквивалентно представлению S^n_{n-m} и, соответственно, алгебра $\mathfrak{M}^n_m$ изоморфна алгебре $\mathfrak{M}^n_{n-m}$, поэтому мы будем считать $m\leqslant\dfrac{n}{2}$. В этом предположении все матрицы U_f, начиная с U_0, имеют смысл, и ранг алгебры $\mathfrak{M}^n_m$ равен $m+1$.

Имеем

$$U_{f_1}\cdot U_{f_2}=\sum_{\substack{\dim P_i\cap P_j=f_1\\ \dim P_j\cap P_l=f_2}} e_{P_i,P_k}=\sum\mu(P_i, P_k)\,e_{P_i,P_k},$$

где $\mu(P_i, P_k)$ равно числу подпространств P_j, имеющих с P_i пересечение размерности f_1, и с P_k—пересечение размерности f_2. Ясно, что

$\mu(P_i, P_k)$ зависит лишь от размерности $P_i \cap P_k$, так что можно записать

$$U_{f_1} \cdot U_{f_2} = \sum_{f_3} n^{f_3}_{f_1, f_2} U_{f_3},$$

где $n^{f_3}_{f_1, f_2}$ равно $\mu(P_i, P_k)$ для каких-либо P_i, P_k, имеющих f_3-мерное пересечение. Из этого описания следует, что $n^{f_3}_{f_1, f_2} = n^{f_3}_{f_2, f_1}$, т. е. алгебра $\mathfrak{M}^n_m$ коммутативна. Поэтому представление S^n_m разлагается в прямую сумму $m+1$ неприводимых представлений.

Введем в рассмотрение модуль R^n_m представления S^n_m с базисом $\{e_{P_i}\}$. Обозначим через Q_j подпространства размерности $m-1$ пространства S_n и положим $e_{Q_j} = \sum_{P_i \supset Q_j} e_{P_i}$.

Предложение 5. *При $m \leqslant \frac{n+1}{2}$ векторы e_{Q_j} линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\sum C_{Q_j} e_{Q_j} = 0$. Это равенство равносильно $\sum_{P_i} \left(\sum_{Q_j \subset P_i} C_{Q_j}\right) e_{P_i} = 0$ и, в силу того, что e_{P_i} линейно независимы, $\sum_{Q_j \subset P_i} C_{Q_j} = 0$ при всех P_i.

Пусть Q—одно из Q_j. Обозначим через T_f, $0 \leqslant f \leqslant m-1$, множество таких Q_j, что $\dim Q \cap Q_j = f$. Пусть $Q_j \in T_f$ и $P_i \supset Q_j$. Тогда $\dim P_i \cap Q = f$ или $\dim P_i \cap Q = f+1$. Обозначим число таких P_i через α_f и β_f соответственно. В силу условия $(m-1)+m \leqslant n$, обе возможности для P_i реализуются при любом f, начиная с $f=0$, так что $\alpha_f > 0$; $\beta_f > 0$. Ясно, что α_f и β_f не зависят ни от выбора Q, ни от выбора Q_j (внутри T_f). Обозначим через $\widetilde{T}_f$ множество таких P_i, что $\dim Q \cap P_i = f$. Если $P_i \in \widetilde{T}_f$ и $Q_j \subset P_i$, то $Q_j \in T_f$ или $Q_j \in T_{f-1}$.

Просуммируем равенства $\sum_{Q_j \subset P_i} C_{Q_j} = 0$ по всем $P_i \in \widetilde{T}_f$. Получим, после перегруппировки слагаемых

$$\sum_{Q_j \in T_{f-1}} C_{Q_j} \left(\sum_{\substack{P_i \in \widetilde{T}_f \\ P_i \supset Q_j}} 1 \right) + \sum_{Q_j \in T_f} C_{Q_j} \left(\sum_{\substack{P_i \in \widetilde{T}_f \\ P_i \supset Q_j}} 1 \right) = 0$$

или, согласно определениям чисел α_f и β_f

$$\beta_{f-1} \sum_{Q_j \in T_{f-1}} C_{Q_j} + \alpha_f \sum_{Q_j \in T_f} C_{Q_j} = 0.$$

