ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

В. В. ВОСКАНЯН

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ

Пусть K есть открытое кольцо в комплексной плоскости, ограниченное окружностями $\Gamma_1=\{z: |z|=1\}$ и $\Gamma_\rho=\{z: |z|=\rho\}$, $0<\rho<1$. Обозначим через $H^p(K)$, $1\leqslant p<\infty$, банахово пространство функций $f(z)$, аналитических (и однозначных) в K, таких, что

$$\|f\|^p=\sup_{\rho<r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\,dt<\infty,$$

с нормой $\|f\|$. Функции из $H^p(K)$ имеют почти всюду на $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_\rho$ граничные значения $f(e^{it})$ и $f(\rho e^{it})$, суммируемые с p-й степенью (см., например, [1]). Впредь нам будет удобнее пользоваться другой нормой $\|f\|_p$, эквивалентной основной норме

$$\|f\|_p=\left[\int_\Gamma|f(x)|^p\,ds\right]^{1/p}=\left[\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p\,dt+\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p\,\rho\,dt\right]^{1/p}.$$

Аналогично, $H^\infty(K)$ будет обозначать банахово пространство аналитических и ограниченных в K функций с нормой

$$\|f\|_\infty=\sup_{z\in K}|f(z)|=\operatorname{Vrai\,max}_{x\in\Gamma}|f(x)|.$$

Пусть на Γ задана функция $\omega(x)\in L^q(\Gamma)$, где $1/q+1/p=1$. Тогда она по формуле $\omega(f)=\int\limits_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx$ порождает на $H^p(K)$ функционал ω. Обозначим через S_p единичный шар в пространстве $H^p(K)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. В нашей заметке мы хотим построить экстремальную функцию $f^*\in H^p(K)$, дающую норму функционала ω, т. е. такую, что

$$\|f^*\|_p=1 \text{ и } \|\omega\|=\sup_{f\in S_p}|\omega(f)|=|\omega(f^*)|,$$

в случае, когда $\omega(x)$ есть граничное значение мероморфной в $\overline{K}$ с полюсами в K функции $\omega(z)$.

В работе [5] решалась та же задача для круга. Систематическое изучение экстремальных задач такого типа для круга и многосвязных областей было проведено в работах С. Я. Хавинсона (см., например, [2], [3], [4] и другие) на основе принципа двойственности. Из этого принципа, в частности, следует, что

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \sup_{f\in S_p}\left|\int_\Gamma \omega(x) f(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in H^q(K)}\left[\int_\Gamma |\omega(x)-\varphi(x)|^q\,ds\right]^{1/q}, 1<p\leqslant\infty,\\ \lambda &= \sup_{f\in S_1}\left|\int_\Gamma \omega(x) f(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in H^\infty(K)} \operatorname{Vrai}\max_{x\in\Gamma}|\omega(x)-\varphi(x)|\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(см. [3], гл. II, § 1, пп 2, 3, 4).

Результаты, применяемые в нашем (мероморфном) случае, утверждают (там же, гл. II, 2—1, 3—1, 4—1, 2, 3):

а) При $1\leqslant p\leqslant\infty$ существуют экстремальные функции $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$, для которых равенство (1) достигается.

б) Функция $\varphi^*(z)$ единственна, когда $f^*(z)$ не постоянна. При $1<p\leqslant\infty$ функция $f^*(z)$ единственна с точностью до постоянного множителя $e^{i\alpha}$, а при $p=1$ может и не быть единственной в этом смысле

в) Для того чтобы $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$ были экстремальными, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на Γ выполнялись равенства

$$f^*(x)[\omega(x)-\varphi^*(x)]\,dx = e^{i\alpha}\lambda^{1-q}|\omega(x)-\varphi^*(x)|^q\,ds \text{ при } 1<p\leqslant\infty \quad (2)$$

и

$$f^*(x)[\omega(x)-\varphi^*(x)]\,dx = e^{i\alpha}\lambda|f^*(x)|\,ds \text{ при } p=1. \quad (3)$$

Впредь мы будем рассматривать ту экстремальную функцию $f^*(z)$, для которой $e^{i\alpha}=i$ в равенствах (2) и (3).

