ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

Э. О. НАЗАРЯН

КВАЗИГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА C^n НА ПРОСТРАНСТВО C^m $(m\leqslant n)$, КОНФОРМНЫЕ НА КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ

В настоящей работе рассматриваются гладкие отображения области $G\subset C_z^n$ на область $G^*\subset C_w^m$ $(m\leqslant n)$, конформные на комплексных прямых. Построен, в замкнутой форме, класс квазиголоморфных отображений $B_0(n, m, k)$ (где k—ранг голоморфной части отображения), который в частном случае, когда $n=m=k$, совпадает с классом А. А. Шматкова (см. [4]).

§ 1. Постановка задачи

Пусть функции

$$T \quad w_i=f_i(z_1,\cdots,\overline{z}_n),\quad i=1,\cdots m,$$

определенные в области $G\subset C_z^n$ и удовлетворяющие там условию

$$\mathrm{Rang}\,\frac{\partial(w_1,\cdots,\overline{w}_m)}{\partial(z_1,\cdots,\overline{z}_n)}=2m, \tag{1.1}$$

осуществляют отображение области $G\subset C_z^n$ на область $G^*\subset C_w^m$. Пусть точке $Q\in G$ соответствует при этом отображении точка $Q^*\in G^*$. Перенесем начала координат пространств C_z^n и C_w^m соответственно в точки Q и Q^* и рассмотрим дифференциал отображения (T).

$$T_d \quad w=Az+B\overline{z},$$

где $w=(w_1,\cdots,w_m)'$, $z=(z_1,\cdots,z_n)'$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$,

$$i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n.$$

Здесь

$$a_{ij}=\frac{\partial w_i}{\partial z_j},\quad b_{ij}=\frac{\partial w_i}{\partial\overline{z}_j},$$

вычисленные в начале координат.

Матрицы A и B называют матрицами голоморфной и антиголоморфной частей отображения (T) в точке Q.

Из условия (1.1) следует, что

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix}A & B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix}=2m, \tag{1.2}$$

в силу чего ядро отображения (T_d) имеет действительную размерность, равную $2n-2m$.

В зависимости от размерности пересечения комплексной прямой

$$z = \omega t, \tag{1.3}$$

где $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)'$, t — комплексный параметр, с ядром отображения (T_d), удовлетворяющего условию (1.2), эта комплексная прямая при отображении (T_d) переходит или 1) в точку 0, если

$$A\omega = B\overline{\omega} = 0 \tag{1.4}$$

или 2) в действительную прямую $w = A\omega\tau$, где τ—действительный параметр, для чего необходимо и достаточно, чтобы

$$A\omega = \pm B\overline{\omega}, \tag{1.5}$$

либо 3) в действительно двумерную плоскость, определяемую уравнением

$$w = A\omega t + B\overline{\omega}\,\overline{t}. \tag{1.6}$$

Комплексная прямая $z = \omega t$, где ω удовлетворяет условиям (1.4) или (1.5), называется вырождающейся при отображении (T_d).

Рассмотрим окружность

$$\left\{z \in C_z^n;\ |z|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = R^2,\ z = \omega t\right\}.$$

Полагая $t = re^{i\varphi}$, уравнение этой окружности можно написать в ви де

$$z = \omega e^{i\varphi} |\omega|^{-1} R, \tag{1.7}$$

где

$$|\omega|^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\omega_k|^2\right)^{-1/2}.$$

Если комплексная прямая (1.3) вырождается, то окружности (1.7) при отображении (T_d) переходят или в точку или в отрезки прямой; в другом случае они переходят в эллипсы, определяемые уравнениями

$$w = (A\omega e^{i\varphi} + B\overline{\omega}\, e^{-i\varphi}) |\omega|^{-1} R.$$

Определение 1.1 Отображение

$$T \quad w_i = f_i(z_1, \cdots, \overline{z}_n),\ i = 1, \cdots, m$$

области $G \subset C_z^n$, удовлетворяющее там условию

$$\operatorname{Rang} \frac{\partial (w, \overline{w})}{\partial (z, \overline{z})} = 2m,$$

называется принадлежащим к классу квазиголоморфных отображений $B_Q(n, m, k)$ в точке $Q \in G$, если 1) дифференциал (T_d), вычисленный в точке Q, сохраняет окружности с центром в этой точке, лежащие на всех невырождающихся комплексных прямых и переводит в точки окружности с центром в точке Q, лежащие на всех вырождающихся комплексных прямых, 2) $\operatorname{Rang} A = k \leqslant m$.

Имеет место

Теорема 1.1. *Для того чтобы отображение* (T) *принадлежало к классу квазиголоморфных отображений* $B_Q(n, m, k)$, *для какого-либо* k, *в точке* Q, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$A'\overline{B} = \psi,$$

где ψ—*кососимметрическая матрица размерности* n.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $T \in B_Q(n, m, k)$. Возьмем произвольный вектор

$$\{\omega e^{i\varphi}\} = \{\omega_1 e^{i\varphi}, \cdots, \omega_n e^{i\varphi}\},$$