Заметим, что при $f=m-1$ множество T_f состоит из одного единственного элемента Q. Таким образом,

$$\alpha_{m-1} C_Q + \beta_{m-2} \sum_{Q_j \in T_{m-2}} C_{Q_j} = 0,$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\alpha_1 \sum_{Q_j \in T_1} C_{Q_j} + \beta_0 \sum_{Q_j \in T_0} C_{Q_j} = 0,$$

$$\alpha_0 \sum_{Q_j \in T_0} C_{Q_j} = 0,$$

откуда заключаем, что $C_Q = 0$. Так как Q было произвольным, все $C_{Q_j} = 0$, что и требовалось доказать.

Подпространство, натянутое на $\{e_{Q_j}\}$, очевидно инвариантно и, как модуль для $L(n, K)$, изоморфно модулю представления S^n_{m-1}. Поэтому справедливо следующее.

Предложение 6. *При $m \leqslant \frac{n}{2}$ представление S^n_m содержит представление S^n_{m-1} и дополнительное представление T^n_m неприводимо.*

Действительно, первое утверждение ясно из предшествующего. Второе—из подсчета числа неприводимых слагаемых в S^n_m и S^n_{m-1}.

Следствие. $S^n_m = T^n_0 \oplus T^n_1 \oplus \cdots \oplus T^n_m$, при $m \leqslant \frac{n}{2}$. Степень представления T^n_m равна

$$N^n_m - N^n_{m-1} = \frac{\Pi_n(q)}{\Pi_m(q)\,\Pi_{n-m}(q)} - \frac{\Pi_n(q)}{\Pi_{m-1}(q)\,\Pi_{n-m+1}(q)} =$$

$$= \frac{\Pi_n(q)}{\Pi_m(q)\,\Pi_{n-m+1}(q)} \cdot q^m \cdot (q^{n-2m+1} - 1).$$

7°. Дважды поднятое представление. Пусть $f < m < n$ и δ—представление группы $L(f, K)$. Представление $\lambda^n_m(\lambda^m_f \delta)$ есть, согласно [3], $(\delta \circ 1_{m-f}) \circ 1_{n-m}$. В силу ассоциативности действия $\circ$, оно эквивалентно результату тройной композиции $\delta \circ 1_{m-f} \circ 1_{n-m}$ и может быть интерпретировано следующим образом. Рассмотрим пары пространств $Q_l < P_l$, $\dim Q_j = f$, $\dim P_l = m$, составляющие „флаги“ F_k. Тогда $D = \delta \circ 1_{m-f} \circ 1_{n-m}$ есть представление, сопоставляющее элементу $A \in L(n, K)$ матрицу

$$D(A) = \sum_{F_k} \delta(\alpha(A, Q_l)) \times e_{AF_k, F_k};$$

при этом $Q_l \in F_k$ и $\alpha(A, Q_l) \in L(f, K)$, $\overline{AQ_j} = \overline{AQ_j} \cdot \alpha(A, Q_l)$.

Можно указать явные формулы, дающие изоморфизм модулей представлений $\lambda^n_m(\lambda^m_f \delta)$ и D, но они нам здесь не будут нужны.

Предложение 7. *Представление $\lambda^n_m(\lambda^m_f \delta)$ содержит представление $\lambda^n_f \delta$.*

Доказательство. Модуль представления для D есть тензорное произведение модуля R представления δ и пространства, натянутого на векторы e_{F_k}, нумерованные флаги F_k. Положим $e_{Q_l}=\sum\limits_{F_k \supset Q_l} e_{F_k}$. Векторы e_{Q_l} линейно независимы. Очевидно, что произведение пространства R на пространство, натянутое на $\{e_{Q_l}\}$, инвариантно для матриц представления D и на нем D действует как представление $\lambda_f^n \delta$, что и требовалось доказать.

Предложение 8. *Пусть $f<m<n$. Дважды поднятое единичное представление группы $L(f, K)$ содержит однократно поднятое единичное представление группы $L(m, K)$ и однократно поднятое единичное представление группы $L(f, K)$, с исключенным единичным представлением.*

Доказательство. Модуль для дважды поднятого единичного представления является пространство, натянутое на базисные векторы e_{F_k}, занумерованные флагами, и эти векторы переставляются как флаги при действии $A \in L(n, K)$:

$$D(A)=\sum_{F_k} e_{AF_k, F_k}.$$

Положим $e_{Q_l}=\sum\limits_{F_k \ni Q_l} e_{F_k}$ и $e_{P_l}=\sum\limits_{F_k \ni P_l} e_{F_k}$.