Теорема. *Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, и пусть функция $\omega(z)$ аналитична в K за исключением n полюсов β_i, лежащих в K, причем каждый полюс засчитывается столько раз, какова его кратность. Тогда для функций $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$, дающих решение экстремальной задачи (1), справедливы следующие утверждения: существует n чисел $\alpha_i\in K$ таких, что*

I. *Функция $R(z)=\omega(z)-\varphi^*(z)$ имеет единственное представление*

$$R(z) = Mz^k \prod{}' \frac{A_{\alpha_i}(z)}{A_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}(z)}\cdot\prod_1^n\frac{A_{\frac{1}{\bar{\beta}_i}}(z)}{A_{\beta_i}(z)}\prod_1^n\left[\frac{A_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}(z)}{A_{\frac{1}{\bar{\beta}_i}}(z)}\right]^{2/q}, \quad (4)$$

где знак произведения Π' распространяется на все индексы i такие, что $\alpha_i\in\Gamma$, и на некоторую часть оставшихся индексов;

$$A_\alpha(z) = (z-\alpha)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\rho^{2m}\cdot\frac{z}{\alpha}\right)\left(1-\rho^{2m}\cdot\frac{\alpha}{z}\right);\ k\text{—целое.}$$

II. *Функция $f^*(z)$ экстремальна тогда и только тогда, когда $\|f^*\|_p=1$ и имеет вид*

$$f^*(z) = Nz^{-k-1}\prod{}''\frac{A_{\alpha_i}(z)}{A_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}(z)}\cdot\prod_1^n\left[\frac{A_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}(z)}{A_{\frac{1}{\bar{\beta}_i}}(z)}\right]^{2/p}. \quad (5)$$

Здесь Π'' есть дополнение к Π' по всем n индексам i. В формулах (4) и (5) с нецелыми степенями $2/q$ и $2/p$ взято то значение степенной функции z^{ν}, которое равно 1 при $z=1$.

$$\text{III.} \qquad \text{а)}\ \prod_1^n \frac{\alpha_i}{\beta_i} < 0 \ \text{ и } \ \text{б)}\ \prod_1^n \left|\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right|^{1/p} \prod{}'' |x_i| = \rho^{*+1/q}.$$

Замечание. Из соотношения (4) видно, что при $p=1$ возможен случай, когда не все α_i будут участвовать в представлении $R(z)$. Эти оставшиеся параметры в формуле (5) могут быть выбраны произвольно, и функция $f^*(z)$ окажется неединственной.

Лемма. *Если $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$—экстремальные функции, то существует n чисел $\alpha_i \in \overline{K}$ таких, что имеет место представление*

$$L(z)=zf^*(z)\cdot R(z)= C\frac{\prod_1^n A_{\alpha_i}(z)\cdot A_{\frac{1}{\overline{\alpha}_i}}(z)}{\prod_1^n A_{\beta_i}(z)\cdot A_{\frac{1}{\overline{\beta}_i}}(z)}, \tag{6}$$

где C—константа.

Доказательство. Так как $\varphi^*(z)\in H^q(K)$, то для $1\leqslant q<\infty$

$$\|R(x)-R(rx)\|_{L^q(\Gamma_1)}\to 0 \text{ при } r\to 1-,\ x\in\Gamma_1$$

и

$$\|R(x)-R(rx)\|_{L^q(\Gamma_\rho)}\to 0 \text{ при } r\to 1+,\ x\in\Gamma_\rho.$$

В случае $q=\infty$

$$\varlimsup_{r\to 1-}\ \sup_{x\in\Gamma_1}|R(rx)|<\infty \text{ при } x\in\Gamma_1$$

и

$$\varlimsup_{r\to 1+}\ \sup_{x\in\Gamma_\rho}|R(rx)|<\infty \text{ при } x\in\Gamma_\rho.$$