лежащий в плоскости $z = \omega t$ и рассмотрим искажение $\varkappa$ радиуса окружности (1.7) в направлении этого вектора. Тогда

$$\varkappa^2 = \frac{|w|^2}{|z|^2} = (A\omega e^{i\varphi} + B\overline{\omega}\, e^{-i\varphi})\,(\overline{A}\,\overline{\omega} e^{-i\varphi} + \overline{B}\omega e^{i\varphi})\,|\omega|^{-2} =$$

$$= [|A\omega|^2 + |B\overline{\omega}|^2 + (A\,\omega)'\,\overline{B}\omega e^{i2\varphi} + (B\overline{\omega})'\,\overline{A}\,\overline{\omega} e^{-i2\varphi}]\,|\omega|^{-2}. \qquad (1.8)$$

Поскольку $T \in B_Q\ (n, m, k)$, коэффициент $\varkappa$ не зависит от параметра φ и, следовательно,

$$(A\omega)'\overline{B}\omega = \omega' A'\,\overline{B}\,\omega = 0. \qquad (1.9)$$

Равенство (1.9) эквивалентно равенству

$$\omega' B^* A\omega = 0, \qquad (1.10)$$

которое получается транспонированием матрицы (1.9). Складывая равенства (1,9) и (1,10), получаем

$$\omega'\,(A'\,\overline{B} + B^* A)\,\omega = 0. \qquad (1.11)$$

В силу того, что $T \in B_Q\,(n, m, k)$, заключаем, что равенство (1.11) имеет место для любого ω; отсюда легко следует, что

$$A'\,\overline{B} + B^* A = 0, \qquad (1.12)$$

или

$$A'\overline{B} = \psi,$$

где ψ — некоторая кососимметрическая матрица.

2. Достаточность. Умножая равенство

$$A'\,\overline{B} = -B^* A$$

слева на строку ω', а справа—на столбец ω, получаем, что

$$\omega' A'\overline{B}\,\omega = -\,\omega' B^* A\omega$$

или

$$(A\omega)'\,\overline{B}\,\omega = -\,(A\omega)'\,\overline{B}\omega.$$

Отсюда следует, что

$$(A\omega)'\overline{B}\,\omega = 0. \qquad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.8), находим

$$\varkappa^2 = (|A\omega|^2 + |B\bar{\omega}|^2)\,|\omega|^{-2}.$$

Из (1.9) и последнего равенства следует, что $T \in B_Q(n, m, k)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $T \in B_Q(n, m\, k)$. Если при отображении (T_d) комплексные прямые вырождаются, то они вырождаются только в точку.

Действительно, подставляя (1.5) в (1.9), приходим к условию (1.4).

Прямым вычислением может быть доказана

Теорема 1.2. *Для того чтобы отображение (T) принадлежало к классу $B_Q(n, m, k)$ в точке Q, необходимо и достаточно, чтобы отображение (T_d) сохраняло углы между любыми векторами, принадлежащими к одной и той же невырождающейся комплексной прямой, проходящей через точку Q.*

§ 2. Вспомогательные рассмотрения

1. Известно (см. [3]), что для любой матрицы A размерности (m, n), из системы матричных равенств

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (AX)^* = AX,\ (XA)^* = XA$$

определяется единственная матрица X размерности (n, m), которая обозначается через A^+ и называется псевдообратной матрицей для матрицы A.

Рассмотрим матрицы A, B размерности (m, n) и кососимметрическую матрицу ψ размерности n. Имеет место

Лемма 2.1. *Если матрицы A и B удовлетворяют равенству*

$$A'\bar{B} = \psi, \tag{2.1}$$

то существует такая матрица U_1 размерности (m, n), что

$$\bar{B} = FA + (E - A'^{+} A')\,U_1, \tag{2.2}$$

где F—кососимметрическая матрица размерности m, определяемая равенством

$$F = A'^{+} \psi A^{+}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Из теоремы Пенроза (см. [2], теорема 1) следует, что для того чтобы существовало решение матричного уравнения

$$A'X = \psi, \tag{2.1'}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A'A'^{+}\psi = \psi. \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) эквивалентно равенству

$$\psi A^{+} A = \psi, \tag{2.5}$$

которое получается транспонированием матриц левой и правой частей равенства (2.4), при использовании условия кососимметричности матрицы ψ.

Тогда матрица X определяется формулой

$$X = A'^{+}\psi + (E - A'^{+}A')\,U, \tag{2.6}$$

где E—единичная матрица размерности m, а U—произвольная матрица размерности (m, n).

Так как матрица $\overline{B}$ удовлетворяет уравнению (2.1′), то из (2.6) следует, что существует такая матрица U_1, что

$$\overline{B} = A'^{+}\psi + (E - A'^{+}A')\,U_1. \tag{2.7}$$

Из условия (2.5) вытекает

$$A'^{+}\psi = A'^{+}\psi A^{+}A = FA, \tag{2.8}$$

где $F = A'^{+}\psi A^{-}$ — кососимметрическая матрица, что проверяется непосредственно.

Подставляя (2.8) в (2.7), мы завершаем доказательство леммы.

II. Пусть теперь

$$\operatorname{Rang} A = k, \tag{2.9}$$

где $0 \leqslant k \leqslant m$. Для определенности предположим, что k—минор

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots k \\ i_1 & i_2 \cdots i_k \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2.10}$$

В силу условий (2.9) и (2.10) существует матрица $\overline{\lambda}$ размерности $(m-k, k)$, для которой справедливо равенство

$$A_2 = \overline{\lambda} A_1. \tag{2.11}$$

Здесь A_1—матрица размерности (k, n), состоящая из первых k строк матрицы A, а A_2—матрица размерности $(m-k, n)$, состоящая из последних $(m-k)$ строк матрицы A.