Покажем, что между векторами e_{Q_l} и e_{P_l} имеется единственная линейная зависимость $\sum\limits_{Q_l} e_{Q_l}=\sum\limits_{P_l} e_{P_l}$. Действительно, пусть $\sum\limits_{Q_l} C_{Q_l} e_{Q_l}+ +\sum\limits_{P_l} d_{P_l} e_{P_l}=0$. Это равносильно $\sum\limits_{Q_l} C_{Q_l} \sum\limits_{F_k \ni Q_l} e_{F_k}+\sum\limits_{P_l} d_{P_l} \sum\limits_{F_k \ni P_l} e_{F_k}=0$, откуда $C_{Q_l}+d_{P_l}=0$, как только Q_l и P_l составляют флаг, то есть $Q_l \subset P_l$. Из этих равенств легко заключить, что все C_{Q_l} и d_{P_l} равны между собой, что и приводит к единственной линейной зависимости $\sum\limits_{Q_l} e_{Q_l}- -\sum\limits_{P_l} e_{P_l}=0$.

Подпространство, натянутое на $\{e_{Q_l}\}$, инвариантно и на нем действует представление, поднятое от единичного представления группы $L(f, K)$. Подпространство, натянутое на $\{e_{P_l}\}$ тоже инвариантно и на нем действует представление, поднятое от единичного представления группы $L(m, K)$. Их пересечение одномерно и на нем действует единичное представление. Тем самым, предложение доказано.

8°. Представления группы $L(2, K)$, глубина которых меньше 2. Применим выполненные выше исследования к случаю $m=2$. Группа $L(2, K)$ имеет, как известно, q^2-1 неприводимых представлений. Интересны для нас только те, глубина которых меньше 2. Все они содержатся в представлениях, поднятых от представлений группы $L(1, K)$, которая есть мультипликативная группа поля K и имеет $q-1$ неприводимых представлений $\chi_0=1, \chi_1, \cdots, \chi_{q-2}$. Все они имеют степень 1. Глубина представлений $\chi_1, \cdots, \chi_{q-2}$ равна 1, и поднятые от них представления $\delta_l=\lambda_1^2 \chi_l$ неприводимы. Степени этих представлений равны $q+1$. Представление же $\tilde{\lambda}^2_0$ состоит из двух неприводимых слагаемых—единичного представления и представления T_1^2 степени q. Таким образом, имеется только q неприводимых представлений глубины $\leqslant 1$ — это единичное представление, представления δ_i, $i=1,\cdots,q-2$ и представление T_1^2.

9°. **Матрица π_Δ в случае единичного представления группы $L(2, k)$.** Из формул (7), (8) следует, что при $n\geqslant 4$

$$\pi_\Delta = q^{2n-7}(q-1)(q^2-1)\,U_0+q^{2n-5}(q-1)\,U_1+q^{2n-4}\,U_2$$

в обозначениях 6°. Алгебра $\mathfrak{M}_2^n$ имеет три гомоморфизма $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ в поле комплексных чисел. Их кратности равны 1,

$$\frac{q^n-1}{q-1}-1 \quad \text{и} \quad \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}-\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Первый из этих гомоморфизмов легко найти, для чего следует воспользоваться тем, что $U_0+U_1+U_2=w=\begin{pmatrix}1,\cdots,1\\ \cdots\cdots\\ 1,\cdots,1\end{pmatrix}$. Матрица w имеет собственные значения $\dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ и 0, с кратностями 1 и $\dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}-1$ соответственно. Ясно, что первое из них есть $\varphi_0(w)$, а $\varphi_1(w)=\varphi_2(w)=0$. Далее, $U_1w=aw$, где a равно числу ненулевых элементов в строке матрицы U_1, которое равно, в свою очередь, числу 2-мерных подпространств S^n, имеющих с данным подпространством одномерное пересечение. Легко видеть, что оно равно $(q+1)\cdot\left(\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}-1\right)=$ $=\dfrac{(q+1)(q^{n-2}-1)\,q}{q-1}$. Поэтому $\varphi_0(U_1)=\dfrac{(q+1)(q^{n-2}-1)\,q}{q-1}$. Далее $U_2=E$, так что $\varphi_0(U_2)=\varphi_1(U_2)=\varphi_2(U_2)=1$, а $\varphi_0(U_0)=\varphi_0(w)-\varphi_0(U_1)-\varphi_0(U_2)=$ $=\dfrac{q^4(q^{n-3}-1)(q^{n-2}-1)}{(q-1)(q^2-1)}$.

