ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

К. И. ОСКОЛКОВ, С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ

К ОЦЕНКАМ П. Л. УЛЬЯНОВА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

1°. Если функция $f(t)\in L^p(0, 1)$, $1\leqslant p<\infty$, то ее интегральным модулем непрерывности в метрике L^p называют функцию

$$\omega_p(\delta, f)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left\{\int\limits_0^{1-h}|f(t)-f(t+h)|^p\,dt\right\}^{1/p},\quad 0\leqslant\delta\leqslant 1.$$

При исследовании вложений классов функций П. Л. Ульянов опирался на следующие установленные им оценки для интегральных модулей непрерывности ([1], лемма 6; [2], леммы 4 и 4′)

$$\omega_1\left(\frac{1}{n}, f\right)\geqslant\frac{1}{9}\,G_n(f) \tag{1}$$

и при $p>1$

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right)\geqslant\frac{n^{1-\frac{1}{p}}}{1+2^{2+\frac{1}{p}}}\,F_n(f), \tag{2}$$

где

$$G_n(f)=\sup_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=\frac{1}{n}}}\int\limits_E|f(t)|\,dt-\inf_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=\frac{1}{n}}}\int\limits_E|f(t)|\,dt, \tag{3}$$

$$F_n(f)=\sup_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=\frac{1}{n}}}\left\{\int\limits_E|f(t)|\,dt-\sup_{\substack{E_1\subset[0,1]\setminus E\\|E_1|=\frac{1}{n}}}\int\limits_{E_1}|f(t)|\,dt\right\} \tag{4}$$

и $n=2, 3,\cdots$. Заметим, что константа в оценке (2) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{1+2^{2+\frac{1}{p}}}<\frac{1}{5}.$$

Мы показываем здесь*, что в оценках (1) и (2) константа может быть увеличена до $\frac{1}{3}$. С другой стороны, в качестве константы в этих

* Результаты п. 2 получены первым автором, п. 3—вторым.

неравенствах нельзя взять 1, точнее, нельзя взять величину, большую $\left(\frac{5}{7}\right)^{1/p}$.

Указанное увеличение константы усиливает некоторые результаты П. Л. Ульянова. Например, случай 1) теоремы 1 из работы [2] приобретает такой вид: если $\varphi(t)$ — четная неотрицательная и неубывающая на $[0, \infty)$ функция и $f(t) \in L(0, 1)$, то

$$\int_0^1 \varphi(f(t))\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varphi(3 \cdot 2^n \omega_1(2^{-n}, f) + 2\|f\|_{L(0,1)}).$$

В [2] в этой оценке вместо множителя 3 стояло 9. Эта замена множителя оказывается существенной для быстро растущих φ.

В самом деле, для $\varphi(t) = e^{|t|}$ П. Л. Ульянов ([2], стр. 114) доказал, что если для достаточно малых δ справедлива оценка

$$\omega_1(\delta, f) \leqslant C\delta \log \frac{1}{\delta},$$

то при $C < \frac{1}{9}$

$$\int_0^1 \exp|f(t)|\,dt < \infty, \tag{5}$$

а при $C=1$ этот вывод сделать уже нельзя.

Теперь мы можем утверждать, что (5) имеет место и при $C < \frac{1}{3}$. Остается неизвестным, для каких C, удовлетворяющих условиям $\frac{1}{3} \leqslant C < 1$, сохраняется это свойство.

2°. Теорема. *Имеют место оценки* $(n=2, 3, \cdots)$

$$\omega_1\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant \frac{1}{3} G_n(f) \tag{6}$$

и при $p>1$

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant \frac{1}{3}\, n^{1-\frac{1}{p}} F_n(f). \tag{7}$$

Поскольку для модулей непрерывности справедлива оценка (см. [1], лемма 5)

$$\omega_p(\delta, f) \geqslant \omega_p(\delta, |f|),$$

а $G_n(f)$ и $F_n(f)$ зависят только от модуля f, то достаточно ограничиться рассмотрением неотрицательных функций f.

При доказательстве теоремы мы будем опираться на следующие предложения.

Лемма 1 (П. Л. Ульянов [4], лемма 3). *Пусть* $f \in L^p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, *а функции* $\psi_n(t)$ *определены равенствами*

$$\psi_n(t) = n \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx \text{ при } t \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n-1;\ n = 2, 3, \cdots). \tag{8}$$

Тогда

$$\|f - \psi_n\|_{L^p(0,1)} \leqslant 2^{\frac{1}{p}} \omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{9}$$

Лемма 2 (П. Л. Ульянов [1], оценки (2.9) и (2.10)). *Если* $\psi_n(t)$ — *ступенчатая функция, принимающая постоянные значения на интервалах* $\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, *то*

$$\omega_1\left(\frac{1}{n}, \psi_n\right) \geqslant G_n(\psi_n) \tag{10}$$

и при $p > 1$

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, \psi_n\right) \geqslant n^{1-\frac{1}{p}} F_n(\psi_n). \tag{11}$$

Лемма 3. *Если* $f \in L^p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и функция* $\psi_n(t)$ *определена равенствами* (8), *то*

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, \psi_n\right) \leqslant \omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{12}$$

Доказательство леммы. Пусть $0 < h \leqslant \frac{1}{n}$. Тогда

$$\int_0^{1-h} |\psi_n(t) - \psi_n(t+h)|^p\,dt = \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{k+1}{n}-h}^{\frac{k+1}{n}} |\psi_n(t) - \psi_n(t+h)|^p\,dt =$$

$$= n^p h \sum_{k=0}^{n-2} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] dx \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant n^{p-1} \sum_{k=0}^{n-2} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] dx \right|^p. \tag{13}$$

Отсюда при $p = 1$ видим, что

$$\omega_1\left(\frac{1}{n},\ \psi_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)\right| dx \leqslant \omega_1\left(\frac{1}{n},\ f\right).$$

А для $p>1$ из (13) с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\omega_p^p\left(\frac{1}{n},\ \psi_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|^p dx \leqslant \omega_p^p\left(\frac{1}{n},\ f\right).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $f(t) \in L^p(0, 1)$ и функция $\psi_n(t)$ определена по формулам (8).