Имея в виду равенство (2.11), мы можем написать, что

$$A = \left(\frac{E}{\lambda}\right) A_1, \tag{2.12}$$

где E—единичная матрица размерности k.

Теперь, учитывая условие (2.12), преобразуем равенство (2.2). Сначала докажем, что имеет место

Лемма 2.2. *Если U_2—матрица размерности $(m-k, m)$, состоящая из последних $(m-k)$ строк матрицы $E - A'^{+}A'$ и*

$$A = \left(\frac{E}{\lambda}\right) A_1,$$

то имеет место равенство

$$E - A'^{+}A' = \begin{pmatrix} -\lambda^{*} \\ E \end{pmatrix} U_2, \tag{2.13}$$

где матрица E (в правой части равенства)—единичная, размерности $(m-k)$.

Доказательство. Из определения псевдообратной матрицы следует, что

$$A'^{+} A' = (E\lambda^*)^{+} A_1^{'+} A_1' (E\lambda^*) = (E\lambda^*)^{+} (E\lambda^*) =$$

$$= \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} \left[(E\lambda^*) \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} \right]^{-1} (E\lambda^*) = \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} (\overline{D}, \overline{D}\lambda^*) = \begin{pmatrix} \overline{D}, & \overline{D}\lambda^* \\ \lambda\overline{D}, & \lambda\overline{D}\lambda^* \end{pmatrix},$$

где

$$\overline{D} = \left[(E\lambda^*) \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} \right]^{-1}.$$

Тогда имеем

$$E - A'^{+} A' = \begin{pmatrix} E-\overline{D}, & \overline{D}\lambda^* \\ \lambda\overline{D}, & E-\lambda\overline{D}\lambda^* \end{pmatrix},$$

и из матричных равенств

$$E-\overline{D} = \lambda^*\lambda\overline{D}, \quad -\overline{D}\lambda^* = -\lambda^* (E - \lambda\overline{D}\lambda^*),$$

которые проверяются непосредственно, заключаем, что

$$E - A'^{+} A' = \begin{pmatrix} -\lambda^* \\ E \end{pmatrix} (-\lambda^*\overline{D}, \; E - \lambda\overline{D}\lambda^*) = \begin{pmatrix} -\lambda^* \\ E \end{pmatrix} U_2.$$

Лемма доказана.

Подставляя (2.13) в соотношение (2.2), его можно написать в виде

$$\overline{B} = FA + \begin{pmatrix} -\lambda^* \\ E \end{pmatrix} U_3 \quad \text{или}$$

$$\overline{B} = F \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{\lambda} A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda^* \\ E \end{pmatrix} U_3, \tag{2.14}$$

где $U_3 = U_2 \cdot U_1$.

Поскольку матрица F кососимметрична, мы можем ее представить в виде

$$F = \begin{pmatrix} F_1, & -F_2' \\ F_2, & F_3 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

где F_1, F_3—кососимметрические матрицы размерностей соответственно k и $(m-k)$, а F_2—произвольная матрица размерности $(m-k, k)$.

Подставляя (2.15) в (2.14), получаем

$$\begin{aligned} \overline{B}_1 &= F_1 A_1 - F_2' \overline{\lambda} A_1 - \lambda^* U_3, \\ \overline{B}_2 &= F_2 A_1 + F_3 \overline{\lambda} A_1 + U_3, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $\overline{B}_1$—матрица размерности (k, n), состоящая из первых k строк матрицы $\overline{B}$, а $\overline{B}_2$—матрица размерности $(m-k, n)$, состоящая из последних $(m-k)$ строк матрицы $\overline{B}$.

Определяя U_3 из второго равенства условия (2.16) и подставляя в первое, находим, что

$$\overline{B}_1 = \overline{P} A_1 - \lambda^* \overline{B}_2,$$

где

$$\overline{P} = F_1 - F_2\overline{\lambda} + \lambda^* F_2 + \lambda^* F_3 \overline{\lambda}.$$

Из кососимметричности матриц F_1 и F_3 следует, что матрица P тоже кососимметрична.

Итак доказана

Лемма 2.3. *Пусть A, B—матрицы размерности (m, n), ψ—кососимметрическая матрица размерности n и*

$$A'\overline{B} = \psi, \quad \mathrm{Rang}\, A = k,$$

причем

$$A = \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} A_1.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \overline{\Phi} \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

где

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \overline{P}, & -\lambda^* \\ \overline{\lambda}, & 0 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

—кососимметрическая матрица размерности m.

Лемма 2.4. *Если*

$$\begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \overline{\Phi} \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

то

$$A'\overline{B} = \psi,$$

где ψ—кососимметрическая матрица размерности n.