Для вычисления гомоморфизмов φ_1 и φ_2 найдем, согласно 6°, $U_1^2=\overset{0}{n}_{11}U_0+\overset{1}{n}_{11}U_1+\overset{2}{n}_{11}U_2$. Здесь $\overset{0}{n}_{11}$ равно числу 2-мерных подпространств S_n, пересекающихся по одномерным подпространствам с данными 2-мерными подпространствами, пересекающимися по O. Это число равно, очевидно, $(q+1)^2$. Далее, $\overset{1}{n}_{11}$ равно числу двумерных подпространств, имеющих одномерные пересечения с двумя данными 2-мерными, имеющими одномерное пересечение. Интересующие нас подпространства могут проходить через пересечение данных, могут не проходить. Раздельный подсчет в этих двух случаях дает $\overset{1}{n}_{11}=\left(\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}-2\right)+q^2$.

Наконец, $\overset{2}{n}_{11}$ есть число двумерных подпространств, имеющих одномерное пересечение с данным двумерным подпространством. Легко видеть, что $n_{11}^2=(q+1)\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-1\right)$.

Итак, $U_1^2=(q+1)^2 U_0+\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-2+q^2\right) U_1+(q+1)\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-\right.$ $\left.-1\right) U_2=(q+1)^2 w+\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-3-2q\right) U_1+(q+1)\frac{q^{n-1}-q^2-q+1}{q-1} E.$

Обозначив $\varphi_1(U_1)=z_1$, $\varphi_2(U_1)=z_2$, получим, что z_1 и z_2 являются корнями квадратного уравнения

$$z^2-\frac{q^{n-1}-2q^2-q+2}{q-1}z-(q+1)\frac{q^{n-1}-q^2-q+1}{q-1}=0,$$

откуда $z_{1,2}=-1-q;\ \frac{q^{n-1}-q^2-q+1}{q-1}$.

Сравнение следа матрицы U_1 с суммой собственных значений, с учетом кратностей, дает, что $\varphi_1(U_1)=\frac{q^{n-1}-q^2-q+1}{q-1}$, $\varphi_2(U_1)=$ $=-1-q$. Далее, $\varphi_1(U_0)=-\varphi_1(U_1)-1=-\frac{q^{n-1}-q^2}{q-1}$, $\varphi_2(U_0)=-\varphi_2(U_1)-$ $-1=q$. Наконец, для $\pi_\Delta=q^{2n-7}(q-1)(q^2-1)U_0+q^{2n-5}(q-1)U_1+$ $+q^{2n-4}U_2$ имеем

$$\varphi_0(\pi_\Delta)=q^{4n-8};\ \varphi_1(\pi_\Delta)=q^{3n-8};\ \varphi_2(\pi_\Delta)=q^{2n-6}.$$

Таким образом, все три собственных значения матрицы π_Δ отличны от 0 и, следовательно, π_Δ невырождена.

Остается рассмотреть случай $n=3$. В этом случае U_0 отсутствует, $\pi_\Delta=q(q-1)U_1+q^2U_2$, $U_2=E$, $U_1+U_2=w=\begin{pmatrix}1,\cdots,1\\ \cdots\cdots\\ 1,\cdots,1\end{pmatrix}$, собственные значения w равны q^2+q+1 и 0 с кратностями 1 и q^2+q. Соответственно, собственные значения $\varphi_0(U_1)$ и $\varphi_1(U_1)$ для U_1 равны q^2+q и -1 с теми же кратностями. Для $\pi_\Delta=q(q-1)U_1+q^2E$ имеем: $\varphi_0(\pi_\Delta)=q^4$, $\varphi_1(\pi_\Delta)=q$, так что π_Δ невырождена.