Точно такие же соотношения с показателем p вместо q (для $1\leqslant p<\infty$ и $p=\infty$) имеют место для функции $f^*(z)$ ввиду того, что $f^*(z)\in H^p(K)$. Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}&\|L(x)-L(rx)\|_{L^1(\Gamma_1)}\to 0 \text{ при } r\to 1-,\ x\in\Gamma_1,\\ &\|L(x)-L(rx)\|_{L^1(\Gamma_\rho)}\to 0 \text{ при } r\to 1+,\ x\in\Gamma_\rho\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

С другой стороны, равенства (2) и (3) показывают, что

$$\left.\begin{aligned}&L(x)\geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_1,\\ &L(x)\leqslant 0 \text{ п. в на } \Gamma_\rho\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) позволяют сохранить классическое доказательство принципа симметрии Шварца. Функцию $L(z)$ можно продолжить до функции, мероморфной в кольце $K(\rho^2, 1/\rho)$ с радиусами ρ^2 и $1/\rho$. Далее, продолжая $L(z)$ по симметрии с одного кольца на другое следующим образом:

$$K(\rho^2,\ 1) \to K(1,\ 1/\rho^2),\quad K(\rho,\ 1/\rho^2) \to K(\rho^4,\ \rho),\quad K(\rho^4,\ 1) \to K(1,\ 1/\rho^4) \ldots,$$

мы получим в итоге функцию, мероморфную на всей плоскости, за исключением точек 0 и ∞ накопления полюсов.

Если α есть нуль функции $L(z)$ в $\overline{K}$, то она будет иметь нулями и точки

$$\frac{1}{\overline{\alpha}},\ \frac{1}{\rho^2 \overline{\alpha}},\ \frac{\rho^2}{\overline{\alpha}},\ \rho^2\alpha,\ \frac{\alpha}{\rho^2},\ \ldots,\ \frac{1}{\rho^{2m}\overline{\alpha}},\ \frac{\rho^{2m}}{\overline{\alpha}},\ \rho^{2m}\alpha,\ \frac{\alpha}{\rho^{2m}},\ \ldots.$$

Поэтому функция $L(z)$ должна содержать множитель

$$(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)\prod_{1}^{\infty}\left(1-\rho^{2m}\frac{z}{\alpha}\right)\left(1-\rho^{2m}\frac{\alpha}{z}\right)\left(1-\rho^{2m}\frac{1}{\overline{\alpha} z}\right)(1-\rho^{2m}\overline{\alpha}z) =$$

$$= A_\alpha(z)\cdot A_{\frac{1}{\overline{\alpha}}}(z).$$

Полюсы β_l функции $L(z)$ порождают такие же множители в знаменателе. По принципу аргумента число нулей в $\overline{K}$ должно быть равно n. (Заметим, что кратность нуля α, лежащего на Γ, есть четное число $2s$, но в ряду нулей функции $L(z)$ в $\overline{K}$ α участвует s раз).

Таким образом, функция

$$l(z) = \frac{\prod\limits_{1}^{n} A_{\alpha_l}(z)\cdot A_{\frac{1}{\overline{\alpha}_l}}(z)}{\prod\limits_{1}^{n} A_{\beta_l}(s)\, A_{\frac{1}{\overline{\beta}_l}}(z)}\cdot \prod_{1}^{n}\frac{\beta_l}{\alpha_l}$$

имеет те же нули и полюсы в $\overline{K}$, что и $L(z)$. Заметив, что

$$\left.\begin{aligned} A_\alpha(x) &= -\alpha x\overline{A_{\frac{1}{\overline{\alpha}}}(x)} \quad \text{на } \Gamma_1 \\ \text{и}\qquad A_\alpha(x) &= \alpha^2\overline{A_{\frac{1}{\overline{\alpha}}}(x)} \quad \text{на } \Gamma_\rho \end{aligned}\right|, \tag{9}$$

легко показать, что

$$l(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma_1$$

и

$$\arg l(x) = \arg \prod_{1}^{n}\frac{\alpha_l}{\beta_l} = \theta \quad \text{при} \quad x \in \Gamma_\rho.$$