Доказательство. Умножая равенство (2.17) слева на матрицу $\begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}'$, получим

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}' \overline{\Phi} \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}.$$

Так как в правой части этого равенства стоит кососимметрическая матрица, то

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$A_1'\overline{B}_1 + B_2^* A_2 + B_1^* A_1 + A_2'\overline{B}_2 = 0.$$

Последнее равенство можно написать в форме

$$(A_1', A_2') \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} + (B_1^*, B_2^*) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$A'\overline{B} + B^* A = 0.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобиться следующая

Лемма 2.5. *Пусть C—матрица размерности (m, n), и*

$$\operatorname{Rang} C = m, \tag{2.19}$$

а Φ_k $(k=1,\cdots, n)$—кососимметрические матрицы размерности m. Если

$$\Phi_i C_j = \Phi_j C_i \quad i<j;\ i, j=1,\cdots, n, \tag{2.20}$$

где C_j — j-ый столбец матрицы C, то матрицы Φ_k— нулевые.

Доказательство. В силу условия (2.19) существует m-минор матрицы C, отличный от нуля. Пусть

$$C\begin{pmatrix} 1\,2\cdots m \\ k_1 k_2\cdots k_m \end{pmatrix}\neq 0. \tag{2.19'}$$

Тогда, пользуясь леммой Шматкова (см. [4], стр. 488), получаем

$$\Phi_t = 0,\ t=k_1,\cdots, k_m. \tag{2.21}$$

Нам остается доказать, что $\Phi_k=0$ для $k\neq k_1,\cdots, k_m$. Выделим из (2.20) следующие m равенств:

$$\Phi_k C_t = \Phi_t C_k,\ t=k_1,\cdots, k_m. \tag{2.22}$$

В силу условий (2.21) правые части равенств (2.22) равны нулю, поэтому равенство (2.22) можно записать в следующей форме:

$$\Phi_k\cdot C\begin{pmatrix} 1\,2\cdots m \\ k_1 k_2\cdots k_m \end{pmatrix}=0. \tag{2.23}$$

Из условий (2.19′) и (2.23) следует, что

$$\Phi_k=0,\ k\neq k_1,\cdots, k_m.$$

Лемма доказана.

§ 3. Основная локальная теорема

Чтобы использовать результаты, полученные в § 2, для формулировки основной локальной теоремы, нам необходимо доказать следующую лемму.

Лемма 3.1. *Для любой матрицы A размерности (m, n) существует кососимметрическая матрица ψ размерности n, удовлетворяющая условию*

$$\psi A^+ A = \psi. \tag{2.5}$$

Доказательство. Соотношение (2.5) можно записать в виде

$$\psi\,(E-A^+ A)=0.$$

Решая это уравнение относительно матрицы ψ, получим

$$\psi = V\,[E-(E-A^+ A)^+ (E-A^+ A)], \tag{3.1}$$

где V—произвольная матрица размерности (m, n). В силу эрмитово идемпотентности матрицы $E-A^+A$ имеем (см. [3], лемма 2.1)

$$(E-A^+A)^+(E-A^+A)=E-A^+A.$$

Подставляя выражение для левой части последнего равенства в соотношение (3.1), получаем

$$\psi=VA^+A. \qquad (3.2)$$

В силу кососимметричности матрицы ψ, из соотношения (3.2) вытекает

$$VC=-C'V', \qquad (3.3)$$

где $C=A^+A$—эрмитово идемпотентная матрица и $\mathrm{Rang}\, C=\mathrm{Rang}\, A=k\leqslant m$.

Нам остается доказать существование кососимметрической матрицы V, удовлетворяющей уравнению

$$VC=C'V. \qquad (3.4)$$

В силу эрмитово идемпотентности матрицы C, ее можно привести к виду (см. [2], стр. 85, [1], стр. 208)

$$C=UE_kU^*, \qquad (3.5)$$

где U—унитарная матрица, а E_k—диагональная матрица, у которой первые K диагональных элементов равны единице, а остальные являются нулевыми.

Подставляя (3.5) в (3.4), получаем

$$VUE_kU^*=\overline{U}E_kU'V.$$

Умножая обе части этого равенства слева на матрицу U', а справа на U и учитывая унитарность матрицы U, находим, что

$$YE_k=E_kY, \qquad (3.6)$$

где

$$Y=U'VU. \qquad (3.7)$$

Очевидно, уравнению (4.5) удовлетворяет любая кососимметрическая матрица $y=(y_{ij})$, $i, j=1,\cdots, n$, у которой $y_{ij}=0$, при $i>k$, $j>k$, а элементы y_{ij} для $i\leqslant k$, $j\leqslant k$ составляют кососимметрическую матрицу размерности k, тогда умножая равенство (3.7) слева на $(U')^{-1}$, а справа—на U^{-1}, получаем, что матрица V тоже кососимметрическая.

Лемма доказана.

Из теоремы 1.1 и лемм 2.3, 2.4, 3.1 следует

Теорема 3.1 (основная локальная). *Для того чтобы отображение*

$$T \quad w_i=f_i(z_1,\cdots,\bar{z}_n),\ i=1,\cdots,m$$

области $G\subset C_z^n$, удовлетворяющее там условию

$$\mathrm{Rang}\,\frac{\partial(w,\overline{w})}{\partial(z,\overline{z})}=2m, \qquad (1.1)$$

принадлежало к классу квазиголоморфных отображений $B_O(n, m, k)$ *в точке* $Q \subset G$, *необходимо и достаточно, чтобы его дифференциал* (T_d), *вычисленный в точке* Q, *имел вид*

$$W = \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{\lambda} A_1 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} P\overline{A}_1 - \lambda' B_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \overline{z}, \tag{3.8}$$

где A_1, B_2, λ — *матрицы размерностей соответственно* (k, n) $(m-k, n)$, $(m-k, k)$, *а* P — *кососимметрическая матрица размерности* k.