10°. **Матрица π_Δ для $\Delta=\delta_l$.** Представление $\delta_l=\lambda_1^2\chi_l$ однократно содержится в представлении, индуцированном единичным представлением группы $\widetilde{H}_1^2$. Поэтому и ограничение δ_l на $\widetilde{H}_1^2$ содержит единичное представление один раз и матрицы, коммутирующие с матрицами представления $\lambda_2^n\delta_l$ имеют вид $xE+yU$, $x, y\in C$, где U—матрица, отвечающая траектории пар (P_i, P_j), при $\dim P_i\cap P_j=1$. Таким образом, ранг коммутаторной алгебры для представления $\lambda_2^n\delta_l$ равен 2 и $\lambda_2^n\delta_l$ состоит из двух неприводимых представлений, входящих однократно. Одно из них, согласно предложению 7, есть $\lambda_1^n\chi_l$, его степень равна $\frac{q^n-1}{q-1}$. Следовательно, степень второго равна

$$(q+1)\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}-\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{(q^n-1)(q^{n-2}-1)q}{(q-1)^2}.$$

Соответственно, кратности гомоморфизмов коммутаторной алгебры равны $\frac{q^n-1}{q-1}$ и $\frac{(q^n-1)(q^{n-2}-1)\,q}{(q-1)^2}$. Обозначим через α и β собственные значения матрицы π_Δ. Диагональные блоки этой матрицы составляют $q^{2n-4}E$, матрица $U=\pi_\Delta-q^{2n-4}E$ содержит ненулевые блоки, соответствующие траектории пар подпространств с одномерным пересечением. Обозначим через α_1 и β_1 собственные значения матрицы U. Очевидно, что $Sp\,U=0$. Далее, по формуле (10),

$$SpU^2=\frac{\Pi_n(q)}{\Pi_1(q)\Pi_{n-3}(q)}\cdot q^{4n-9}.$$

Следовательно, α_1 и β_1 удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{q^n-1}{q-1}\,\alpha_1+\frac{(q^n-1)(q^{n-2}-1)\,q}{(q-1)^2}\beta_1=0,$$

$$\frac{q^n-1}{q-1}\,\alpha_1^2+\frac{(q^n-1)(q^{n-2}-1)\,q}{(q-1)^2}\,\beta_1^2=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{q-1}\cdot q^{4n-9},$$

откуда $\beta_1=\pm(q-1)\,q^{2n-5}$, $\alpha_1=\mp(q^{n-2}-1)\,q^{2n-4}$. Это дает для α и β два варианта:

$$\beta=q^{2n-4}+(q-1)\,q^{2n-5};\ \alpha=-(q^{n-2}-2)\,q^{2n-4}$$

или

$$\beta=q^{2n-5};\ \alpha=q^{3n-6}.$$

Первый вариант отпадает при $q>2$ и при $q=2$, $n\geqslant4$, ибо собственное значение матрицы π_Δ не может быть отрицательным. Единственный сомнительный случай $q=2$, $n=3$ отпадает из-за того, что при $q=2$ изучаемые представления δ_l отсутствуют.

Итак, собственные значения матрицы π_Δ отличны от нуля и матрица π_Δ обратима и в этом случае.

11°. Матрица π_Δ^* для $\Delta=T_1^2$. Представление T_1^2 имеет глубину 1 и содержится в представлении, индуцированном единичным представлением группы $\widetilde{H}_1^2$, один раз, так что и ограничение T_1^2 на группе $\widetilde{H}_1^2$ содержит единичное представление один раз. Поэтому алгебра матриц, коммутирующих с матрицами представления $\lambda_2^n\,T_1^2$, имеет ранг 2 и само представление $\lambda_2^n\,T_1^2$ состоит из двух однократно входящих неприводимых представлений. Одно из них есть T_1^n. Действительно, $\lambda_1^2(1)=(1)\oplus T_1^2$, так что $\lambda_2^n(\lambda_1^2(1))=\lambda_2^n(1)\oplus\lambda_2^n\,T_1^2$. В силу предложения 8, представление $\lambda_2^n(\lambda_1^2(1))$ содержит сумму $\lambda_2^n(1)$ и $\lambda_1^n(1)$, с исключенным единичным представлением, то есть $\lambda_2^n(1)\oplus T_1^n$, так что $\lambda_2^n\,T_1^2$ действительно содержит T_1^n. Степень T_1^n равна $\frac{q^n-1}{q-1}-1$. Следовательно, степень второго неприводимого представления, входящего в $\lambda_2^n\,T_1^2$, равна