Рассмотрим сначала $p=1$. Пусть E и E_1—произвольные непересекающиеся подмножества отрезка $[0,1]$, мера каждого из которых равна $\frac{1}{n}$. Тогда

$$\int\limits_E f(t)\,dt - \int\limits_{E_1} f(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_E \psi_n(t)\,dt - \int\limits_{E_1} \psi_n(t)\,dt + \int\limits_0^1 |f(t)-\psi_n(t)|\,dt. \tag{14}$$

С помощью неравенств (10) и (12) находим, что

$$\int\limits_E \psi_n(t)\,dt - \int\limits_{E_1} \psi_n(t)\,dt \leqslant G_n(\psi_n) \leqslant \omega_1\left(\frac{1}{n},\ f\right).$$

Подставим эту оценку в (14) и воспользовавшись оценкой (9), получаем

$$\int\limits_E f(t)\,dt - \int\limits_{E_1} f(t)\,dt \leqslant 3\omega_1\left(\frac{1}{n},\ f\right).$$

Отсюда в силу произвольности множеств E и E_1 вытекает оценка (6).

Пусть теперь $p>1$. Из определения величин F_n следует, что

$$F_n(f) = F_n(\psi_n) + \sup_{\substack{A \subset [0,\ 1] \\ |A| = \frac{2}{n}}} \int\limits_A |f(t)-\psi_n(t)|\,dt. \tag{15}$$

Для первого слагаемого правой части формулы (15) в силу (11) и (12) имеем

$$F_n(\psi_n) \leqslant n^{\frac{1}{p}-1}\,\omega_p\left(\frac{1}{n},\ f\right),$$

а второе слагаемое оценим с помощью неравенств Гельдера и (9):

$$\sup_{\substack{A\subset[0,1]\\ |A|=\frac{2}{n}}} \int_A |f(t)-\varphi_n(t)|\,dt \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}} \|f(t)-\varphi_n(t)\|_{L^p(0,1)} \leqslant$$

$$\leqslant 2n^{\frac{1}{p}-1}\,\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Таким образом, из (15) следует оценка (7). Теорема доказана.

3°. Получим оценки сверху для наилучших констант в неравенствах вида (1) и (2).

Для каждого $n>2$ определим на $[0,1]$ функцию $\varphi_n(t)$ следующим образом: $\varphi_n(t)=1$, если $t\in\left[0, \frac{3}{4n}\right]\cup\left[\frac{1}{n}, \frac{5}{4n}\right]$, и $\varphi_n(t)=0$ — для остальных значений t.

Так как функция $\varphi_n(t)$ отлична от нуля только на множестве меры $\frac{1}{n}$, на котором она равна 1, то

$$G_n(\varphi_n)=F_n(\varphi_n)=\frac{1}{n}. \tag{16}$$

Найдем теперь $\omega_p\left(\frac{1}{n}, \varphi_n\right)$. Для этого заметим, что в силу определения функции φ_n, интеграл

$$J(h)=\int_0^{1-h} |\varphi_n(t)-\varphi_n(t+h)|^p\,dt$$

является линейной функцией от h, когда h принадлежит отрезкам $\left[\frac{i-1}{4n}, \frac{i}{4n}\right]$, $i=1, 2, 3, 4$. Поэтому верхняя грань $\sup\limits_{0<h<\delta} J(h)$ равна наибольшему из выражений $J\left(\frac{i}{4n}\right)$, $i=1, 2, 3, 4$. Но как легко подсчитать, $J\left(\frac{1}{4n}\right)=J\left(\frac{3}{4n}\right)=\frac{3}{4n}$, $J\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}$, а $J\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{4n}$, если $n>2$, и $J\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}$ при $n=2$. Таким образом

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, \varphi_n\right)=\left(\frac{3}{4n}\right)^{1/p}. \tag{17}$$

Отсюда и из (16) заключаем, что наилучшая константа в неравенствах вида (1) и (2) не может превышать $\left(\frac{3}{4}\right)^{1/p}$.

Несколько лучшую оценку для этой константы, а именно $\left(\frac{5}{7}\right)^{1/p}$ дает функция, равная 1 на отрезках $\left[0, \frac{4}{7n}\right]$, $\left[\frac{9}{14n}, \frac{11}{14n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, \frac{9}{7n}\right]$, и равная 0 в остальных точках. В этом нетрудно убедиться с помощью аналогичных подсчетов.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 20.I.1971

Կ. Ի. ՕՍԿՈԼԿՈՎ, Ս. Ա. ՏԵԼՅԱԿՈՎՍԿԻ. Պ. Լ. Ուլյանովին պատկանող անընդհատության ինտեգրալ մոդուլի գնահատականների մասին *(ամփոփում)*

Ճշգրտվում է Ուլյանովին պատկանող անընդհատության ինտեգրալ մոդուլի համար հաստատուն արժեքների գնահատականները ներքևից։

K. I. OSKOLKOV, S. A. TELIAKOVSKI. *On the P. L. Ul'janov's estimates of the integral moduli of continuity* (summary)

The values of constants are sharpened from below in the P. L. Ul'janov's estimates of the integral moduli of continuity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Л. Ульянов.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω, Изв. АН СССР, серия матем., 32, № 3, 1968, 649—686.
2. *П. Л. Ульянов.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках, Матем. сборник, 81, (123), № 1, 1970, 104—131.