Теорема 3.2. *Для того чтобы отображение* $T \in B_O(n, m, k)$ *в точке* Q, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{P}, & -\lambda^* \\ \overline{\lambda}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

где P — *кососимметрическая матрица размерности* k, λ — *некоторая матрица размерности* $(m-k, k)$, *а* A_1, A_2, B_1, B_2 — *матрицы, состоящие из первых* k *строк и последних* $(m-k)$ *строк матриц* A *и* B.

§ 4. Преобразование якобиана отображения $T \in B_O(n, m, k)$

Из того, что отображение $T \in B_O(n, m, k)$ в точке Q, следует, что

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} A, & B \\ \overline{B}, & \overline{A} \end{pmatrix} = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} A_1, & P_1\overline{A}_1 - \lambda' B_2 \\ \overline{\lambda} A_1, & B_2 \\ \overline{P} A_1 - \lambda^* \overline{B}_2, & \overline{A}_1 \\ \overline{B}_2, & \lambda \overline{A}_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} E & -\lambda' & P & 0 \\ \overline{\lambda} & E & 0 & 0 \\ \overline{P} & 0 & E & -\lambda^* \\ 0 & 0 & \lambda & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_2 \\ 0 & \overline{A}_1 \\ \overline{B}_2 & 0 \end{pmatrix} = 2m. \tag{4.1}$$

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_2 \\ 0 & \overline{A}_1 \\ \overline{B}_2 & 0 \end{pmatrix} = 2m.$$

Переставляя второй и четвертый блок-строки этой матрицы, легко видеть, что последнее условие эквивалентно следующему:

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} = m. \tag{4.2}$$

Из условия (4.1) также следует, что

$$\det\begin{pmatrix} E & -\lambda' & P & 0 \\ \overline{\lambda} & E & 0 & 0 \\ \overline{P} & 0 & E & -\lambda^* \\ 0 & 0 & \lambda & E \end{pmatrix} \neq 0.$$

Отсюда, в результате преобразований, мы найдем, что

$$\det\begin{pmatrix} D & 0 & P & 0 \\ \overline{\lambda} & E & 0 & 0 \\ \overline{P} & 0 & \overline{D} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & E \end{pmatrix} \neq 0, \tag{4.3}$$

где $D = E + \lambda'\overline{\lambda}$ — невырожденная матрица. Ее невырожденность следует из того (см. [1], стр. 33), что

$$D = E + \lambda'\overline{\lambda} = (E\lambda')\begin{pmatrix} E \\ \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Переставляя в матрице (4.3) третий блок-столбец со вторым, а третью блок-строку со второй, получаем

$$\det\begin{pmatrix} D & P & 0 & 0 \\ \overline{P} & \overline{D} & 0 & 0 \\ \overline{\lambda} & 0 & E & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & E \end{pmatrix} \neq 0. \tag{4.4}$$

Из формулы Шура (см. [1], стр. 59) и из (4.4) следует, что

$$\det\begin{pmatrix} D, & P \\ \overline{P}, & \overline{D} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{4.5}$$

Используя равенство

$$\begin{pmatrix} E & \overline{D^{-1}P} \\ D^{-1}P & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{D}^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{D}, & \overline{P} \\ P, & D \end{pmatrix},$$

условие (4.5) и снова формулу Шура, заключаем, что

$$\det\begin{pmatrix} E & \overline{D^{-1}P} \\ D^{-1}P & E \end{pmatrix} = \det\left(E - D^{-1}P\,\overline{D^{-1}P}\right) = \det\left(E - \Gamma\overline{\Gamma}\right) \neq 0. \tag{4.6}$$

Здесь

$$\Gamma = D^{-1}P. \tag{4.7}$$

§ 5. Построение класса отображений $B_G(n, m, k)$

Определение 5.1. Отображение

$$T \qquad w_i = f_i(z_1, \cdots, \overline{z}_n) \in C^1(G),\ i = 1, \cdots, m$$

принадлежит к классу квазиголоморфных отображений в области G, если

1) $$\operatorname{Rang}\frac{\partial(w, \overline{w})}{\partial(z, \overline{z})} = 2m,$$

2) Существуют функции $f_{\alpha_1}, \cdots, f_{\alpha_k}$, для которых

$$\operatorname{Rang} \frac{\partial (w_{\alpha_1}, \cdots, w_{\alpha_k})}{\partial (z_1, \cdots, z_n)} = k$$

во всех точках области. Здесь $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ — некоторые фиксированные индексы.

3) В каждой точке $Q \in G$ дифференциал (T_d) отображения T сохраняет окружности с центром в этой точке, лежащие на всех невырождающихся комплексных прямых и переводит в точки окружности с центром в точке Q, лежащие на всех вырождающихся комплексных прямых.

Очевидно, что для подобного отображения имеют место теоремы 3.1 и 3.2 в любой точке $Q \in G$.

Мы далее полагаем $\alpha_1 = 1, \cdots, \alpha_k = k$, что не умаляет общности наших рассмотрений.

Рассмотрим вопрос об интегрировании системы дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять функции

$$w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n) \in C^2 (G),\ i = 1, \cdots, m,$$

определяющие отображение $T \in B_Q (n, m, k)$.