$$q\,\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}-\left(\frac{q^n-1}{q-1}-1\right)=\frac{q^3(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{(q^2-1)(q-1)}.$$

Далее, положим $\pi_\Delta=q^{2n-4}E+U$, выделив слагаемое U, соответствующее клеткам траектории с $\dim P_i\cap P_j=1$. Обозначим через α и β собственные значения матрицы π'_Δ, через α_1 и β_1— собственные значения матрицы U. Получим подобно предыдущему

$$\frac{q(q^{n-1}-1)}{q-1}\alpha_1+\frac{q^3(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{(q-1)(q^2-1)}\beta_1=0,$$

$$\frac{q(q^{n-1}-1)}{q-1}\alpha_1^2+\frac{q^3(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{(q-1)(q^2-1)}\beta_1^2=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{q-1}q^{4n-9},$$

откуда получаем значения для β_1 и α_1:

$$\beta_1=\pm(q^2-1)\,q^{2n},\quad \alpha_1=\mp(q^{n-2}-1)\,q^{2n-4}$$

и два варианта для α и β:

$$\beta=(q^2-1)\,q^{2n-6}+q^{2n-4},\quad \alpha=-(q^{n-2}-2)\,q^{2n-4}$$

или

$$\beta=q^{2n-6},\quad \alpha=q^{3n-6}.$$

Первый вариант отпадает при всех q и n, кроме, быть может, $q=2$ и $n=3$. В этом случае вычисление проводится непосредственно и оно показывает, что и здесь имеет место второй вариант.

Таким образом, мы снова получили, что собственные значения матрицы π_Δ отличны от 0.

Из всего сказанного следует, что полугруппа матриц ранга 2 над конечным полем имеет полупростую полугрупповую алгебру в поле нулевой характеристики и все ее абсолютно неприводимые представления просто связаны с представлениями группы $L(2, K)$.

В частности, полупростота полугрупповой алгебры имеет место для полугруппы всех матриц третьего порядка, ибо полугруппа $M_3^3\setminus M_2^3$ изоморфна группе $L(3, K)$ (с присоединением нуля), а полугруппа M_2^3 имеет, в силу результата настоящей работы, полупростую алгебру.

Ереванский государственный университет,
Ленинградское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 20.IX.1971

Բ. Մ. ԵԴԻԳԱՐՅԱՆ, Դ. Կ. ՖԱԴԴԵԵՎ. Վերջավոր դաշտի նկատմամբ 2 ռանգի մատրիցների կիսախմբի կոմպլեքս ներկայացումները (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է վերջավոր GF(q) *դաշտի նկատմամբ մատրիցների կիսախմբի կոմպլեքս ներկայացումները։*

Ուսումնասիրվող արդյունքները կիրառվում են 2 ռանգի մատրիցների կիսախմբի կիսախմբային հանրահաշվի կիսապարզության ապացուցելու համար։

B. M. EDIGARIAN, D. K. FADDEEV. *Complex representations of the semigroup of square matrices of rank* 2 *over the finite field* (summary)

Complex representations of semigroups of square matrices over the finite field are investigated. The results are applied to prove that the semigroup algebra for semigroup of matrices of rank two is semisimple.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. М. Едигарян.* Представления полугруппы квадратных матриц ранга один над конечным полем, Известия АН АрмССР, сер. „Математика", IV, № 3, 1969. 215—220.
2. *A. H. Clifford.* Matrix representations of completely simple semigroups, Amer· Journ. Math., 64, 1942, 327—342.
3. *J. A. Green.* The characters of the finite general linear groups, Trans. of the Amer. math. soc., 80, № 2, 1955, 402—407.