Поэтому функция $h(z) = L(z)/l(z)$ не имеет ни особенностей, ни нулей в $\overline{K}$ и

$$g(x) > 0,\ x \in \Gamma_1 \text{ и } \arg g(x) = \pi - \theta,\ x \in \Gamma_\rho. \tag{10}$$

Для однозначности аналитической в $\overline{K}$ функции $g(z)$ необходимо выполнение равенства

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(e^{is})]\,ds = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(\rho e^{is})]\,ds. \tag{11}$$

Действительно, величина

$$\int_0^{2\pi} g(re^{is})\,ds = \frac{1}{i}\int \frac{g(z)}{z}\,dz,$$

где интеграл справа берется по окружности радиуса r ($\rho<r<1$) с центром в точке $z=0$, очевидно, не зависит от r. Тем же свойством обладает и мнимая часть написанного интеграла. Отсюда, приближая вначале r к 1, а затем к ρ, и замечая, что в интеграле

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(re^{is})]\,ds$$

можно сделать требуемые предельные переходы, получим (11).

Из (10) и (11) следует, что

$$0 = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(e^{is})]\,ds = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(\rho e^{is})]\,ds = \int_0^{2\pi} |g(\rho e^{is})| \sin(\pi-\theta)\,ds.$$

Поэтому $\sin(\pi-\theta)=0$, и из соотношений (10) вытекает, что

$$\operatorname{Im} g(x)=0 \text{ на } \Gamma_1,\quad \operatorname{Im} g(x)=|g(x)|\cdot\sin(\pi-\theta)=0 \text{ на } \Gamma_\rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} g(z)\equiv 0 \text{ на } K \Rightarrow g(z)=\mathrm{const}, \text{ откуда и следует (6).}$$

Лемма доказана, и попутно установлено утверждение III а) теоремы.

Доказательство теоремы. Из соотношений (2) и (3) легко вывести равенство

$$|R(x)|^{1/p} = \lambda^{1/p}\,|f^*(x)|^{1/q}$$

и отсюда

$$\begin{cases} |R(x)| = \lambda^{1/p}|L(x)/x|^{1/q}, \\ |f^*(x)| = \lambda^{-1/p}|L(x)/x|^{1/p} \end{cases} \text{ на } \Gamma \text{ при } 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{12}$$

Точки $\alpha_i \in K$ в (6) подразделяются на нули $f^*(z)$ и $R(z)$ в K. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{M}{z}\cdot \prod{}'' \frac{A_{\alpha_i}(z)}{A_{\frac{1}{\bar\alpha_i}}(z)} \prod_1^n \left[\frac{A_{\frac{1}{\bar\alpha_i}}(z)}{A_{\frac{1}{\bar\beta_i}}(z)}\right]^{2/p}, \tag{13}$$

где знак произведения $\prod''$ распространяется на те индексы i, для которых α_i являются нулями функции $f^*(z)$ в K. Приняв во внимание формулы (6) и (9) и выбирая надлежащим образом число M

$$\left(M=\lambda^{-1/p}\cdot C^{1/p}\cdot \prod{}''\frac{1}{|\alpha_i|}\cdot \prod_1^n \left|\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right|^{1/p}\right),$$

легко показать, что

$$\left.\begin{aligned} &|\Phi(x)| = \lambda^{-1/p} |L(x)/x|^{1/p} = |f^*(x)| \quad \text{на } \Gamma_1 \\ &\text{и} \\ &|\Phi(x)| = \prod_1^n \left|\frac{\beta_l}{\alpha_l}\right|^{1/q} \cdot \rho^{-1/} \cdot \prod^{n} |\alpha_l| \cdot |f^*(x)| = B\,|f^*(x)| \quad \text{на } \Gamma_\rho \end{aligned}\right\} . \tag{14}$$