Эта система дифференциальных уравнений, в силу теоремы 3.2, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}, & -\lambda^* \\ \bar{\lambda}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Здесь A_1, A_2, B_1, B_2—матрицы, состоящие из первых k строк и последних $(m-k)$ строк матриц A и B, P—кососимметрическая матрица размерности k, λ—некоторая матрица размерности $(m-k,\ k)$.

Перепишем систему (3.9) в раскрытом виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_q}{\partial z_i} - \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \bar{P}_{q\alpha} \dfrac{\partial w_\alpha}{\partial z_i} + \sum\limits_{\beta=1}^{m-k} \bar{\lambda}_{\beta q} \dfrac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial z_i} = 0 \\ \dfrac{\partial w_{k+\beta}}{\partial z_i} - \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \bar{\lambda}_{p\alpha} \dfrac{\partial w_\alpha}{\partial z_i} = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $i = 1, \cdots, n$; $q = 1, \cdots, k$; $p = 1, \cdots, m-k$, функции $P_{q\alpha}$ и $\lambda_{p\alpha}$ являются элементами матриц λ, P (они пока произвольные функции класса $C^1 (G)$).

Последнее обстоятельство следует из того, что умножая равенство (3.9) справа на $\begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix}^+$ и имея в виду условия (4.2), получаем

$$\begin{pmatrix} \bar{P}, & -\lambda^* \\ \bar{\lambda}, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix}^+.$$

Выпишем систему (5.1) относительно индекса j

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{w}_q}{\partial z_j} - \sum_{\alpha=1}^{k} \overline{P}_{q\alpha} \frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j} + \sum_{\beta=1}^{m-k} \overline{\lambda}_{\beta q} \frac{\partial \overline{w}_\beta}{\partial z_j} = 0 \\ &\frac{\partial w_{k+p}}{\partial z_j} - \sum_{\alpha=1}^{k} \overline{\lambda}_{p\alpha} \frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j} = 0. \end{aligned}\right. \tag{5.2}$$

Дифференцируя теперь (5.1) по z_j, а (5.2) по z_i и вычитая из первого равенства второе, получаем

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\beta=1}^{m-k}\left(\frac{\partial \overline{\lambda}_{\beta q}}{\partial z_j}\frac{\partial \overline{w}_{k+\beta}}{\partial z_i} - \frac{\partial \overline{\lambda}_{\beta q}}{\partial z_i}\frac{\partial \overline{w}_{k+\beta}}{\partial z_j}\right) - \sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{\partial \overline{P}_{q\alpha}}{\partial z_j}\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_i} - \frac{\partial \overline{P}_{q\alpha}}{\partial z_i}\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j}\right) = 0 \\ &\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{\partial \overline{\lambda}_{p\alpha}}{\partial z_j}\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_i} - \frac{\partial \overline{\lambda}_{p\alpha}}{\partial z_i}\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

Условия (5.3) можно записать в матричной форме

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda^*}{\partial z_i}\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial z_j} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial z_i} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial z_i}\frac{\partial w^1}{\partial z_j} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial z_j}\frac{\partial w^1}{\partial z_i} = 0 \\ &\frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_i}\frac{\partial w^1}{\partial z_j} - \frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_j}\frac{\partial w^1}{\partial z_i} = 0 \end{aligned}\right.$$

или

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{P}}{\partial z_i}, & -\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial z_i} \\ \dfrac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_i}, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w^1}{\partial z_j} \\ \dfrac{\partial \overline{w}^2}{\partial z_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{P}}{\partial z_j}, & -\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial z_j} \\ \dfrac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_j}, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w^1}{\partial z_i} \\ \dfrac{\partial w^2}{\partial z_i} \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

где $i<j$; $i, j=1,\cdots, n$.

Здесь

$$\frac{\partial w^1}{\partial z_j} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial z_j},\cdots,\frac{\partial w_k}{\partial z_j}\right)', \quad \frac{\partial w^2}{\partial z_j} = \left(\frac{\partial w_{k+1}}{\partial z_j},\cdots,\frac{\partial w_m}{\partial z_j}\right)'.$$

Заметим, что столбцы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w^1}{\partial z_j} \\ \dfrac{\partial \overline{w}^2}{\partial z_j} \end{pmatrix}, \quad j=1,\cdots, n$$

являются столбцами матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

которая, как мы показали в (4.2), имеет полный ранг, равный m.

Учитывая это обстоятельство и применяя лемму 2.5 к условиям (5.4), заключаем, что

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial z_i} = 0, \quad \frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_i} = 0, \quad i=1,\cdots, n,$$

т. е. элементы матриц P и λ являются голоморфными функциями. Имея в виду голоморфность функций P_{qt} и λ_{pt}, q, $t=1,\cdots,k$; $p=1,\cdots,m-k$, легко установить, что функции

$$\Lambda_q = w_q - \sum_{\alpha=1}^{k} P_{q\alpha}\overline{w}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m-k}\lambda_{\beta q} w_{k+\beta},$$

$$\Lambda_p = \overline{w}_{k+\beta} - \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_{p\alpha}\overline{w}_\alpha \tag{5.5}$$

удовлетворяют условиям Коши-Римана. Действительно, в силу (5.1) имеем

$$\frac{\partial\Lambda_q}{\partial \overline{z}_l} = \frac{\partial w_q}{\partial \overline{z}_l} - \sum_{\alpha=1}^{k} P_{q\alpha}\frac{\partial\overline{w}_\alpha}{\partial\overline{z}_l} + \sum_{\beta=1}^{m-k}\lambda_{\beta q}\frac{\partial w_{k+\beta}}{\partial\overline{z}_l} = 0,$$

$$\frac{\partial\Lambda_p}{\partial\overline{z}_l} = \frac{\partial\overline{w}_{k+\beta}}{\partial\overline{z}_l} - \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_{p\alpha}\frac{\partial\overline{w}_\alpha}{\partial\overline{z}_l} = 0.$$

В силу равенства (2.18), (5.5) можно записать в виде

$$\Lambda = \begin{pmatrix} w^1 \\ \overline{w}^2 \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} \overline{w}^1 \\ w^2 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

где

$$\Lambda = (\Lambda_1,\cdots,\Lambda_m)'.$$

Решая систему, состоящую из уравнения (5.6) с ним сопряженным, получим

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ \overline{w}^2 \end{pmatrix} = (E-\Phi\overline{\Phi})^{-1}(\Phi\overline{\Lambda}+\Lambda). \tag{5.7}$$

Из уравнения (5.6), используя условие (4.6), мы найдем, что

$$w^1 = (E-\Gamma\overline{\Gamma})^{-1}(\Gamma\overline{\varphi}+\varphi),$$

$$w^2 = \overline{\lambda}(E-\Gamma\overline{\Gamma})^{-1}(\Gamma\overline{\varphi}+\varphi)+\overline{\Lambda}^2, \tag{5.8}$$

где

$$\Gamma = D^{-1}P,\ D=(E+\lambda'\overline{\lambda}),\ \varphi = D^{-1}(\Lambda^1-\lambda'\overline{\Lambda}^2),$$

$$\Lambda^1 = (\Lambda_1,\cdots,\Lambda_k)',\ \Lambda^2 = (\Lambda_{k+1},\cdots,\Lambda_m)'.$$

Итак доказана

Теорема 5.1. *Если отображение*

$$T \quad w_i = f_i(z_1,\cdots,\overline{z}_n)\in C^2(G),\ i=1,\cdots,m$$

принадлежит классу $B_0(n,m,k)$, то в некоторой окрестности любой точки $Q\in G$ оно может быть представлено в виде

$$T^* \quad \begin{pmatrix} w^1 \\ \overline{w}^2 \end{pmatrix} = (E-\Phi\overline{\Phi})^{-1}(\Phi\overline{\Lambda}+\Lambda).$$

Здесь $w^1=(w_1,\cdots,w_k)'$, $w^2=(w_{k+1},\cdots,w_m)'$, *столбец* Λ *и кососимметрическая* матрица Φ *состоят из голоморфных функций, причем* $\Phi_{lt}=0$ *для* $l,\ t>k$.

Имеет место

Теорема 5.2. *Отображение* (T^*) *области* $G\subset C^n_z$, *определяемое равенствами*

$$T^*\qquad \begin{pmatrix} w^1 \\ \overline{w^2}\end{pmatrix}=(E-\Phi\overline{\Phi})^{-1}(\Phi\overline{\Lambda}+\Lambda),$$

принадлежит классу B_G $(n,\ m,\ k)$, *если*

$$\text{Rang}\ \frac{\partial(w^1,\ \overline{w^2})}{\partial z}=m.$$

Здесь столбец Λ *и кососимметрическая матрица* Φ *состоят из голоморфных в области* G *функций, а* $\Phi_{lt}=0$ *для* $l,\ t>k$.

Теорема 5.2 доказывается непосредственной проверкой.

Заметим, что теоремы 5.1 и 5.2 можно сформулировать в терминах отображения (5.8).

§ 6. Пример отображения $B_G(n,\ m,\ k)$

Теорема 6.1. *Отображение*

$$w_1=z_1(1-|z_2|^2)(1+|z_1z_2|^2)^{-1},$$

$$w_2=\overline{z}_2(1+|z_1|^2)(1+|z_1z_2|^2)^{-1} \qquad (6.1)$$

принадлежит классу B_G (2.2.1) *в единичном бицилиндре* $G=\{z\in C^2;\ |z_1|<1,\ |z_2|<1\}$ *и гомеоморфно отображает этот бицилиндр на единичный гипершар.*

Доказательство. Выписывая формулу (5.7) для $n=m=2$, $k=1$ и полагая $\Phi_{12}=-z_1z_2$, $\Lambda_1=z_1$, $\Lambda_2=z_2$, получаем отображение (6.1). Из (6.1) легко вывести, что

$$|w_1|^2+|w_2|^2=(|z_1|^2+|z_2|^2)(1+|z_1z_2|^2)^{-1}.$$

Отсюда следует, что функции (6.1) отображают бицилиндр G на гипершар. Нам остается доказать гомеоморфизм этого отображения.