В работе [4] (см. доказательство теоремы 10 из § 5) было показано, что $\ln|f^*(z)|$ представляется по формуле Грина в кольцеобразных областях, примыкающих к Г и не содержащих нулей $f^*(z)$. Так как $\Phi(z)$ имеет в K те же нули, что и $f^*(z)$, то отсюда вытекает, что функция $\ln|f^*(z)/\Phi(z)|$ представляется по формуле Грина во всем K. По этой формуле представится тогда и функция $\ln|z^{\log_\rho B} f^*(z)/\Phi(z)|$. Но она равна нулю на Г, ввиду равенств (14), поэтому

$$|z^{\log_\rho B} f^*(z)/\Phi(z)| = 1 \quad \text{на } K.$$

Так как функция $f^*(z)/\Phi(z)$ однозначна, то $\log_\rho B = k$ есть целое число. Из вида B следует утверждение III б). Таким образом, $f^*(z) = \text{const}\cdot\Phi(z)\cdot z^{-k}$ и доказано II. Функция $R(z)$ в I определяется теперь из II и формулы (6).

Теорема доказана.

Замечание. Если рассматривать банахово пространство $A(K)$ функций, аналитических в K и непрерывных вплоть до границы, с sup—нормой, и функционал ω на нем, то принцип двойственности приводит к равенству

$$\sup_{f\in S(A)} \left|\int_\Gamma \omega(x) f(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in H^1(K)} \int_\Gamma |\omega(x) - \varphi(x)|\,ds = \sup_{f\in S_\infty} \left|\int_\Gamma \omega(x) f(x)\,dx\right| .$$

Так как экстремальная функция $f^*(z)$ для пространства $H^\infty(K)$ в условиях теоремы оказалась непрерывной вплоть до границы, то она будет решением экстремальной задачи и для пространства $A(K)$. Таким образом, все рассуждения теоремы для $H^\infty(K)$ переносятся на пространство $A(K)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Ереванский государственный университет
Поступило 25.I.71

Վ.Վ.ՌՍԿԱՆՅԱՆ. Օղակում անալիտիկ ֆունկցիաների բանախի տարածությունների տեսության մի էքստրեմալ խնդրի մասին (*ամփոփում*)

Դիցուք K—ն կոմպլեքս հարթության վրա Γ եզրագիծ ունեցող մի օղակ է։ $H^p(K)$, $1<p<\infty$, և $A(K)$ բանախի տարածություններում սահմանված է ω ($\omega(f) = \int_\Gamma \omega(z) f(z)\,dz$) ֆունկցիոնալը, որտեղ $\omega(z)$—ը մի ֆունկցիա է, որն անալիտիկ է $\bar{K}$-ում բացառությամբ վերջավոր թվով բևեռներից K-ում։

Ներկա աշխատանքում գտնվում է այդ ֆունկցիոնալի նորմը տվող $f^* \in H^p(K)$, $A(K)$ էքստրեմալ ֆունկցիայի տեսքը և $\varphi^*(z)$ էքստրեմալ ֆունկցիայի ներկայացումը երկակի խնդրում։

V. V. VOSKANIAN. ***On an extremal problem in the Banach space of analytical in an annulus functions*** **(summary)**

Let K be an annulus in a complex plane with boundary Γ. In Banach spaces $H^p(K)$, $1 < p < \infty$, and $A(K)$ the functional ω $(\omega(f) = \int\limits_{\Gamma} \omega(z) f(z) dz)$, is defined where $\omega(z)$ is an analytical function in $\bar{K}$ except for a finite number of poles in K.

In the present paper the extremal function $f^* \in H^p(K)$, $A(K)$ which gives the norm of this functional, is found along with the representation of the extremal function $\varphi^*(z)$ in the dual problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон.* Классы аналитических функций в многосвязных областях, Исследования по современным проблемам, ТФКП, 1960.
2. *С. Я. Хавинсон.* О некоторых экстремальных задачах теории аналитических функций, Уч. записки МГУ, вып. 148, т. 4, 1951.
3. *С. Я. Хавинсон.* Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечно-связных областях, Мат. сб., 36 (78), вып. 3, 1955.
4. *Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон.* Исследование свойств экстремальных функций с помощью соотношений двойственности в экстремальных задачах для классов аналитических функций в многосвязных областях, Мат. сб., 46, (88), вып. 2, 1958.
5. *W. W. Rogosinsky, H. S. Shapiro.* On certain problems for analytic functions, Acta Math., 90, №№ 3—4, 1953.