Пусть различным точкам $(z_1^{(1)},\ z_2^{(1)})$, $(z_1^{(2)},\ z_2^{(2)})$ соответствует одна точка $(w_1,\ w_2)$. Тогда

$$z_1^{(1)}(1-|z_2^{(1)}|^2)(1+|z_1^{(1)}z_2^{(1)}|^2)^{-1}=z_1^{(2)}(1-|z_2^{(1)}|^2)(1+|z_1^{(2)}z_2^{(2)}|^2)^{-1},$$

$$\overline{z}_2^{(1)}(1+|z_1^{(1)}|^2)(1+|z_1^{(1)}z_2^{(1)}|^2)^{-1}=\overline{z}_2^{(2)}(1+|z_1^{(2)}|^2)(1+|z_1^{(2)}z_2^{(2)})^{-1}. \qquad (6.2)$$

Отсюда вытекает

$$|z_1^{(1)}|(1-|z_2^{(1)}|^2)(1+|z_1^{(1)}|^2)^{-1}=|z_1^{(2)}|(1-|z_2^{(2)}|^2(1+|z_1^{(2)}z_2^{(2)}|^2)^{-1},$$

$$|z_2^{(1)}|(1+|z_1^{(1)}|^2)(1+|z_1^{(1)}z_2^{(1)}|^2)^{-1}=|z_2^{(2)}|(1+|z_1^{(2)}|^2)(1+|z_1^{(2)}z_2^{(2)}|^2)^{-1}. \qquad (6.3)$$

Обозначим

$$(1+|z_1^{(1)}|^2)(1+|z_1^{(1)}\ z_2^{(1)}|^2)^{-1}=h.$$

Тогда имеем

$$|z_1^{(1)}|^2=(h-1)(1-|z_2^{(1)}|^2h)^{-1},$$
$$|z_1^{(2)}|^2=(|z_2^{(2)}|-h|z_2^{(1)}|)(|z_2^{(2)}|^2|z_2^{(1)}|h-|z_2^{(2)}|)^{-1}. \tag{6.4}$$

Подставляя (6.4) в первое уравнение (6.3), получаем

$$|z_2^{(1)}|=|z_2^{(2)}|. \tag{6.5}$$

Из последнего равенства и из (6.4) следует, что

$$|z_1^{(1)}|=|z_1^{(2)}|. \tag{6.6}$$

И, наконец, из условий (6.5), (6.6) и (6.2) мы найдем, что $z_1^{(1)}=z_1^{(2)}$, $z_2^{(1)}=z_2^{(2)}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 6.2. *Отображение*

$$W^1=(E-P\overline{P})^{-1}(P\overline{Z}^1+Z^1),$$
$$W^2=\overline{Z^2}, \tag{6.6'}$$

где $z^1=(z_1,\cdots,z_k)'$, $z^2=(z_{k+1}z_{m+1}\cdots z_n,\cdots,z_m z_{m+1}\cdots z_n)'$, *а кососимметрическая матрица* P *определяется условием*

$$p_{ij}=\begin{cases} z_i z_j, & \text{если } i<j\\ 0 & \text{если } i=j\\ -z_i z_j, & \text{если } i>j,\end{cases}$$

принадлежащее к классу $B_0(n,\ m,\ k)$ *в единичном полицилиндре* $G=\{|z_i|<1,\ i=1,\cdots,n\}$ *отображает его на область*

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}|w_k|^2<1,\ |w_j|<1,\ j=k+1,\cdots,m\right\}.$$

Доказательство. Полагая в (5.8)

$$\lambda=0,\ \Lambda^1=Z^1,\ \Lambda^2=Z^2,$$

получаем отображение (6.6').

Используя теорему А. А. Шматкова (см. [4], теорема 5.1), заключаем, что полицилиндр

$$G_k=\{|z_i|<1,\ i=1,\cdots,k\}$$

при отображении (6.6') переходит в гипершар

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}|w_i|^2<1\right\}.$$

Отсюда легко получается утверждение теоремы.

В заключение выражаю благодарность Б. А. Фуксу за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный университет

Поступило 28.I.1971

Է. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. C^m տարածության վրա $C^n (m<n)$ տարածության քվազի հոլոմորֆ արտապատկերումների մասին, որոնք կոնֆորմ են կոմպլեքս ուղիղների վրա *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են $G^* \subset C^m_w$ տիրույթի վրա $G \subset C^n_z$ $(m<n)$ տիրույթի հարթ արտապատկերումները, որոնք կոնֆորմ են կոմպլեքս ուղիղների վրա։ Փակ տեսքով կառուցված է քվազի հոլոմորֆ արտապատկերումների $B_G(n, m, k)$ դասը։ Գտնված են այդ դասին պատկանելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։ Քննարկված են օրինակներ։

E. H. NAZARIAN. *On quasi-holomorphic mappings of C^n on C^m $(m<n)$ which are conform on complex lines* (summary)

The article discusses smooth mappings of $G \subset C_z^n$ on $G^* \subset C^m$, $m<n$ (G^* and G are domaines), which are conform on complex lines. Construction of a class $B_G(n, m, k)$ of quasiholomorphic mappings is given. The necessary and sufficient condition of belonging to that class are obtained and examples constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Гантмахер.* Теория матриц, 1967.
2. *Р. Белман.* Введение в теорию матриц, изд. „Наука", 1969.
3. *R. Penrose.* A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Phill. Soc., 51, № 3, 1955, 406—413.
4. *А. А. Шматков.* Квазиголоморфные отображения пространства C^n, конформные на комплексных прямых, Изв. АН АрмССР, „Математика", 3, № 6, 1968, 479—496.